Izrada programskog alata za rješavanje problema u teoriji igara pomoću simpleks algoritma

Kliček, Dino

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Dino Kliček

IZRADA PROGRAMSKOG ALATA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA U TEORIJI IGARA POMOĆU SIMPLEKS ALGORITMA

DIPLOMSKI RAD

Varaždin, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Dino Kliček

Matični broj: 46358/17–R

Studij: ***Organizacija poslovnih sustava***

IZRADA PROGRAMSKOG ALATA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA U TEORIJI IGARA POMOĆU SIMPLEKS ALGORITMA

DIPLOMSKI RAD

Mentorica:

Doc. dr. sc. Nikolina Žajdela Hrustek

Varaždin, lipanj 2019.

Dino Kliček

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni/diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor potvrdio prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

Teorija igara predstavlja metodu analize donošenja odluka u situacijama suprotstavljenih interesa koristeći se teorijom zasnovanoj u matematici. Ovaj diplomski rad bavi se teoretskom i praktičnom primjenom teorije igara s naglaskom na primjenu linearnog programiranja, odnosno simpleks algoritma za rješavanje problema iz domene teorije igara. Kroz teorijski dio rada dan je opis osnovnih značajki i pretpostavka teorije igara, dok je problem teorije igara prikazan u matričnom obliku. Također, analizirani su različiti slučajevi primjene teorije igara u različitim znanstvenim disciplinama. Provedenom analizom primjene daje se teorijsko i praktično polazište o učinkovitosti teorije igara kod donošenja odluka. Glavni cilj i doprinos ovog rada je razvijeni programski alat koji korisniku pojednostavljuje rješavanje problema teorije igara uz pomoć simpleks algoritma. U zaključku rada opisani su rezultati rada utemeljeni na teoriji i praktičnom dijelu izrade, odnosno primjeni programskog alata.

Ključne riječi: odlučivanje; konflikt; teorija igara; problem teorije igara; matrična igra; linearno programiranje; simpleks algoritam; programski alat

Sadržaj

1. Uvod

Svakodnevno donosimo različite životne odluke, bilo da se radi o manjim ili većim odlukama, no uvijek se pritom pokušavamo osloniti na svoj vlastiti razum i osjećaje. Odluke se često donose u uvjetima rizika, nesigurnosti i konflikta, a konačni rezultat odluke može uzrokovati određeni dobitak ili gubitak. Proces donošenja odluke uvijek je usmjeren na maksimizaciju, odnosno donošenje najbolje odluke u konkretnoj situaciji. Stoga je potrebno kod donošenja odluke uzeti u obzir sve karakteristike situacije. Upravo iz promatranja različitih konfliktnih situacija između ljudi, ali i organizacija razvila se matematičko ekonomska disciplina nazvana teorija igara. Teorija igara omogućava nam da ju primjenjujemo kod donošenja odluka u različitim životnim situacijama, a posebice kod analiziranja i donošenja kompleksnih odluka u organizaciji s ciljem ostvarenja ishoda koji je povoljan za donositelja odluke ili cijelu organizaciju. Mogućnost da se upotrebom teorije igara donose kvalitetnije i u konačnici odluke s najvećim dobitkom predstavljaju važnost, a ujedno i želju za pisanje diplomskog rada na ovu temu. Glavna motivacija i zanimanje za ovakvu vrstu teme javila se kroz diplomski smjer studija gdje se počinje uočavati važnost i vrijednost dobrog odlučivanja s obzirom na menadžerske funkcije. Uspješnost u privatnom i poslovnom životu uvelike ovisi o dobrim odlukama koje mnogo puta donosimo temeljem racionalnog pristupa čime se želi izbjeći cijena krivih odluka.

Rad se sastoji od teoretskog i praktičnog dijela. U teoretskom dijelu rada, nakon uvoda i opisanih metoda i tehnika rada, opisana je teorija igara s aspekta njezinih glavnih značajki koje je karakteriziraju, kao i osnovne vrste teorije igara. Nadalje, rad se nastavlja prikazom igre u obliku matrice plaćanja. U tom dijelu rada prikazane su glavne vrste i slučajevi vezani uz matrične igre poput igre sa sedlom, igre bez sedla, igre s dominacijom i specijalni slučajevi igara. Također, u istom dijelu rada prikazana su područja gdje su matrične igre pogodne za rješavanje stvarnih problema. U sljedećem poglavlju dane su osnovne teorijske postavke linearnog programiranja kao i simpleks algoritma, prikazan je postupak rješavanja problema primjenom simpleks algoritma, dok se glavna suština rada zasniva na promatranju primjene linearnog programiranja i upotreba simpleks algoritma u teoriji igara. Na primjeru konkretnog problema iz prakse kreirana je matrična igra temeljem koje je objašnjen postupak izgradnje matematičkog modela i njegovo rješavanje pomoću simpleks algoritma.

U zadnjem dijelu rada prikazan je praktični dio, način izrade i primjene programskog alata. Izrađeni programski alat zasniva se na opisanoj teoriji i postupku rješavanja problema iz prethodnih poglavlja. Kroz daljnja potpoglavlja objašnjen je alat kroz njegova sučelja i funkcionalnosti, a kao potvrdu da alat daje istovjetne i valjane rezultate dan je prikaz primjene na konkretnom problemu iz prakse. Rad završava kritičkim osvrtom i diskusijom autora na prikazanu problematiku diplomskog rada.

2. Metode i tehnike rada

U ovom poglavlju opisana je metodologija stvaranja ovog diplomskog rada. Budući da teorija igara predstavlja multidisciplinarnu znanost koja pokušava definirati najbolje poteze koristeći se određenim matematičkim, ekonomskim i psihološkim granama, postoji značajna literatura koja ju opisuje i definira. Isto tako, njezina primjena povijesno gledajući može se vidjeti u različitim društvenim i znanstvenim područjima - od ekonomije, politike, biologije pa sve do donošenja oduka u vojnim akcijama što je rezultiralo mnogim znanstvenim i stručnim radovima. Dakle, glavne metode rada koje će se koristiti u ovom radu su:

- analiza postojeće literature o temi rada,
  - knjige i članci iz stručnih i znanstvenih časopisa,
- pregled dosadašnjih istraživanja vezanih uz temu rada,
- usporedna analiza navedenih izvora radi donošenja relevantnih zaključaka,
- sveobuhvatna sinteza proučene građe.

Temeljem prethodno opisanih metoda rada omogućena je razrada teoretskog dijela rada i bolje shvaćanje teme u detalje.

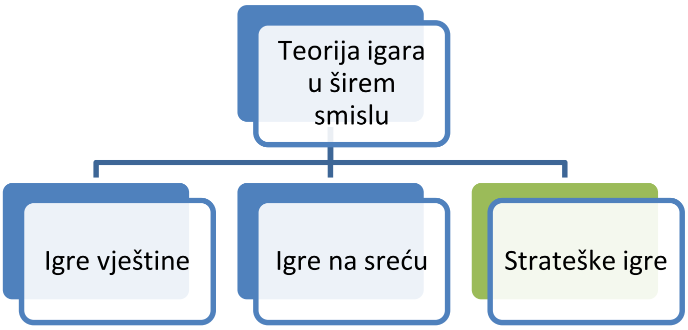
U praktičnom dijelu rada, glavni zadatak je razviti programski alat temeljen na linearnom programiranju, odnosno simpleks algoritmu koji određuje optimalne poteze pojedinog igrača s ciljem njegove maksimizacije dobiti. Za izradu programskog alata korišteni su sljedeći programski alati i okruženja:

- Microsoft .NET Framework,
  - C# - jednostavan, moderan, opće namjenski, objektno-orijentirani programski jezik koji omogućuje lako manipuliranje sučeljima i podacima u aplikaciji.
- GitHub - omogućuje spremanje, ažuriranje, dijeljenje i općenito praćenje programskog koda.

U nastavku rada slijedi teoretska razrada teme koristeći se spomenutim metodama i tehnikama rada, dok se u praktičnom dijelu rada koriste prethodno spomenuti programski alati i okruženja.

3. Teorija igara

Teorija igara, kao okvir za analiziranje strateških situacija, svoju primjenu pronalazi u mnogim kontekstima počevši od svakodnevnih svađa, donošenja manje ili više bitnih osobnih odluka, pa sve do poslovnih odluka kao što je povećanje proizvodnje, povećanje kvalitete proizvoda i tako dalje. Pojam teorije igara odnosi se na promatranje situacija u kojima postoje dvije ili više suprotstavljenih strana gdje svaka strana ima određeno razumijevanje kako poduzimanje vlastitih poteza, ali i kako tuđi potezi utječu na konačan ishod situacije. Samim time teorija igara navodi svakog igrača da odabere onu strategiju koja je najbolja u situacijama konkurencije ili sukoba (Roljić, 2017). Tipični primjeri takvih situacija su društvene igre, sportska natjecanja i kartaške igre (poker, bridž i slično). Naravno, primjena teorije igara je mnogo šira zahvaljujući sposobnosti modeliranja konflikata, ali i problema suradnje u polju politike, ekonomije, ratovanja pa sve do biologije. Shodno tome Kelly (kao što citiraju Kopal & Korkut, 2016) dijeli teoriju igara na tri kategorije kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Raspodjela teorije igara (prilagođeno prema Kopal & Korkut, 2016)

Prema prethodnoj slici teorija igara dijeli se na tri potkategorije igara: igre vještine, igre na sreću i strateške igre. Igre vještine predstavljaju igre u kojima postoji jedan igrač koji u potpunosti upravlja nad svim mogućim ishodima te igre. Najbolji primjeri takvih igara su polaganje ispita, rješavanje križaljke ili individualna sportska utrka. Igre u kojima pojedinac nije ovisan o drugom igraču, odnosno u kojima ne postoji međuovisnost igrača zapravo ne bi trebale ni biti klasificirane kao igre. Nadalje, igre na sreću predstavljaju igre u kojima jedan igrač igra protiv prirode – neke više sile. Za razliku od igara vještine, ovdje igrač nema potpunu kontrolu nad ishodima i svaki njegov potez ne vodi unaprijed nekom određenom ishodu. Dakle, u takvim igrama priroda definira sreću ili sudbinu igrača i time utječe na konačni ishod igre (Kopal & Korkut, 2016). Kod ovakvih igra valja spomenuti rizik i nesigurnost kod izbora strategija, odnosno razliku između odlučivanja i teorije igara. Osnovna karakteristika koja teoriju igara razlikuje od teorije odlučivanja, kako navodi Roljić (2017), je ta što teorija igara pretpostavlja da postoji suprotstavljenost dva ili više igrača koji su inteligentni, racionalni i usmjereni na određeni cilj. U teoriji odlučivanja postoji protivnik koji je pasivan kao što je na primjer sama priroda. Teorija odlučivanja proučava više igre na sreću gdje postoji jedan racionalan igrač koji bira najbolje strategije bez bojazni od straha ili odgovora druge osobe, dok rezultat takve vrste igre ovisi o prirodi koja nije uvijek racionalna. Postoje razni primjeri takvih vrsta igara – od vođa koju odlučuju da li će ući u rat, odluke poduzeća o ulasku na novo tržište pa do tenisača koji odlučuje kamo će uputiti sljedeći servis. Takvi primjeri situacija moraju se sagledati na strateški način uzimajući u obzir sve dostupne informacije kako bi se ostvario željeni cilj. Teorija igara omogućuje igračima izoštravanje načina razmišljanja s ciljem odigravanja najboljih poteza, odnosno stvaranjem optimalne strategije za ostvarenje željenog cilja (Kopal & Korkut, 2016). Kako bi se neka igra smatrala pravom (strateškom) igrom u kontekstu teorije igara, ona mora imati barem dva igrača koji su pritom obostrano svjesni i posjeduju jednake sposobnosti. Prema tome strateške igre su prema slici 1. označene zelenom bojom jer odudaraju od preostalih potkategorija u teoriji igara u širem smislu. Strateške igre su zapravo one igre koje se podrazumijevaju pod pojmom teorija igara, odnosno strateške igre predstavljaju teoriju igara u užem smislu. Dakle, svaka igra u kojoj postoji barem dva igrača koji su svjesni da potezi jednog utječu na ishode drugog igrača naziva se strateška igra. Ovaj rad bazira se upravo na strateškim igrama ili teoriji igara u užem smislu.

3.1. Definiranje pojma teorije igara

Upotrebom teorije igara u mnogim znanstvenim disciplinama javljaju se i mnoge definicije teorije igara. Jednu od najjednostavnijih i sažetijih definicija teorije igara dali su Dixit, Skeath i Reiley (prema Kopal & Korkut, 2016) koja glasi: *„Teorija igara je znanost o strateškom interaktivnom donošenju odluka."* Nadalje, Barković Bojanić & Ereš (2013) u svojem radu navode nešto detaljniju definiciju u kojoj govore da je teorija igara grana primijenjene matematike koja se bavi izučavanjem konflikta i suradnje između inteligentnih i racionalnih igrača. Temeljem prethodno navedenih definicija, a uzimajući u obzir i mnoge druge definicije koje nisu navedene, može se zaključiti da teorija igara obuhvaća nekoliko ključnih elemenata. Svaka definicija pretpostavlja da postoji skupina igrača, odnosno postoji više od jednog igrača ili donositelja odluke. Nadalje, u toj skupini igrača javlja se neka vrsta međusobne interakcije gdje djelovanje jednog igrača izravno utječe na nekog drugog, a time i na krajnji ishod. Bitan čimbenik u teoriji igara je racionalnost igrača. Svaki igrač mora voditi računa ne samo o svojim potezima kojima će ostvariti željeni cilj, već i o reakcijama na te poteze drugih igrača s obzirom na njihov postavljeni cilj. Stoga, racionalnost pretpostavlja da igrač donosi najbolje strategije koje mu donose najviše koristi pa makar će u određenoj fazi igre morati nešto žrtvovati ili odstupiti od maksimalnog očekivanja u slučaju nepovoljnog razvijanja situacije. Na kraju, svaka definicija teorije igara govori o strateškom načinu razmišljanja i donošenju odluka. Svaka igra nosi za sobom niz međusobno povezanih i uvjetovanih poteza igrača te je potrebno da svaki igrač razradi svoju strategiju igranja koja će mu omogućiti da ostvari željeni cilj (Kapor, 2017). Dakle, teorija igara je korisna ukoliko igrači uzimaju u obzir poteze ostalih igrača igre i može pridonijeti stvaranju optimalne strategije što je u konačnici i osnovni cilj teorije igara. Također, važno je shvatiti da se ovdje radi o apstraktnom načinu razmišljanja i donošenju optimalnih poteza u svakoj situaciji. U realnosti su igre zamršene. One se sastoje od blefiranja, varanja, propitkivanja samog sebe i slično. Stoga, teorija igara ne može dati rezultat koji će predstavljati u potpunosti realnost, ali može odrediti razumno ponašanje igrača za vrijeme igre.

3.2. Povijesni razvoj teorije igara

Povijesno gledajući razvoj teorije igara vezan je uz područje ekonomije sredinom 20. stoljeća. Stoga određeni autori govore o teoriji igara kao matematičko ekonomskoj disciplini. Naravno, strateške igre sežu u davnu prošlost kada su se proučavali načini kako pobijediti u ratu, no pravi formalni opis teorije igara započinje tek 1912. godine kada Ernst Zermelo objavljuje članak pod nazivom *„O primjeni teorije skupova na teoriju grafa."* U tom radu Zermel je ustanovio kako u šahu, igri sa savršenim informacijama, postoji najmanje jedna čista strategija, odnosno svaki igrač ima na raspolaganju jedinstven potez čija vjerojatnost iznosi 0 ili 1 (Brkić, 2002). Nedugo nakon Zermela javlja se matematičar von Neumann koji sa svojim suradnicima postavljaju temelje teorije igara kao društvene znanosti. Godine 1944. von Neumann i Morgenstern izdali su knjigu pod nazivom *„Teorija igara i ekonomsko ponašanje."* U toj knjizi teorija igara predstavlja se kao matematička osnova za ekonomiju. Knjiga uvodi aksiome za pojam individualnog racionalnog igrača. Takav igrač donosi dosljedne odluke suočene s određenim i neizvjesnim alternativama. No, takav igrač ne mora nužno pretpostaviti da i drugi igrači djeluju racionalno (Von Neuman & Morgenstern, 1953). Nakon ove knjige objavljeno je mnoštvo literature na ovu temu, ponajviše iz područja ekonomije, politike, psihologije, sociologije i biologije. Nakon Drugog svjetskog rata vrlo značaj doprinos teoriji igara dao je matematičar John Nash svojim radovima. Nash razvija modernu teoriju igara u kojoj definira igrača koji nije samo racionalan, nego pretpostavlja da su svi igrači racionalni do te mjere da mogu koordinirati svoje strategije kako bi prevladala takozvana Nashova ravnoteža. Ta ravnoteža predstavlja skup strategija, po jedna za svakog igrača, u kojoj nijedan igrač nema razloga za mijenjanjem svojeg poteza. Igrači znaju da ostvaruju ravnotežu ukoliko promjena strategije bilo kojeg igrača rezultira manjim dobitkom nego što bi se postigao kada tu strategiju ne bi mijenjao (Barković Bojanić & Ereš, 2013). Jedan od najpoznatijih primjera pronalaženja ravnoteže u teoriji igara je „zatvorenikova dilema". Zanimljivo je analizirati takvu dilemu, odnosno igru jer se u njoj javljaju ponašanja zatvorenika koja se mogu pronaći u svakodnevnim životnim situacijama. U sljedećem potpoglavlju rada je prikazana i pojašnjena takva vrsta igre.

3.3. Primjena teorije igara

Teorija igara ima bogatu i dugačku povijest kroz njenu primjenu u ekonomiji, političkim i društvenim znanostima, filozofiji, biologiji pa čak i ratovanju. Teorija igara bilježi najveću upotrebu u ekonomskim znanostima. Brkić (2002) u svom radu analizira više primjera primjene teorije igara u međunarodnoj ekonomiji od carinske politike i carinskih unija, međunarodnih kartela, ekstrakcije resursa zajedničke imovine do koalicija i međunarodnih pregovaranja između pojedinih država. Tako na primjer, carinske unije omogućavaju stvaranje slobodne trgovine između država članica te unije. Upotrebom igara, nakon formiranja jedne carinske unije, mogu se donositi odluke o prihvaćanju novih članova ili da se formiraju druge carinske unije. Takav model igara karakterizira kooperativnost između država jer se one moraju odreći dio nacionalnog suvereniteta kako bi se provodili razni transferi dobara. S druge strane, u situacijama oligopola javljaju se nekooperativne igre. U takvim situacijama želi se postići ishod koji će zadovoljiti sve sudionike oligopola. Kako bi se to učinilo najčešće je potrebno riješiti probleme međusobne usklađenosti proizvođača pronalaženjem ravnoteže koja svakome donosi maksimalni profit. Međunarodna ekonomska politika temelji se na vjerodostojnosti, ugledu i davanju određenih signala drugima kako bi se postigli željeni ishodi. Lemaire (1984) u svome radu proučava upotrebu igara s obzirom na raspodjelu operativnih troškova. Teorija igara omogućila je razvijanje niz drugih metoda za izračunavanje optimalnog rješenja. Tako se u radu navodi nekoliko učinkovitih primjena koncepta rješenja teorije igara: raspodjele poreza između podružnica korporacije, podjela troškova zakupa imovine, financiranje velikih projekata, subvencioniranje javnog prijevoza i tako dalje.

Osim u ekonomiji, najčešća upotreba teorije igara vidljiva je u političkoj i pravnoj znanosti. Politika koristi teoriju igara kao analitički alat. U takvim teoretskim modelima igara igrači su države, političke stranke, političari, glasači i ostale interesne skupine. Velika pažnja se daje na modeliranje kooperacije i konflikta između političara za vrijeme izbora, ali i kod donošenja važnih oduka u demokraciji (Roljić, 2017). U političkim znanostima veliku ulogu ima i sama racionalnost prethodno nabrojanih igrača. Austen-Smith & Banks (1998) u svome radu razmatraju odnose između kolektivne preferencije i nekooperativnog pristupa odigravanja igara. Tako razlikuju dva osnovna modela racionalnih igrača u politici: igrači koji imaju direktnu preferenciju odabira i igrači s indirektnim preferencijama odabira. Kolektivna odluka je posljedica čvrstih odluka svakog igrača neke igre temeljem njihovih preferencija. Kod modeliranja kolektivnih odluka postoji potreba za dobrim definiranjem mogućih događanja, složenog okruženja i kriterija minimalne demokracije svakog igrača. Nadalje, pravne znanosti se također služe teorijom igara s ciljem razumijevanja pravnih pravila i postupaka institucija. U pravnim granama najpoznatiji i najčešće korišteni model igara je zatvorenikova dilema.

Zatvorenikova dilema služi za ilustriranje raznih situacija vezanih uz ljudska ponašanja (Barković Bojanić & Ereš, 2013). U sljedećoj tablici prikazana je zatvorenikova dilema u strateškom (tabličnom) obliku.

Tablica 1. Zatvorenikova dilema

	Igrač B	
Igrač A	*Ne priznati*	*Priznati*
Ne priznati	1, 1	5, 0
Priznati	0, 5	3, 3

(Izvor: Barković Bojanić & Ereš, 2013)

Tablica 1. prikazuje moguće ishode, odnosno broj godina zatvora svakog igrača u slučaju priznavanja ili nepriznavanja zločina. Cilj takve igre je postizanje ravnoteže što donosi najbolja najbolje rješenja za oba igrača. Takve igre se iščitavaju na sljedeći način. Ukoliko obojica priznaju zločin, tada svatko od njih dobiva po tri godine zatvora. Ukoliko jedan od njih prizna, a drugi ne prizna tada onaj igrač koji je priznao zločin postaje slobodan (dobiva 0 godina) jer daje iskaz koji će se upotrijebiti na štetu drugog igrača koji dobiva kaznu zatvora u trajanju od 5 godina. Na kraju, kao najbolje rješenje, svaki igrač ne bi trebao priznati zločin što će zbog nedostatka dokaza uvjetovati minimalnu kaznu zatvora od 1 godine za oba igrača. Barković Bojanić & Ereš (2013) navode kako se upravo takav koncept igara koristi često u obiteljskom pravu, odnosno kod problematike procesa razvoda braka, dodjeljivanja alimentacije ili kod podjele imovine prilikom razvoda. U takvim situacijama svaki supružnik želi postići maksimalni dobitak. Nadalje, takav koncept igara je koristan i u ustavnom pravu kod glasovanja na izborima i formiranja koalicija. Kazneno pravo koristi također takav koncept igara u svrhu oslobađanja ili smanjenja kazne sudionicima kartela droge sa svrhom izvlačenja što je više moguće vrijednih informacija iz igrača. Može se zaključiti da koncept zatvorenikove dileme oslikava brojne situacije u pravu i time omogućava svim sudionicima da razviju svoje strategije i ostvare željeni rezultat korištenjem teorije igara. Valja spomenuti upotrebu teorije igara i u filozofiji te biologiji. S obzirom da teorija igara omogućava objašnjavanje, predviđanje i procjenu ljudskog ponašanja u različitim situacijama tako ima značajnu primjenu u filozofiji, točnije u etici i političkoj filozofiji. Također, biologija se koristi igrama kako bi objasnila evoluciju socijalnog ponašanja životinja i time dala odgovor na pitanje zašto životinje, ali i ljudi surađuju. Ljudska civilizacija počiva na međusobnoj suradnji i razumijevanju te se bez toga ne bi razvila u ovo što je danas. Iznalaženje zakona prirode koji opisuje ljudsko ponašanje upravo omogućuje teorija igara (Kopal & Korkut, 2011).

Konkretni primjer upotrebe teorije igara može se pronaći u radu *„Sustav podrške marketing – odlučivanju baziran na teoriji igara“* autora Dukić, Turkalj, & Sesar (2008). U tome radu razrađuje se odabir optimalne strategije za reklamiranje proizvoda. To je uobičajen problem za područje marketinga pogotovo u uvjetima konkurencije i konfliktnih situacija. Upotreba razvijenih modela teorije igara značajno olakšava rješavanje takvih situacija. U tome radu predstavljen je model dvije suprotstavljene strane koje dijele tržište određenog proizvoda. Oba konkurenta imaju namjeru pokrenuti reklamnu kampanju s ciljem preuzimanja potrošača izravnog konkurenta. Svako poduzeće ima na raspolaganju određeni broj strategija, odnosno broj medija kojima mogu oglašavati svoje proizvode. Matrica plaćanja formirala se na temelju procijenjenih efekata svih mogućih kombinacija strategija na postotnu promjenu tržišnog udjela jednog igrača. Efekti tržišnih promjena dobiveni su računalnom simulacijom postotnih promjena koji postaju elementi dolje prikazane matrice plaćanja sa strategijama svakog poduzeća.

A \ B	***novine***	***radio***	***televizija***
novine	2,4	− 1,57	−3,8
radio	2,83	1,644	−3,11
televizija	3,92	0,236	0,996

Nakon formiranja prethodne matrice plaćanja sa simuliranim vrijednostima postotnih promjena udjela na tržištu problem se transformirao u model linearnog programiranja. Kod rješavanja ovog problema korišten je programski paket *QSopt*. Na taj način dobiveni su rezultati vjerojatnosti odigravanja pojedinih strategija koje osiguravaju postizanje najboljeg mogućeg ishoda. Tako prema rezultatima poduzeće A uopće ne bi trebalo koristiti novine kao medij oglašavanja, dok se radiom treba koristiti u 13,78% slučajeva, a televizijom u preostalih 86,22% slučajeva. Vrijednost igre za poduzeće A iznosi 0,43, odnosno preuzimanje 0,43% tržišnog udjela konkurenta. Slično tome, izračunati su postoci i odigravanja pojedinih strategija poduzeća B.

Sličan primjer korisnosti upotrebe matričnih igara kod upravljanja gradskim prijevozom može se vidjeti u radu *„Uloga teorije igara u planiranju gradskog prijevoza"* autora Pašagić Škrinjar, Abramović, & Brnjac (2015). Promet u velikim gradovima je kompleksan i igra veliku ulogu. Zaustavljanje ili preusmjeravanje neke prometnice može donijeti velike gubitke. Kako bi se donijele dobre odluke u organizaciji prometa koriste se osim simulacijskih metoda i kvantitativne metode poput teorije igara za strateško donošenje odluka. U tom radu prikazan je način upotrebe matričnih igara za odabir mjesta gradnje autobusnog kolodvora u gradu. Prvo je izgrađen statističko matematički model koji je obuhvaća sve kriterije koje potencijalne linije prijevoza moraju imati. Samim time definirala se početna struktura igre, igrači i raspoložive strategije kojima se želi dobiti optimalno rješenje, a to je povezanost svih stanovnika s određenim točkama u gradu. Početna statistička igra pretvara se u matričnu igru gdje su prikazani gubici svake odabrane strategije. Anketiranje stanovnika naselja bilo je osnovno polazište za kreiranje vrijednosti elemenata matrice. Glavni igrači ove igre su apstraktni. Igrač ω predstavlja skup uvjeta za povezivanje kolodvora s određenim mjestima u gradu, dok igrač a predstavlja skup odluka građana za odabir te rute puta do kolodvora. Dobivena matrica gubitka izgleda na sljedeći način.

$\omega \backslash a$	a_1	a_2	a_3
ω_1	**0**	**5**	**10**
ω_2	**5**	**0**	**5**
ω_3	**10**	**5**	**0**

Ukoliko se prema prethodnoj matrici plaćanja postavi nova ruta koja ne odgovara stanarima naselja, onda se ta linija neće u potpunosti iskoristiti tj. neće biti ekonomski opravdana. To će uzrokovati gubitke poduzeća za gradski prijevoz razmjerno broju slobodnih mjesta u autobusu. Korištenjem metode linearnog programiranja dobiveni su rezultati za stvaranje najoptimalnijih ruta. Kroz ovaj primjer je vidljivo kako stručnjaci za promet mogu svakodnevno donositi odluke temeljem kvantitativnih metoda, odnosno matričnih igara. Važnost dobrog formiranja modela igara leži na kvalitetnom prikupljanju podataka čime se predefiniraju moguće strategije i željeni konačni rezultat.

Osim prethodno spomenutih primjera upotrebe teorije igara, vrijedi spomenuti i neka specifična područja njezine primjene. Tako Liang & Xiao (2013) u svom radu *„Game Theory for Network Security“* govore o upotrebi teorije igara u sigurnosti računalnih mreža. Kako mreže postaju sveprisutne u životima ljudi, korisnici sve više ovise o njima zbog pristupa informacijama i komunikacije s drugim ljudima. Međutim, računalne mreže svakodnevno trpe sigurnosne prijetnje, odnosno napade koji uzrokuju ogromne gubitke korisnika (narušavanje privatnosti, osobni podaci, financije i slično). Teorija igara može se primijeniti za razvijanje kvantitativnog okvira za analizu mrežnih napada i obrane predstavljenog u obliku matrične igre. To uključuje modeliranje interakcije između napadača i branitelja (žrtve) kao igre. Takvom igrom žele se predvidjeti postupci napadača i određivanje strategije obrane. U radu se detaljno razrađuje primjena matričnih igara kroz dvije kategorije, one za opću analizu obrane od napada i na one za specijalizirane analize napada-obrane. Također, prikazuju matricu plaćanja branitelja s obzirom na zlonamjeran napad koristeći se Nashovom ravnotežom.

Modeli teorija igara postaju sve poznatiji i korišteniji u području ratovanja, odnosno borbe protiv terorizma kako navodi Fricker (2006) u radu *„Game Theory in an Age of Terrorism: How Can Statisticians Contribute?“*. Upotreba teorije igara može omogućiti drugačiji pogled na analizu terorizma temeljem strateških analiza. U radu navodi kako teoretske metode igara pružaju strukturiran način ispitivanja kako će država djelovati pod različitim scenarijima sukoba s teroristima. Matrične igre za proučavanje terorizma uključuju primjenu za:

- procjenu strategija o tome kako države raspoređuju novac za terorizam i posljedice ako dođe do napada,
- mjere kojima se potiču razne vojne politike i strategije protiv terorizma,
- određivanje da li je bolje pregovarati ili ne s teroristima prilikom uzimanja talaca i pod kojim uvjetima.

Naravno, analitičarima je teorija igara zanimljiva jer omogućava rješavanje problema u kojima postoji nesigurnost ili prirodna komponenta koja se može kvantificirati s ciljem odvraćanja, otkrivanja i sprječavanja terorista. Matrične igre u ovakvim situacijama najčešće se sastoje od protuterorističkih strategija (preduhitrivanja i odvraćanja) i politika u slučaju tvrdoglavih i upornih terorista. Interakcija koja proizlazi između terorista i vlada čini teoriju igara dostojnim alatom za otkrivanjem svih činjenica i mogućih protuterorističkih strategija.

Sintezom prethodnih opisa može se zaključiti da teorija igra analizira strateške interakcije koristeći se matematičkim okvirom u svrhu davanja optimalnog rješenja za pojedinog igrača ili optimalno rješenje za sve igrače (ravnoteža). Samim time njezina korisnost najčešće se ogleda u modeliranju i rješavanju poslovnih konflikata. Na primjer, poduzeće koje želi povećati tržišni udio smanjenjem cijena proizvoda može izgubiti novac ako i ostala poduzeća odgovore na taj potez istom mjerom. Kako bi se izbjegao takav gubitak, teorija igara uzima u obzir da i druga poduzeća imaju na raspolaganju iste strategije. Dakle, teorija igara na raspolaganje stavlja optimalne strategije za ostvarenje dobiti, ali i za minimiziranje gubitka.

3.4. Definiranje temeljnih pojmova u teoriji igara

Razumijevanje temeljnih pojmova ili terminologije teorije igara važno je za kvalitetno opisivanje formalne strukture određene situacije konflikta ili suradnje. Također, dobrim definiranjem temeljnih pojmova omogućava se učinkovitija analiza situacije i određivanje najpovoljnijeg ponašanja sudionika situacije. U prethodnom dijelu rada spomenuti su i prikazani određeni pojmovi teorije igara koji će se sada objasniti. Temeljni pojmovi teorije igara su sljedeći:

Igra (eng. *game*) podrazumijeva konfliktnu situaciju između n sudionika koji se nazivaju *igračima* te igre. Ona opisuje formalnu strukturu strateške interakcije definirajući ograničenja za *poteze* i interese igrača, odnosno definira pravila i cilj igre bez specifikacije poteza koje igrači poduzimaju. Pravila igre određuju način ponašanja igrača, to jest propise odigravanja igre i način na koji se igrač informira o potezima i ponašanju drugog igrača. S druge strane, cilj igre je određivanje optimalne strategije ili protustrategije koja igraču uvijek donosi maksimalni dobitak ili minimalni gubitak (Roljić, 2017). Dakle, igra je jednostavno ukupnost pravila koja je opisuju, a potezi su komponenta te igre (Von Neuman & Morgenstern, 1953).

Igrači (eng. *players*) su osnovni sastavni dijelovi svake igre. Pod pojmom „igrač“ može se predstavljati pojedinac, skupina, organizacija, a ponekad i sama priroda koja se ne računa kao pravi igrač jer povlači poteze sukladno zakonima prirode - sreća, slučajnost i slično (Kopal & Korkut, 2016). U teoriji igara, igrači se postavljaju u različite situacije u kojima dolazi do ispreplitanja njihovih interesa, pri čemu povlače *poteze* s ciljem dobivanja što veće *isplate*. Broj igrača neke igre mora biti najmanje dvoje, s tim da ukupni broj igrača može biti velik, ali ipak mora biti konačan i svi igrači moraju biti poznati (Kapor, 2017).

Potezi/akcije (eng. *moves/actions*) omogućavaju da igra napreduje razmjenom informacija ili promjenom stanja igre. Svako poduzimanje neke akcije u određenom trenutku igre naziva se potez. Pravila igre definiraju kako će igrači povlačiti svoje poteze – naizmjenično ili istovremeno, ili kontinuirano do određenog stanja ili točke odustajanja. Dakle, potezi su posljedica svjesnog izbora ili slučajnosti (Kopal & Korkut, 2016).

Strategija igre (eng. *strategy*) ne predstavlja standardni i sveopći pristup igri, nego vrlo specifičan tijek akcija definiran kroz tok igre. Stoga strategija u kontekstu teorije igara označava unaprijed definirani skup poteza za svaku moguću situaciju koja se može javiti. Cjeloviti plan odigravanja igre od početka do kraja igre, a kojim se unaprijed predviđaju potezi protivnika, omogućuje igraču da u svakom trenutku naizmjenične igre zna koji je najoptimalniji potez, odnosno strategija (Kopal & Korkut, 2016). Optimalnu strategiju Pindyck & Rubinfeld (2005) definiraju kao strategiju koja svakom igraču maksimizira njegov očekivani povrat, odnosno isplatu. Strategije se, prema Kapor (2017), dijele na čiste i mješovite strategije. Ukoliko se jedan igrač stalno pridržava samo jedne strategije tada se govori o čistoj strategiji. Takva strategija u potpunosti definira način na koji će igrač odigrati igru, odnosno vjerojatnost odigravanja takve strategije jednaka je jedinici. S druge strane, mješovita strategija je dobivena miješanjem čistih strategija pri čemu se one biraju postupkom slučajnog odabira. Dakle, igrač odabire čiste strategije nasumično čime se javlja beskonačan broj miješanih strategija. Takve strategije se odabiru kada se želi protivnika držati u neizvjesnosti ili iskoristiti činjenicu predviđanja sljedećeg poteza. Vrijedi spomenuti da su se iz takvih strategija razvile istoimene matrične igre o kojima će biti više riječ u sljedećem poglavlju rada.

Ishod (eng. *outcome*) je rezultat cijelog skupa strateškog odabira svih igrača. Naravno, pretpostavka je da svaki igrač ima preferirani ishod kojem teži što utječe na odabir strategija tijekom igre. Također, igrači moraju biti sposobni rangirati svoje ishode temeljem kojih se mogu dodijeliti numeričke *isplate* svim mogućim ishodima (Kopal & Korkut, 2016).

Isplata (eng. *payoff*) označava brojčanu vrijednost pridruženu svakom mogućem ishodu. Veći brojevi dodjeljuju se onim ishodima koji imaju veći rang, odnosno donose više koristi za nekog igrača. Dakle, isplate govore kolika je uspješnost nekog igrača s obzirom na ishod igre. Također, valja spomenuti da se isplata može izraziti ne samo materijalnim nagradama, već i korisnosti koja se dobiva (tržišni udio, povećanje profita i slično) ili mogu predstavljati rang poželjnosti nekog ishoda (redni broj) (Kopal & Korkut, 2016).

Informacijska struktura (eng. *information structure*) prikazuje informacije koje su dostupne i poznate svakom igraču na početku i u toku neke igre. Takve informacije imaju dvije važne karakteristike. Prva karakteristika je cjelovitost informacija što omogućuje igračima da znaju kakva je trenutačna situacija i što je dovelo do takve situacije, a ujedno da znaju da je konačni cilj protivnika pobjeda. Primjer igre s cjelovitim informacijama je šah. Druga važna karakteristika je potpunost informacija. U stvarnom svijetu, pa tako i u mnogim igrama, poslovne interakcije se odvijaju temeljem onih informacija koje su dostupne, odnosno ne postoji pristup svim potrebnim informacijama za kreiranje optimalne strategije. Stoga, igrači sa nepotpunim informacijama formiraju i biraju strategije ovisno o informacijama koje posjeduju (Roljić, 2017).

Ravnoteža (eng. *equilibrium*) je kombinacija strategija igrača koje su najbolji odgovor na strategije drugih igrača igre. Ravnotežna strategija je ona strategija koja igraču daje najveće isplate s obzirom na strategije svih drugih igrača (Kopal & Korkut, 2016). Također, kako bi se postigla ravnoteža između igrača podrazumijeva se da svaki igrač zna ravnotežne strategije ostalih igrača. Tako su, na primjer, dva igrača u Nashovoj ravnoteži ako se svaki od njih koristi najboljom mogućom strategijom i nijedan igrač ne može dobiti veću isplatu ukoliko promjeni svoju strategiju pod uvjetom da ostali igrači ne mijenjanju svoje strategije (Kapor, 2017).

3.5. Pretpostavke teorije igara

U prethodnom dijelu rada spomenut je niz pretpostavki teorije igara. Najvažnije pretpostavke se vežu uz samog igrača strateške igre, odnosno na njegovu racionalnost i opće znanje. Racionalnost, kako navode Kopal & Korkut (2016), podrazumijeva da je svaki igrač motiviran maksimalizacijom vlastitog dobitka. Svaki igrač mora ispravno definirati svoje ciljeve i težiti njihovom ostvarenju primjenom najboljih strategija. Nadalje, Kapor (2017) navodi kako se teorija igara bazira upravo na samostalnom i nezavisnom donošenju odluka bez postojanja hijerarhijski nadređenog entiteta. Dakle, potrebna je apsolutna nezavisnost igrača od utjecaja drugih igrača. Također, igrač posjeduje potpuno znanje o vlastitim strategijama i interesima te zna izabrati strategiju kojom će zadovoljiti svoje interese. Kod definiranja pojma igre spomenuta su pravila igre. Pravila igre sadrže informacije o igračima, njihovom znanju o igri, mogućim potezima i isplatama. Upravo pravila igre definiraju drugu važnu pretpostavku strateških igara, a to je opće znanje koje opisuje kako ponašanje jednog igrača utječe na ponašanje drugog. Ukoliko postoji neka informacija koja je poznata svim igračima i svi igrači znaju da je ona poznata svima, tada tu informaciju smatramo kao opće znanje (Kopal & Korkut, 2016).

Iz prethodno napisanog može se utvrditi nekoliko daljnjih pretpostavki. Svi igrači imaju jednake sposobnosti i znanje kod odigravanje određene igre. Također, svi imaju jednake izglede za postizanje najboljeg rezultata jer sami definiraju vlastiti plan odigravanja igre od početka do kraja igre, a ujedno sami odabiru strategiju koju će igrati zbog racionalnosti. Igrač koji prvi povlači potez uvijek će racionalno odabrati takav potez koji će mu donijeti maksimalni rezultat. S druge strane, drugi igrač temeljem vlastite racionalnosti odgovara na prvi potez onom strategijom za koju smatraju da će minimizirati njegov gubitak ili eventualno ostvariti određeni dobitak. Važno je također znati da i drugi igrači mogu imati jednake strategije na raspolaganju zbog pretpostavke općeg znanja, no one mogu donositi i različite rezultate.

3.6. Vrste igara

Vrste igara u teoriji igara općenito se razlikuju s obzirom na ukupan broj igrača (Petrić, 1979). Tako su igre s jednim igračem zapravo igre vještine i igre na sreću te kao takve nisu previše zanimljive teoriji igara. Igre s dva ili više igrača su igre koje karakteriziraju strateške igre i samim time su najčešći tip igara koje teorija igara proučava. Strateške igre svoju primjenu pronalaze u mnogim kontekstima i područjima pa je logično da posjeduju razne karakteristike vezane uz situacije konflikta, suradnje ili pak konflikta i suradnje. Svaka karakteristika najčešće identificira dva tipa igara ovisno o tome jesu li interesi igrača potpuno podudarni, potpuno konfliktni ili su interesi igrača jednim djelom podudarni, a drugim djelom konfliktni. Svaka interakcija bila u privatnom ili poslovnom smislu donosi svoju zamršenost koju teorija igara pokušava raspetljati. U sljedećim potpoglavljima slijede najpoznatije vrste igara u teoriji igara.

3.6.1. Kooperativne i nekooperativne igre

Jednu od najznačajnijih podjela strateških igara je podjela na kooperativne i nekooperativne igre. Strateške igre u kojima se interesi dvaju ili više igrača podudaraju nazivaju se kooperativne strateške igre (Kopal & Korkut, 2016). Glavna značajka kooperativnih igara su obvezujući ugovori između igrača kojima se prije odigravanja igre određuju zajedničke strategije za postizanje najveće zajedničke koristi. Pindyck & Rubinfeld (2005) navode u svojoj knjizi primjer kooperativne igre između dva poduzeća koja pregovaraju o zajedničkom ulaganju u novu proizvodnu tehnologiju s pretpostavkom da nijedno poduzeće samostalno ne bi uspjelo u tome. Ukoliko poduzeća sklope obvezujući ugovor o zajedničkom investiranju, konačni rezultat njihove sinergije omogućiti će dobitak obje strane i međusobno dijeljenje profita.

S obzirom na međuodnos između igrača razlikuju se i nekooperativne igre. Igre u kojima između igrača ne postoji suradnja, odnosno svaki igrač vrši izbor strategije samostalno bez koordinacije s drugim igračima, nazivaju se nekooperativne igre (Kopal & Korkut, 2016). Glavne karakteristike takvih igrača su nepostojanje koordinacije u ponašanju igrača tijekom igre. Igrači u takvoj igri imaju u potpunosti suprotne interese što dovodi do odabira strategija isključivo u svoju korist, a na štetu protivnika. Također, iako je omogućena komunikacija između igrača, nije moguće kreiranje obvezujućeg ugovora čime ne postoji u konačnici viša sila koja bi sprovela dogovor između igrača (Brkić, 2002). Primjer nekonkurentne igre može se vidjeti u situaciji kada dva međusobno konkurentna poduzeća određuju cijenu proizvoda. Svako poduzeće zna da snižavanjem cijena dobiva mogućnost širenja tržišnog udjela, no s druge strane riskira početak tržišnog rata. Shodno tome, mogućnost pregovaranja je glavna razlika između kooperativnih i nekooperativnih igara. Također, važno je strateško donošenje odluka, odnosno razumijevanje protivnikovog stajališta i predviđanje njegove reakcije (Pindyck & Rubinfeld, 2005).

3.6.2. Igre s nultom sumom i igre s promjenjivom sumom

Teorija igara proučava također igre u kojima postoji konflikt, odnosno striktno kompetitivne igre. Takve igre u kojima su interesi igrača potpuno konfliktni nazivaju se strateške igre s nultom sumom jer dobitak jednog igrača znači gubitak za drugog (Kopal & Korkut, 2016). Izraz „nulta suma“ označava da je zajednički dobitak, odnosno gubitak obaju igrača jednak nuli. Nadalje, Barković (2001) objašnjava kako se takve igre zasnivaju na nekoliko sljedećih pravila. Svaki igrač mora vršiti svoj izbor strategija, a da pritom ne zna koju strategiju je odabrao drugi igrač, iako su mu poznate sve moguće strategije protivnika. Također, visina dobitka ili gubitka mora biti prikazana matricom plaćanja koja se odnosi na sve strategije u igri. Fokus ovog diplomskog rada usmjeren je upravo na igre nulte sume, a primjeri takve vrste igre su šah, škare-papir, križić kružić i tako dalje. Veliki broj igara odnosi se na igre s promjenjivom sumom koje za razliku od igara nulte sume nisu strogo kompetitivne jer sadrže i elemente suradnje budući da ishod može biti loš ukoliko se ne postigne dogovor. Za takve igre je karakteristično da je dobitak jednog igrača veći od gubitka drugog i obrnuto. Tipični primjeri takvih igara su srećke, sportsko klađenje i slično pri čemu lutrija ima veći dobitak nego što ima svaki pojedinačni igrač gubitak (Dobrenić, 1978).

3.6.3. Igre mješovitih motiva

Značajnu vrstu igara predstavljaju i igre u kojima se interesi igrača u potpunosti ne podudaraju, no isto tako igrači ne ulaze zbog toga u potpuni konflikt. Takve igre su najčešće u kontekstu strateških igara jer zorno prikazuju situacije u kojima je potrebno povući najbolje poteze s obzirom na ovisnost o drugim igračima i uvjete ograničenja željenog interesa. Igre mješovitih motiva sadržavaju istovremeno elemente kooperativnosti i nekooperativnosti (Kapor, 2017). Primjer takve igre je odnos između sindikata radnika i uprave nekog poduzeća. Oba igrača imaju djelomično suprotstavljene interese, ali kako dolaze iz istog poduzeća, oni moraju biti na nekoj razini kooperativnosti kako bi poduzeću donijeli profit od čega ima koristi svaka strana. Stoga, teorija igara i u ovakvim igrama omogućava pronalazak optimalnih strategija pod pretpostavkom racionalnosti, odnosno da oba igrača djeluju s ciljem ostvarenja obostranog interesa.

3.6.4. Ostale vrste igara

Od ostalih vrsta vrijedi spomenuti još neke. Na primjer, prema Barković Bojanić & Ereš (2013), igre mogu biti statičke ili dinamičke. Statička je ona igra u kojoj igrač odabire strategiju istodobno kad i njegov protivnik čime niti jedan igrač nema informacije o izabranoj strategiji drugog igrača. S druge strane, dinamičke igre omogućavaju protivniku da bira strategije imajući spoznaje o potezima prvog igrača. Nadalje, Kapor (2017) u svom radu razlikuje igre sa savršenim i nesavršenim informacijama. U igrama sa savršenim informacijama svaki igrač ima potpunu informaciju o svim potezima koji su se odigrali tijekom igre, odnosno svaki igrač zna gdje se nalazi u igri i koju sljedeću strategiju treba odabrati. U protivnom, ako ne postoje potpune informacije, riječ je o igri s nesavršenim informacijama. Vrijedi još spomenuti jednokratne igre – igre koje isti igrači igraju samo jednom, dok za razliku od njih postoje i iterirane igre koje isti igrači igraju više od jednog puta.

4. Matrična igra

Igra ili strateška interakcija također se razlikuje s obzirom na način predstavljanja, ovisno o tome kako želimo prikazati i analizirati igru. Kopal & Korkut (2016) razlikuju strateški, ekstenzivni i koalicijski oblik igre. Strateški ili normalni oblik karakterizira matrica plaćanja u kojoj su prikazani igrači, njihove strategije i isplate za svaku kombinaciju strategija koje igrači dobivaju primjenom određene strategije. Ekstenzivni ili sekvencijalni oblik igre prikazan je u obliku stabla koje se sastoji od čvorova, linija i skupova ishoda. Čvorovi predstavljaju točku u kojoj jedan igrač mora donijeti odluku, linije (grane) pokazuju moguće strategije igrača, dok se na kraju linije nalazi isplata za odabranu strategiju. Na kraju, kao treći oblik predstavljanja igara javlja se koalicijska forma igre. Ovu vrstu igre karakterizira da se igrači ili određena podgrupa igrača (koalicija) prije igranja dogovore o tome što će raditi i što žele ostvariti.

Strateški oblik je najčešći prikaz igre koji omogućava njezinu matematičku reprezentaciju putem matrice. Shodno tome, takva igra poprima naziv matrična igra. Glavna značajka matričnih igara je matrica plaćanja (eng. *payoff matrix*) u kojoj su strategije jednog igrača prikazane po redovima matrice, a strategije drugog igrača u stupcima matrice. Također, za takvu vrstu oblika prikaza karakteristično je da su unaprijed poznati svi ishodi, odnosno plaćanja za bilo koju odabranu strategiju igrača (Petrić, 1979). Ovaj rad bazira se na prikazu igre u strateškom obliku pomoću matrice plaćanja. Opći oblik matrice plaćanja može se prikazati na sljedeći način (prilagođeno prema Dobrenić, 1978):

$$\textbf{Igrač A}\quad \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\textbf{Igrač B}} \\ \mathbf{A}\backslash\mathbf{B} & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline x_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ x_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array} = [c_{ij}] \tag{1}$$

gdje je

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Prethodno prikazana matrica naziva se matrica plaćanja. U njoj su individualna plaćanja igrača izražena brojčanim vrijednostima c_{ij} ovisno o poziciji u matrici. Pozitivne vrijednosti prikazuju plaćanje koje će obaviti igrač označen iznad matrice (igrač B) igraču koji se nalazi s lijeve strane matrice (igrač A). Suprotno tome, brojčane vrijednosti koje plaća igrač koji se nalazi s lijeve strane matrice igraču iznad matrice, prikazat će se negativnim predznakom. Ackoff, kako ga citira Barković (2001), navodi nekoliko općenitih poučaka vezanih uz matrične igre:

- Svaka matrična igra ima određenu vrijednost v. Ta je vrijednost jednoznačna, a predstavlja rezultat određene igre.

- Za igrača A postoji najbolja kombinacija strategija, a to znači da postoje relativne učestalosti $p_1, p_2, \dots, p_m$ uz uvjet $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$, tako da odabiranjem strategije x_1 s učestalošću p_1, strategije x_2 s učestalošću p_2, …, strategije x_m s učestalošću p_m igrač A osigurava minimalni dobitak v.

- Analogno igraču A, igrač B isto ima najbolju kombinaciju strategija:

  $$Y = (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ uz uvjet } \textstyle\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

  sa sljedećim svojstvima: odabere li igrač B strategiju $y_1, y_2, \dots, y_n$ respektivno s učestalošću $q_1, q_2, \dots, q_n$, može biti siguran da će izgubiti najviše u iznosu v.

S ciljem boljeg razumijevanja funkcioniranja matrice plaćanja dat će se kratki i konkretan primjer igre. Pretpostavimo da postoje dva igrača, igrač A i igrač B, koji su jednako inteligentni i racionalni temeljem pretpostavki strateških igara. Igraču A na raspolaganju stoje strategije x_1 i x_2, dok igraču B y_1 i y_2. Nadalje, između igrača je dogovoreno sljedeće:

1) Ukoliko igrač A igra strategiju x_1, a igrač B uzvrati strategijom y_1, tada igrač B plaća igraču A 2 kune.
2) Ukoliko igrač A igra strategiju x_1, a igrač B uzvrati strategijom y_2, tada igrač B plaća igraču A 1 kunu.
3) Ukoliko igrač A igra strategiju x_2, a igrač B uzvrati strategijom y_1, tada igrač A plaća igraču B 3 kune.
4) Ukoliko igrač A igra strategiju x_2, a igrač B uzvrati strategijom y_2, tada igrač A plaća igraču B 2 kune.

Prikaz takve igre moguće je prvo dati u tabličnom obliku:

Tablica 2. Tablični prikaz igre

Igrač A	*Igrač B*	
	Strategija $\boldsymbol{y_1}$	Strategija $\boldsymbol{y_2}$
Strategija $\boldsymbol{x_1}$	Igrač A dobiva 2 kn	Igrač A dobiva 1 kn
Strategija $\boldsymbol{x_2}$	Igrač B dobiva 3 kn	Igrač B dobiva 2 kn

(Izvor: autorski rad)

Ovakva tablično prikazana igra može se skraćeno napisati u matričnom obliku uzimajući u obzir koji igrač plaća kojem, odnosno predznak brojčanih vrijednosti:

A \ B	y_1	y_2
x_1	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$
x_2	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-2}$

(2)

Prikazana matrična igra, odnosno matrica plaćanja (2) je oblika $2x2$. Dakle, sastoji se od dvije strategije svakog igrača. Matrica plaćanja može imati i druge oblike, ovisno o tome koliko strategija stoji na raspolaganju pojedinom igraču. Dobrenić (1978) razlikuje ukupno tri oblika:

- $2x2$ – igra u kojoj oba igrača imaju na raspolaganju dvije strategije
- $mx2$ ili $2xn$ – igra u kojoj jedan igrač ima na raspolaganju veći broj strategija, a drugi samo dvije strategije
- mxn – igra u kojoj oba igrača imaju na raspolaganju veći broj strategija

Temeljem matrice plaćanja (1) možemo napisati primjer i ostalih tipova matrica plaćanja. Primjer matrice plaćanja ranga $mx2$, odnosno $3x2$:

A \ B	y_1	y_2
x_1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-2}$
x_2	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{3}$
x_3	$\mathbf{5}$	$\mathbf{-1}$

(3)

Primjer matrice plaćanja ranga mxn, odnosno $3x3$:

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	$\mathbf{2}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{3}$
x_2	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{2}$
x_3	$\mathbf{3}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{-4}$

(4)

U nastavku rada slijedi prikaz tipičnih vrsta igara uz dodatak specijalnih slučajeva koji se javljaju u domeni teorije igara.

4.1. Čista i miješana igra

U matričnim igrama mogu se javiti posebne strukture matrice plaćanja kao što je matrica plaćanja (2). Analizirajući takvu matricu može se uočiti da će igrač A, igrač koji prvi odabire strategiju, uvijek racionalno odigrati strategiju x_1 jer mu ona donosi dobitak neovisno o odabranoj strategiji igrača B. S druge strane, kako bi umanjio svoj gubitak, igrač B će racionalno odgovarati strategijom y_2 kojom gubi 1 kunu, a ne 2 kune ako bi odgovarao strategijom y_1. Dakle, vrijednost ili rezultat ove igre iznosi 1 kunu u korist igrača A. Svaka takva igra gdje prvi igrač jednom određenom strategijom maksimizira svoj dobitak, a drugi igrač jednom određenom strategijom minimizira svoj gubitak, naziva se čista igra (Dobrenić, 1978). Strategije takve igre nazivaju se čiste strategije. Kako bi se otkrila takva igra, u kojoj svaki igrač odabire strategiju kojom maksimizira vlastiti minimalni dobitak i istovremeno minimizira maksimalni gubitak, koristi se *minimaks* kriterij poznatiji pod nazivom kriterij von Neumanna (Barković, 2001). Drugim riječima, potrebno je pronaći sedlo ili plaćanje koje se dobije kada svaki igrač igra svoju čistu strategiju. Sedlo ujedno predstavlja vrijednost igre, odnosno sedlo u slučaju matrice plaćanja (2) iznosi 1.

Svaka igra koje ima sedlo naziva se čista igra. Sedlo postoji ako postoji jedan broj koji je maksimum minimuma svih redova i minimum maksimuma svih stupaca određene matrice plaćanja. Općenito traženje sedla na matrici plaćanja (1) prikazuje na sljedeći način (prilagođeno prema Dobrenić, 1978):

		Igrač B					
	B \ **A**	y_1	y_2	…	y_n	Traži se minimum svakog reda	Traži se maksimalna vrijednost
	x_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}		
	x_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}		
Igrač A	…	…	…	…	…	$\min_j c_{ij}$	$Max\ (\min_j c_{ij})$
	x_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}		

Traži se maksimum svakog stupca

$$\max_i c_{ij}$$

Traži se minimalna vrijednost

$$Min\ (\max_i c_{ij})$$

Temeljem prethodnog prikaza zaključuje se da igra ima sedlo ako vrijedi relacija:

$$Max \underset{j}{min}\, c_{ij} = Min \underset{i}{max}\, c_{ij}.$$

Dakle, broj c_{ij} koji zadovoljava gornji von Neumannov kriterij predstavlja sedlo, odnosno rješenje igre (Dobrenić, 1978).

Primjer pronalaženja sedla na igri ranga $3x3$:

(5)

A \ B	y_1	y_2	y_3	Minimum reda	Maksimum minimuma reda
x_1	**8**	**−1**	**−6**	**−6**	
x_2	**6**	**5**	**3**	**3**	**3**
x_3	**−3**	**−4**	**−4**	**−4**	
Maksimum stupca	**8**	**5**	**3**		
Minimum maksimuma stupca		**3**			

Prema von Neumannovom kriteriju za matricu plaćanja (5) vrijedi da je $3 = 3$ iz čega možemo zaključiti da igra ima sedlo, odnosno vrijednost ove igre iznosi 3 dogovorene jedinice u korist igrača A. Detaljnije objašnjenje rezultata ove igre je da će igrač A uvijek će igrati strategiju x_2, dok će mu igrač B odgovarati strategijom y_3. Oba igrača su pronašla strategije koje su najbolje u odnosu na sve preostale. Dakle, to su optimalno čiste strategije. Kako matrica plaćanja može biti proizvoljno velika, korisno je prije rješavanja ispitati postojanje takvih strategija, odnosno postojanje sedla (Petrić, 1979).

Čista igra se u konkretnim problemima javlja jako rijetko. Stoga je mnogo puta potrebno da svaki igrač odigra više svojih strategija kako bi se odredila vrijednost igre. Igra u kojoj svaki igrač mora odigrati dvije ili više svojih strategija naziva se miješana igra (Dobrenić, 1978). Dakle, može se reći da svaka igra koja nema sedlo je miješana igra s mješovitim strategijama. U takvim igrama potrebno je odrediti vjerojatnost odigravanja pojedine strategije igrača. Shodno tome, koriste se p_i i q_i kao pomoćne varijable koje predstavljaju učestalost (frekvenciju) korištenja pojedinih strategija od strane igrača A odnosno igrača B u optimalnom slučaju (Roljić, 2017). Također, mora se pretpostaviti da se vlastita strategija drži u tajnosti sve dok drugi igrač ne odigra svoju. Jedna od efikasna metoda za rješavanje takvih vrsta problema je linearno programiranje i upotreba simpleks postupka.

Primjer pronalaženja sedla na igri ranga $4x3$:

(6)

A \ B	y_1	y_2	y_3	Minimum reda	Maksimum minimuma reda
x_1	5	-2	2	-2	
x_2	-2	3	-1	-2	-1
x_3	5	-1	4	-1	
x_4	-3	2	0	-3	
Maksimum stupca	5	3	4		
Minimum maksimuma stupca		3			

Matrica plaćanja (6) ne zadovoljava von Neumannov kriterij jer $-1 \neq 3$ što znači da ova igra nema sedlo, tj. radi se o miješanoj igri. Stoga je potrebno da svaki igrač odigra neku kombinaciju svojih raspoloživih strategija kako bi se dobilo rješenje igre, to jest maksimalni dobitak prvog igrača i minimalni gubitak drugog igrača.

4.2. Dominacija

U matricama plaćanja postoji vjerojatnost da se jave dominantne strategije. Dominantna strategija je takva strategija koja je uvijek lošija od preostalih strategija nekog igrača, neovisno o tome kojom strategijom protivnik odgovara (Barković, 2001). Promatrajući zadanu matricu plaćanja (5) može se vidjeti da igrač A nikad neće igrati strategiju x_3 jer mu uvijek donosi gubitak. Strategija x_3 lošija je od preostale dvije, pa tako strategije x_1 i x_2 dominiraju nad njom. Za takav red, odnosno strategiju kažemo da je dominantna. Stoga, takve strategije možemo eliminirati prije izračunavanja vrijednosti igre.

Primjer dominacije na igri ranga $3x3$:

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	8	-1	-6
x_2	6	5	3
~~x_3~~	~~-3~~	~~-4~~	~~-4~~

$\Longrightarrow$

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	8	-1	-6
x_2	6	5	3

(7)

Matrica plaćanja (7) predstavlja reduciranu matricu plaćanja (5). U reduciranoj matrici može se nadalje zaključiti da igrač B neće nikad igrati strategiju y_1 nad kojom dominiraju njegove preostale dvije. Na taj način bi se dobila matrična igra ranga $2x2$ čime se uvelike pojednostavljuje početna igru neovisno o tome da li se dalje radi o čisti ili miješanoj igri. Dakle, dominantne strategije za igrača A u igrama ovakvog oblika će uvijek biti redovi sa svim negativnim brojevima, dok za igrača B će to biti stupci sa svim pozitivnim brojčanim vrijednostima. Uz preporuku uklanjanja dominantnih strategija prije izračunavanja optimalnih strategija moguće je ukloniti i duplikatne strategije. Uklanjanjem duplikatnih strategija kao i dominantnih ne utječe se na konačan rezultat igre.

Primjer redukcije matrične igre uklanjanjem dominantnih i duplikatnih strategija:

$$
\begin{array}{c|ccc}
A \backslash B & \cancel{y_1} & y_2 & y_3 \\
\hline
x_1 & \cancel{2} & 5 & -3 \\
x_2 & \cancel{4} & -3 & 2 \\
\cancel{x_3} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{-3}
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c|cc}
A \backslash B & y_1 & y_2 \\
\hline
x_1 & 5 & -3 \\
x_2 & -3 & 2
\end{array}
\qquad (8)
$$

Iz gornjeg primjera može se vidjeti kako se uklanjanjem dominantne strategije y_1 i nakon toga strategije x_3, koja postaje duplikatna sa strategijom x_1, početna matrična igra tipa $3x3$ pretvara u matričnu igru ranga $2x2$. Naravno, oznake strategija se dinamički mijenjaju s uklanjanjem pojedine strategije tako da oznaka y_2 preuzima oznaku strategije y_1, a oznaka strategija y_3 postaje y_2. Takvi tipovi igara lako se rješavaju bilo algebarskim načinom ili grafičkom metodom.

4.3. Specijalni slučajevi

Prethodno opisano je iznimno karakteristično za strateške igre. Matrične igre mogu posjedovati ne samo različite strukture već i posebne isplate odnosno brojčane vrijednosti matrice plaćanja ovisno o ishodima. Dakle, moguća je pojava igara u kojima svi ishodi strategija odlaze u korist jednog igrača bez obzira na strategije drugih igrača. Također, postoje igre u kojima se redukcijom broj strategija nekog igrača može svesti na samo jednu strategiju. Takve igre gube svoju neizvjesnost jer se poznaje igračevo buduće ponašanje i orijentacija prema cilju. U sljedećim dijelovima potpoglavlja prikazat će se prethodno opisani slučajevi poznatiji pod nazivom protuprirodne i kontradiktorne igre.

4.3.1.Protuprirodna igra

Osnovna pretpostavka teorije igara je inteligentnost svakog igrača igre. Time je određeno da će svaki igrač iskoristiti otklon protivnika od odabira najbolje strategije u svoju korist. U igrama protiv prirode te pretpostavke ne vrijede jer priroda sama po sebi nije inteligentna (Barković, 2001). Priroda zapravo predstavlja racionalno okruženje u kojem se igra odvija i koja na probabilistički način utječe na tijek igre. Takve igre se nadalje klasificiraju, prema Sikavica, Hunjak, Begičević Ređep & Hernaus (2014), na one koje uključuju rizik i na one koje uključuju nesigurnost. U igrama s rizikom igraču su poznate strategije prirode i vjerojatnost njihovog igranja, dok u igrama nesigurnosti igraču su također poznate strategije prirode, ali ne zna kolike su vjerojatnosti njihovog igranja. Dakle, ovakve vrste igra više proučava znanstvena disciplina teorija odlučivanja, nego teorija igara. U kontekstu teorije igara protuprirodne igre imaju sljedeći izgled:

(9)

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	5	2	2
x_2	2	3	6
x_3	5	1	4

A \ B	y_1	y_2	y_3
x_1	-1	-2	-3
x_2	-3	-4	-1
x_3	-4	-5	-2

(10)

Promatranjem gornjih primjera matričnih igara može se zaključiti da protuprirodna igra ili igra protiv prirode je svaka igra kod koje se unaprijed zna koji igrač dobiva, a koji gubi. Tako u matričnoj igri (9) igrač A uvijek dobiva, dok igrača B možemo smatrati kao prirodu. Prema matričnoj igri (10) igrač B uvijek dobiva, a igrač A se smatra prirodom. Iako se zna ishod igre takve igre se ipak odigravaju odnosno teorija igara pruža način izračunavanja vrijednosti igre svojim metodama. No, prema mnogim autorima takve igre je bolje promatrati s aspekta teorije odlučivanja i metoda odlučivanja. Sikavica i ostali (2014) predlažu promatranje takvih igara kroz tri kriterija: Laplaceov, Hurwiczov i Savageov kriterij.

Laplaceov kriterij predstavlja praktičnu metodu odlučivanja o odabiru strategije u uvjetima rizika. Takav kriterij računa očekivanu vrijednost igre dajući svim ishodima jednaku vjerojatnost odabira. Igrač izabire onaj red za koji vrijedi uvjet (Barković, 2001):

$$\max_{i} \left[\frac{1}{n}c_{i1} + \frac{1}{n}c_{i2} + \cdots + \frac{1}{n}c_{in}\right]$$

tj. odabire se red za koji je očekivani dobitak maksimalan. Za matričnu igru (9), gdje svaka strategija ima vjerojatnost odabira $\frac{1}{3}$, Laplaceov kriterij iznosi:

- za prvi red: $\frac{5+2+2}{3} = 3$
- za drugi red: $\frac{2+3+6}{3} = 3{,}67$
- za treći red : $\frac{5+1+4}{3} = 3{,}33$

Temeljem Laplaceovog kriterija najbolja strategija je x_2 jer donosi najveći dobitak.

Hurwiczov kriterij ili kriterij realizma uvažava optimizam igrača koji se označava brojem α gdje je $0 \leq \alpha \leq 1$. Ovaj kriterij za svaku strategiju (svaki red i) traži najmanju isplatu (oznaka a_i) i onu najveću isplatu (oznaka A_i). Tada se bira onaj red kojem odgovara uvjet (Barković, 2001):

$$\max_i \, [\, \alpha A_i + (1-\alpha) a_i \,].$$

Hurwiczov kriterij ($\alpha = 0{,}5$) za matričnu igru (9) iznosi:

- za prvi red: $0{,}5 * 5 + 0{,}5 * 2 = 3{,}5$
- za drugi red: $0{,}5 * 6 + 0{,}5 * 2 = 4$
- za treći red: $0{,}5 * 5 + 0{,}5 * 1 = 3$

Igrač A odabire najveću vrijednost i pripadnu strategiju, a to je u ovom slučaju strategija x_2.

Savageov kriterij ili kriterij minimalnog žaljenja je pristup donošenju odluka u kojem se mjeri oportunitetni trošak, odnosno žaljenje za svaku moguću strategiju. Ovaj kriterij zahtijeva izradu nove matrice s elementima A_{ij} koji odražavaju razliku između maksimalnog dobitka određene strategije $\max_j c_{ij}$ i onog efektivno realiziranog dobitka c_{ij}, odnosno vrijedi $A_{ij} = \max_j c_{ij} - c_{ij}$. Napomena, vrijednost A_{ij} se računa po stupcima (j). Igrač bira onaj red $\min \left[\max_j A_{ij} \right], i = 1,2,\dots,m \;\; j = 1,2,\dots,n$ za koje je maksimalno „žaljenje“ minimalno (Barković, 2001). Savageov kriterij za matričnu igru (9) kreira novu matricu, takozvanu matricu žaljenja, s novim vrijednostima strategija:

$$\begin{array}{llll} x_1 & 0 & 1 & 4 \rightarrow max: 4 \\ x_2 & 3 & 0 & 0 \rightarrow max: 3 \\ x_3 & 0 & 2 & 2 \rightarrow max: 2 \end{array}$$

Dakle, igrač A će birati strategiju x_3 jer je njezino maksimalno žaljenje minimalno. Vidljivo je iz primjera da primjena pojedinih kriterija daje različite optimalne strategije.

4.3.2.Kontradiktorna igra

Kao poseban slučaj matričnih igara javljaju se kontradiktorne igre. Kontradiktorna igra je svaka matrična igra kod koje se broj strategija jednog igrača smanjuje na 1, a drugom igraču preostaje više strategija (Dobrenić, 1978). Takve igre najčešće nastaju reduciranjem matričnih igara bilo uklanjanjem dominantnih ili duplikatnih strategija igrača. Dakle, kontradiktorna igra je svaka igra čiji rang se smanjuje ispod $2x2$.

Primjer kontradiktorne matrične igre dobivene redukcijom strategija:

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} \backslash \mathbf{B} & \boldsymbol{y_1} & \cancel{\boldsymbol{y_2}} \\ \hline \boldsymbol{x_1} & \mathbf{-2} & \cancel{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{x_2} & \mathbf{-3} & \cancel{\mathbf{2}} \end{array} \tag{11}$$

Uklanjanjem dominantne strategije y_2 rang matrične igre (11) smanjuje se na rang $2x1$ čime igra postoje kontradiktorna. U takvoj igri igraču B je preostala za igrati samo jedna strategije y_1, dok igrač A može birati između svoje dvije strategije. No, igrač B time može biti zadovoljan jer s takvom strategijom uvijek dobiva neovisno o odabranoj strategiji igrača A. Prethodna igra ujedno sliči potezima u šahu kada niti jedna obrana drugog igrača nije moguća. Igrač B napada strategijom y_1 „kralja“ igrača A koji se istovremeno nalazi u mat poziciji čime se postiže „šah-mat“.

5. Linearno programiranje

Nakon upoznavanja s temeljnim pojmovima i vrstama matričnih igara, ovo poglavlje rada koncentrirat će se na rješavanje matričnih igara linearnim programiranjem. Postoji nekoliko metoda za rješavanje matričnih igara, a odabir pojedine zavisi o raspoloživom broju strategija igrača određene igre. Analitički postupak upotrebljava se kada svaki od igrača ima na raspolaganju 2 strategije, tj. kod matričnih igara ranga $2x2$. Navedenim postupkom vrijednost odigravanja strategija igrača izračunava se pomoću supstitucije tako da se jedna strategija nekog igrača zamjenjuje matričnim vrijednostima strategija drugog igrača. Vrijednost igre analitičkim postupkom dobiva se sumiranjem umnožaka vrijednosti iz matrice i dobivenih vrijednosti odigravanja strategija. Također, postoji i grafičko rješavanje koje se koristi kod matričnih igri ranga $2x2$, $mx2$ ili $2xn$. Takav način rješavanja zasniva se na promatranju očekivanih dobitaka nekog igrača kao pravca u koordinatnom sustavu u ravnini. Za igrača A vrijednost igre nalazi se u području iznad svih pravaca i u njemu najniža točka, dok se za igrača B vrijednost igre određuje u području ispod svih pravaca i u njemu najviša točka. Od poznatijih metoda postoji još provjera sedla i redukcija matrične igre uklanjanjem dominantnih strategija (Dobrenić, 1978). Ukoliko matrična igra ranga mxn, gdje svaki igrač ima na raspolaganju više od dvije strategije, ne sadrži sedlo i ne može se svesti redukcijom na manji rang igre, tada se kao najbolja metoda za rješavanje takve vrste igre javlja linearno programiranje i upotreba simpleks algoritma. Jednostavniji problemi prikazani preko matričnih igara najčešće se rješavaju uz pomoć grafičke i analitičke metode. Kompleksniji problemi (mogu se i jednostavniji) rješavaju se svođenjem na problem linearnog programiranja, odnosno primjenom simpleks algoritma.

5.1. Definiranje linearnog programiranja

Linearno programiranje predstavlja skup metoda i postupaka čija je glavna karakteristika univerzalna primjena u različitim područjima znanosti i društvenih djelatnosti. Djelatnosti poput planiranja nabave, proizvodnje, transporta i prodaje koriste linearno programiranje kao tehniku za raspoređivanje ili upotrebljavanje ograničenih sredstava kako bi se dobila njihova najbolja upotrebljivost s unaprijed definiranim ciljem poput ostvarenja minimalnih troškova ili maksimalnih prihoda (Dobrenić, 1974). Takva definicija upotrebljava se u ekonomskom promatranju linearnog programiranja, dok se sama tehnika linearnog programiranja zasniva na načelima matematike. U matematičkom smislu Kreko (1966) definira linearno programiranje kao specijalan slučaj programiranja kada se funkcija cilja i njezina ograničenja mogu izraziti linearnim matematičkim relacijama. Dakle, problem linearnog programiranja temelji se na linearnoj funkciji cilja, a njezina ograničenja izražena su u obliku linearnih jednadžbi ili nejednadžbi. Nadalje, Kalpić & Mornar (1996) za rješavanje problema linearnog programiranja navode kako je potrebno za zadanu funkciju cilja koja se sastoji od n strukturnih varijabli pronaći ekstrem optimuma (minimum ili maksimum) uz uvjet da pritom budu zadovoljena sva postavljena ograničenja na strukturne varijable. Shodno tome optimum funkcije cilja uvijek se nalazi u području definiranim sustavom linearnih jednadžbi i nejednadžbi.

Za rješavanje problema linearnog programiranja potrebno je prvo postaviti matematički model koji se sastoji od prethodno spomenute funkcije cilja i njezinih ograničenja (jednadžbi, nejednadžbi i uvjeta nenegativnosti). Linearno programiranje koristi matematičke izraze čijim međusobnim slaganjem i povezivanjem nastaju potrebni matematički modeli za rješavanje problema linearnog programiranja (Dobrenić, 1974). Struktura i oblik matematičkih modela zavise o promatranom problemu. Svaki problem ima svoju funkciju cilja koja može biti usmjerena na maksimizaciju (prihoda, proizvodnje, prodaje, itd.) ili minimalizaciju (troškova, zaliha, itd.). Iz prethodnog proizlazi da svaki problem linearnog programiranja je ili problem za maksimum ili problem za minimum. Kalpić & Mornar (1996) s matematičkog stajališta razlikuju tri osnovna tipa problema linearnog programiranja:

- standardni problem,
- kanonski problem i
- opći problem.

Standardni problem je najčešći oblik u kojem se zadaje problem linearnog programiranja. Takav oblik se sastoji od funkcije cilja (može težiti maksimumu ili minimumu) i skupa ograničenja, kao i uvjeta nenegativnosti svih varijabli funkcije cilja. Standardni oblik problema može se lako prepoznati po ograničenjima koja su nejednadžbe tipa „≤“ ili „≥“. Kod rješavanja problema linearnog programiranja često je potrebno pretvoriti jedan oblik problema u drugi kako bi se mogao primijeniti odabrani postupak rješavanja problema. Najčešće se tako javlja transformacija standardnog problema u kanonski oblik koji je potreban ukoliko problem želimo riješiti simpleks algoritmom. Kanonski oblik problema karakteriziraju ograničenja predstavljena u obliku jednadžbi „=“. Shodno tome potrebno je svesti sustav nejednadžbi standardnog oblika problema u sustav jednadžbi kanonskog oblika problema uz pomoć dopunskih varijabli. Više o ovoj transformaciji problema slijedi u sljedećem potpoglavlju rada. Kao treći oblik spominje se opći problem linearnog programiranja u kojem su ograničenja izražena sustavom jednadžbi i nejednadžbi. Također, opći oblik problema može se lako svesti na kanonski oblik korištenjem ponovno određenih transformacija nad zadanim ograničenjima. Upravo iz mogućnosti transformiranja jednog oblika problema u drugi može se vidjeti i dokazati univerzalnost primjene linearnog programiranja za rješavanje problema u mnogim djelatnostima.

Ovaj rad zasniva se na transformiranju matrične igre u linearni problem, a gdje je nadalje potrebno pretvoriti početni standardni u kanonski oblik problema kako bi se on riješio simpleks algoritmom. S ciljem boljeg kasnijeg razumijevanja terminologije i prikaza problema u daljnjem tekstu rada prikazat će se i objasnit samo općeniti matematički prikazi problema za maksimum linearnog programiranja, dok prikaz oblika problema za minimum će se detaljnije opisati u zadnjem poglavlju. Standardni oblik problema linearnog programiranja u kojem se funkcija cilja maksimizira, može se matematički zapisati na sljedeći način (Neralić, 2003):

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \qquad (12)$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \qquad (13)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \qquad (14)$$

Prikazana funkcija cilja (12) $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koja se u ovom primjeru maksimizira izražena je linearno uz pomoć koeficijenta funkcije cilja $c_j,\ j = 1,2,\dots,n$ i strukturnih varijabli $x_j,\ j = 1,2,\dots,n$. Nadalje, ograničenja funkcije cilja (13) izražena su u obliku linearnih nejednadžbi tipa „≤“ s koeficijentima $a_{ij},\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$ uz strukturne varijable, dok se na desnoj strani nalaze koeficijenti $b_i,\ i = 1,2,\dots,m$ kojima se često u problemima označava kapacitet ili resursi. Na kraju su prikazana ograničenja nenegativnosti strukturnih varijabla (14) koja moraju biti zadovoljena. Cjelokupni prethodni zapis problema može se zapisati kraće kao

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (15)$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \ \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \qquad (16)$$

Dobrenić (1974) navodi kako suma umnožaka svih n varijabli ne smije prijeći količinu b_i, dok je određenom broju koeficijenata a_{ij} dozvoljeno imati vrijednost nula. Važno je naglasiti da su sva ograničenja koja se javljaju kod zapisa nekog problema linearna, odnosno izraz „linearni“ temelji se na prikazu svakog ograničenja kao pravca poput $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

Linearno programiranje, prema Neralić (2003), leži na teoremu dualnosti. Prema tom teoremu, ako su originalni (primalni) problem i njegov dual mogući, tada oba imaju optimalna rješenja i vrijednosti optimalnih rješenja su jednake. Dualni problem sastoji se od istih podataka koji su zadani u primalu, no malo drugačijim redoslijedom. Naime, za svako ograničenje iz primala dodaje se varijabla $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ u dualu. Nadalje, koeficijenti $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ koji se nalaze na desnoj strani uvjeta ograničenja primala postaju koeficijenti funkcije cilja z' duala, dok će koeficijenti $c_j,\ j = 1,2, \dots, n$ funkcije cilja primala postati koeficijenti na desnoj strani uvjeta ograničenja duala. Također, znak „≤“ u ograničenjima primala se mijenja u znak „≥“ u ograničenjima duala (Neralić, 2003). Sljedeća tablica prikazuje usporedbu primala (standardnog problema za maksimum) i dobivenog duala (standardnog problema za minimum) kako bi se prethodno napisano što bolje shvatilo i uočilo.

Tablica 3. Usporedba primarnog problema i njegovog duala

Primalni problem (primal)	**Dualni problem (dual)**
$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max$	$z' = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \rightarrow min$
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$	$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$	$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_m$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0.$

(Izvor: prilagođeno prema Dobrenić (1974))

Promatrajući tablicu 3. može se zaključiti da redovi primala postaju stupci duala, dok dobiveni dualni problem odgovara standardnom problemu linearnog programiranja za minimum. Također, ako se u originalu radi o problemu minimuma, dualni problem će biti problem maksimuma. Dualitet ima važnu ulogu u linearnom programiranju jer izračunata vrijednost primalnog problema odgovara vrijednosti dualnog problema. Dakle, potrebno je izračunati vrijednosti samo primala problema, a ne i duala jer se one dobiju prvobitnim rješavanjem primala. Dual se često koristi u analizama kako bi se ispitala ograničenja pojedinih kapaciteta i resursa, odnosno daje drugačiji pogled na primalni problem. Razlog spominjanja dualiteta vidjet će se kasnije u radu gdje se temeljem svedene matrične igre na standardni linearni problem jednog igrača može definirati dualni problem, odnosno standardni problem drugog igrača. Na taj način potrebno je izračunati matričnu igru samo za jednog igrača jer prema teoremu dualnosti dobivene vrijednosti odgovaraju i drugom igraču.

5.2. Simpleks algoritam

Probleme linearnog programiranja moguće je rješavati nizom metoda ovisno o području u kojem se javljaju. Dobrenić (1974) svrstava sve metode linearnog programiranja u dvije osnovne skupine pa tako postoje:

- opće metode za rješavanje linearnog programiranja i
- metode razvijene za rješavanje specifičnih problema linearnog programiranja.

U opće metode spada i sama simpleks metoda koja do danas broji nekoliko varijanata za rješavanje svih vrsta problema što ju čini iznimno učinkovitom i poznatom u svijetu linearnog programiranja. S druge strane, postoje neki specifični problemi poput problema transporta, problema nabave, alokacije resursa i slično. Za rješavanje takvih vrsta problema postoje posebno osmišljene metode koje su efikasnije, a ujedno i brže od same simpleks metode.

Simpleks metoda razvila se 1947. godine kada je G. B. Dantzig utvrdio da se problemi usklađivanja resursa koji se javljaju u velikim organizacijama mogu upotrijebiti i u vojne potrebe. Neralić (2003) navodi kako je simpleks metoda opća, iterativna i konačna metoda za rješavanje problema linearnog programiranja. Karakteristika općenitosti metode zasniva se na mogućnosti rješavanja bilo kojeg problema ili barem utvrđivanja da za određeni problem ne postoji optimalno rješenje. Nadalje, karakteristika iterativnosti govori da simpleks metoda provodi niz iteracija (koraka složenih operacija) počevši od baznog mogućeg rješenja pa sve do optimalnog rješenja ukoliko ono postoji. Na karakteristiku iterativnosti veže se karakteristika konačnosti prema kojoj simpleks metoda uvijek sadrži konačan broj koraka prilikom rješavanja određenog problema. Važno je ovdje diferencirati simpleks metodu i simpleks algoritam. Autori se u literaturi više oslanjaju na pojam simpleks metode koji obuhvaća cjelokupni postupak rješavanja, od definiranja problema do primjene samog simpleks algoritma. Dakle, simpleks metoda sadržava simpleks algoritam no glavna razlika je ta da simpleks metoda polazi od standardnog problema u linearnom obliku, dok simpleks algoritam kreće od kanonskog oblika problema. Također, simpleks algoritam je taj koji se sastoji od niza iteracija i zapravo on čini veliki dio simpleks metode.

U prethodnom potpoglavlju opisan je općeniti standardni problem linearnog programiranja za maksimum s funkcijom cilja (12), uvjetima ograničenja (13) i uvjetima nenegativnosti (14). Kako bi se simpleks algoritam mogao primijeniti potrebno je standardni oblik problema svesti na kanonski oblik problema. To je ujedno i prva faza simpleks metode, svođenje sustava nejednadžbi na sustav jednadžbi uz pomoć dopunskih varijabli. Definirani standardni problem za maksimum u punom zapisu (12, 13 i 14) svodi se na općeniti kanonski oblik, prilagođeno prema Dobrenić (1974), kao

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+i}) \to max \tag{17}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \quad \vdots \qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+i} &= b_m \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+i} \geq 0. \end{gathered} \tag{19}$$

U skraćenom zapisu kanonski oblik problema poprima izgled kao

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz uvjete ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \ x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{n+i} \ \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Prethodni matematički zapisi transformacije standardnog oblika u kanonski oblik karakterizira nekoliko promjena. Prva promjena događa se u funkciji cilja (17) gdje se dodaju dopunske varijable s oznakom x_{n+i} (pojedini autori označavaju ih oznakom u). Takve varijable u problemima predstavljaju neiskorištene resurse koji ne daju nikakav prihod, odnosno ne stvaraju nikakav trošak. Stoga u funkciji cilja dopunske varijable poprimaju koeficijent nula čime ne utječu na konačnu vrijednost problema, a samim time mogu se izostaviti i kod pisanja. Najbitnija promjena događa se kod promijene operatora „≥“ i „≤“ u operator „=“ u uvjetima ograničenja (18). Naravno, ovdje je razlog zašto su se dodale prethodno spomenute dopunske varijable x_{n+i} svakoj nejednadžbi. Vidljivo je da se u uvjetima ograničenja (13) dozvoljava da lijeva strana nejednadžbi bude manja ili jednaka desnoj strani. Uvođenjem dopunskih varijabli lijevoj strani, a koje pritom predstavljaju dozvoljeni manjak, lijeva strana postaje jednaka desnoj strani (18). Naravno, uz uvjet da se dopunskim varijablama mogu dodijeliti samo nenegativne vrijednosti (19). (Dobrenić, 1974)

Nakon uspješnog pretvaranja standardnog oblika problema u kanonski, dobiva se sustav linearnih jednadžbi koji se sastoji od m jednadžbi i $m + n$ nepoznanica. Rješenje takvog sustava koje sadrži dopunske varijable naziva se prošireno rješenje, dok se prošireno vršno rješenje naziva bazičnim rješenjem (Kalpić & Mornar, 1996). Bazično rješenje je zapravo svako rješenje u kojem se ne nalazi više nego li m pozitivnih vrijednosti varijabli, odnosno broj pozitivnih vrijednosti varijabli mora biti jednak broju nezavisnih jednadžbi ograničenja. Na početku bilo kojeg problema svaka strukturna varijabla posjeduje vrijednost nula ($x_j = 0$) prema čemu ne postoji bazično rješenje. Upravo iz tog razloga kanonskom obliku dodaju se dopunske varijable (x_{n+i}) kojih ima onoliko koliko i jednadžbi ograničenja, a njihove vrijednosti odgovaraju vrijednostima raspoloživih resursa, tj. ograničenja ($x_{n+i} = b_i$, b_i su uvijek pozitivne vrijednosti). Uvrštavanjem prethodno spomenutih vrijednosti strukturnih i dopunskih varijabli u funkciju cilja (17) dobiva se da je ona jednaka nuli, tj. $z = 0$. Na taj način zadovoljen je uvjet za postojanje bazičnog rješenja, a ujedno je time završena prva faza simpleks metode i može se krenuti s prvom fazom simpleks algoritma. Prva faza simpleks algoritma zahtijeva pronalaženje početnog baznog mogućeg rješenja kako bi se u njemu moglo kasnije tražiti optimalno rješenje. Dakle, po pravilu već gore opisani kanonski oblik (17, 18 i 19) predstavlja jedno bazično rješenje jer je broj pozitivnih (dopunskih) varijabli jednak broju m, odnosno broju jednadžbi ograničenja. Valja zaključiti da gotovo svaki kanonski oblik već sadrži početno bazično rješenje. Takvo početno bazično rješenje uvijek je jako udaljeno od onog optimalnog rješenja, no predstavlja temelj za drugi korak simpleks algoritma koji se bavi poboljšanjem početnog bazičnog rješenja. (Dobrenić, 1974)

U drugom koraku simpleks algoritma stvara se početna simpleks tablica u koju se smještaju oznake varijabli i vrijednosti njihovih koeficijenata iz kanonskog oblika. Primjer početne tablice simpleks algoritma za standardni problem maksimuma dan je preko tablice 4. U prvi stupac te tablice upisuju se koeficijenti iz jednadžbe funkcije cilja (oznaka c_j) u kanonskom obliku (17). U drugom stupcu nalaze se sve varijable koje se nalaze u bazičnom rješenju zajedno sa svojim vrijednostima u stupcu „Količina“. Dopunske varijable (x_{n+1}), kako je u prethodnom odlomku opisano, su te koje čine početno bazično rješenje zajedno sa dodijeljenim vrijednostima ograničenja (b_i). Nadalje, u srednjem dijelu tablice uvrštava se matrica reda $m * n$ input-output koeficijenata (a_{ij}) koji se nalaze uz strukturne varijable u ograničenjima problema (18). U krajnjem desnom dijelu tablice nalazi se jedinična matrica također reda $m * n$. Posljednji red „$Z_j - c_j$“ predstavlja red optimalnosti jer sadrži optimalna rješenja određenog problema. Analogno tome, uz dodatak artificijalnih varijabli stvara se kanonski oblik problema za minimum, a ujedno i njegova tablica.

Tablica 4. Početna tablica simpleks algoritma za standardni problem maksimuma

c_j	Bazično rješenje		Strukturalne varijable	Dopunske varijable
	Varijabla	Količina	x_1 x_2 …… x_n	x_{n+1} x_{n+2} …… x_{n+i}
0	x_{n+1}	b_1	a_{11} a_{12} …… a_{1n}	1 0 …… 0
0	x_{n+2}	b_2	a_{21} a_{22} …… a_{2n}	0 1 …… 0
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
0	x_{n+i}	b_m	a_{m1} a_{m2} …… a_{mn}	0 0 …… 1
$Z_j - c_j$		0	$-c_1$ $-c_2$ …… $-c_n$	0 0 …… 0

(Izvor: prilagođeno prema Dobrenić (1974))

Prethodna tablica je zapravo onaj pravi početni korak simpleks algoritma kod rješavanja bilo kojeg problema linearnog programiranja. Takve simpleks tablice, prema Kreko (1966), imaju uvijek tri zajedničke osobine:

1. Početna numerička vrijednost dodatnih varijabla naznačenih u drugom stupcu uvijek će biti jednaka početnim ograničenjima koja se nalaze u trećem stupcu.

2. U posljednjem redu „$Z_j - c_j$“ svi koeficijenti strukturnih varijabli iz funkcije cilja dobivaju negativni predznak.
3. Optimalna rješenja, odnosno vrijednosti strukturalnih i dopunskih varijabli dobivaju se u drugom stupcu i u redu „$Z_j - c_j$“.

Dobiveno polazno rješenje, odnosno simpleks tablica je praktički neprihvatljiva jer sadrži dopunske umjesto strukturnih varijabla. To bi značilo na primjeru optimiziranja proizvodnje da svi strojevi stoje bez da se išta proizvodi (Dobrenić, 1974). Dakle, takvo rješenje je zasigurno potrebno poboljšati što se radi u drugoj fazi simpleks algoritma.

Druga faza simpleks algoritma ima definirani konačni niz iteracija kojima se postiže optimalno rješenje. Pritom se svaka iteracija nadalje sastoji od konačnog broja koraka. Tako Dobrenić (1974) navodi da se svaka iteracija sastoji od:

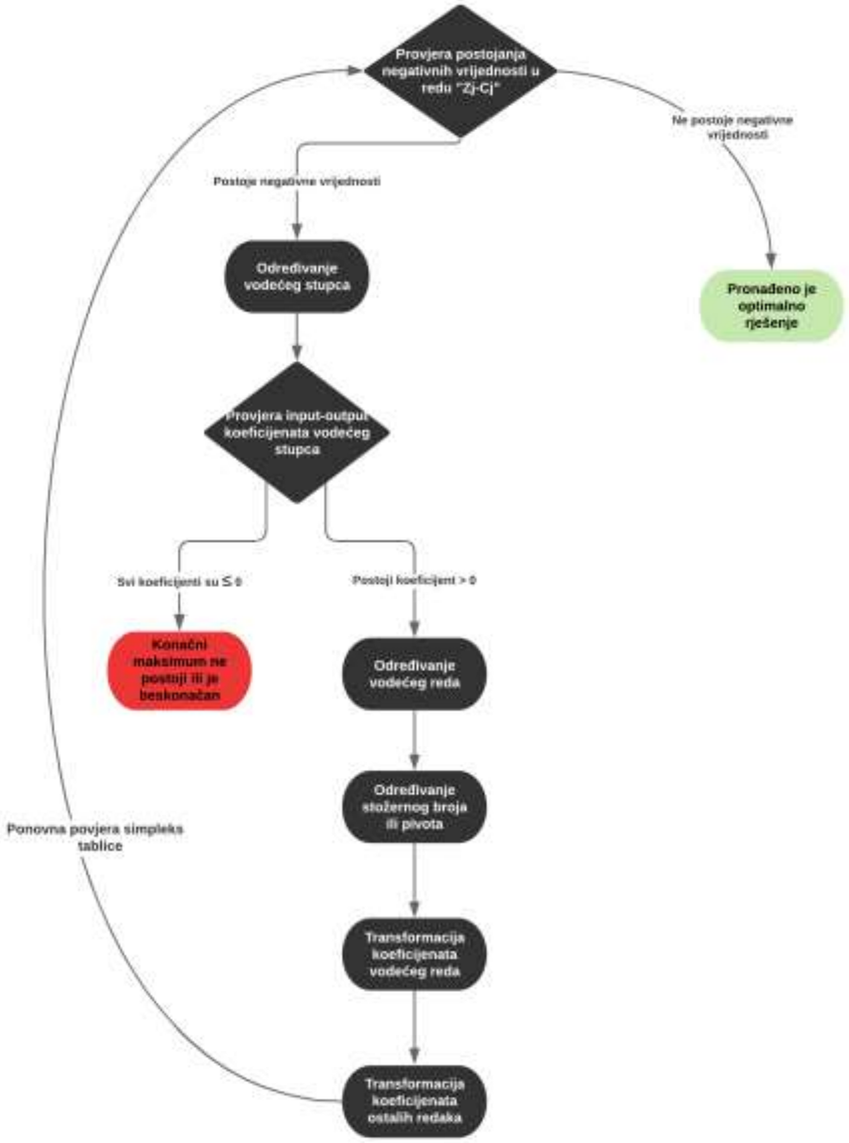
1) određivanja vodećeg stupca,
2) određivanja vodećeg reda,
3) transformacije koeficijenata simpleks tablice,
   a. transformacije koeficijenata vodećeg reda i
   b. transformacije koeficijenata ostalih redova.

Temeljem formirane simpleks tablice iz prve faze simpleks algoritma, druga faza započinje provjerom optimalnosti trenutnog baznog rješenja u tablici. Optimalno rješenje je postignuto ukoliko se u redu „$Z_j - c_j$“ ne pojavljuju vrijednosti manje od nule. Takvo rješenje se više ne može poboljšati i tada simpleks algoritam staje. U slučaju da u redu „$Z_j - c_j$“ postoje negativne vrijednosti potrebno je odrediti vodeći stupac. Vodeći stupac u simpleks tablici postaje onaj stupac u kojem postoji po apsolutnoj vrijednosti najveći negativni broj.

Sljedeći važan korak je provjera input-output koeficijenata u prethodno određenom vodećem stupcu. Ukoliko su svi koeficijenti stupca manji ili jednaki nuli tada za problem maksimuma koji se rješava ne postoji konačni maksimum ili je njegov maksimum beskonačan. Ukoliko u stupcu postoje koeficijenti koji su veći od nule, tada vodeći red postaje onaj koji posjeduje minimalni izračunati kvocijent $\frac{b_i}{a_{ij}}$, za svaki $a_{ij} > 0$.

U svakoj iteraciji simpleks algoritma treba odabrati jednu baznu varijablu i jednu koja postaje nebazna varijabla. Takve varijable se zapravo nazivaju ulazna nebazna i izlazna bazna varijabla. Kalpić & Mornar (1996) objašnjavaju kako je ulazna nebazna varijabla ona koja ulazi u bazno rješenje, a njome se najviše popravlja ili bolje rečeno povećava vrijednost funkcije cilja. S druge strane, varijabla koja pak izlazi iz baznog rješenja naziva se izlazna bazna varijabla, a bira se s ciljem kako bi sve preostale bazne varijable zadržale svojstvo nenegativnosti. Shodno tome, određivanjem vodećeg stupca zapravo se određuje ulazna nebazna varijabla, dok se određivanjem vodećeg reda određuje izlazna bazna varijabla.

Određivanjem vodećeg reda i vodećeg stupca ujedno se lako odredi stožerna vrijednost ili element. Stožerni element je broj u kojem se križaju vodeći stupac i vodeći red. Pomoću njega radi se transformacija koeficijenata vodećeg reda što označava dijeljenje koeficijenata vodećeg reda sa stožernim elementom. Nadalje se radi transformacija ostalih koeficijenata u simpleks tablici na način da se od svake vrijednosti koeficijenta oduzme umnožak broja koji se nalazi na križanju stupca promatranog koeficijenta i vodećeg reda te broja koji se nalazi na križanju reda promatranog koeficijenta i vodećeg stupca. Sve vrijednosti unose se u novu simpleks tablicu koja predstavlja izvršenu prvu iteraciju simpleks algoritma. Nova tablica provjerava se ponovno s obzirom na postojanje optimalnog rješenja. Ukoliko se ono javi tada simpleks algoritam staje, dok u suprotnom počinje nova simpleks iteracija. Cjelokupni prethodni opis iteracije simpleks algoritma za problem maksimuma prikazan je na sljedećoj slici preko bloka dijagrama toka.



Slika 2. Blok dijagram simpleks algoritma za problem maksimuma linearnog programiranja
(Izvor: prilagođeno prema Dobrenić (1974))

5.3. Svođenje igre na linearni problem

Na početku ovog poglavlja napisano je kako se bilo koji tip matrične igre može riješiti uz pomoć linearnog programiranja. Nakon upoznavanja s linearnim programiranjem i simpleks algoritmom sada se napokon može opisati svođenje matrične igre na linearni problem kako bi se kasnije riješila simpleks algoritmom. No, prije početka svođenja potrebno je matematički definirati nekoliko stvari uz pomoć sljedeće općenite matrice plaćanja.

$$
\begin{array}{c c|c c c c}
 & & & \textbf{Igrač B} & & \\
 & \mathbf{A} \backslash \mathbf{B} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} & \cdots & \boldsymbol{y_n} \\
\hline
 & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\
 & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\
\textbf{Igrač A} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \boldsymbol{x_m} & \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}}
\end{array}
\tag{20}
$$

gdje je

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Prema matrici plaćanja (20) pretpostavimo da postoji igrač A sa strategijama $i = 1, 2, \dots, m$ te da postoji igrač B sa strategijama $j = 1, 2, \dots, n$ zajedno s definiranim plaćanjima svakog igrača a_{ij}. Pritom x_i predstavlja vjerojatnost da će se igrač A koristiti strategijom i, dok oznaka y_j predstavlja vjerojatnost da će igrač B koristiti strategiju j. S obzirom na vjerojatnost odigravanja pojedine strategije, svaki igrač određuje svoj plan odigravanja igre. Igrač A svoj plan igre određuje tako da svojim strategijama pridruži vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_m$ za koje obavezno moraju vrijediti uvjeti

$$
\begin{gathered}
x_i \ \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Analogno prethodnomu, igrač B pridružuje vjerojatnosti odigravanja $y_1, y_2, \dots, y_n$ svojim strategijama uz pritom zadovoljene uvjete

$$
\begin{gathered}
y_j \ \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Dobivanjem plana igre $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ za igrača A i plana igre $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ za igrača B dobivene su takozvane mješovite strategije tih igrača. Svaki igrač tijekom igre bira strategiju iz tog skupa mješovitih strategija na neki slučajan način, odnosno temeljem kretanja distribucije vjerojatnosti. Za igre s mješovitim strategijama očekivani dobitak igrača jednak je

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, a_{ij} y_j, \tag{23}$$

pri čemu je a_{ij} dobitak pojedinog igrača ukoliko igrač A igra strategiju i, a igrač B igra strategiju j. Relacija (23) je bilinearna jer prikazuje prosječni očekivani dobitak za oba igrača ako bi se igra igrala mnogo puta. Važno je naglasiti još da će igrač A birati onu optimalnu mješavinu strategija koja mu osigurava najveći dobitak (maksimizira minimalni očekivani dobitak), bez obzira koju će strategiju koristiti igrač B. Vrijednost očekivanog dobitka takvih strategija za igrača A naziva se donja vrijednost igre, a označuje se s V_A. S druge strane, igrač B će birati onu optimalnu mješavinu strategiju koja mu osigurava najmanji mogući očekivani gubitak (minimizira maksimalni očekivani gubitak), bez obzira kojom se strategijom koristi igrač A. Takva vrijednost naziva se gornja vrijednost igre, a označuje se s V_B. (Neralić, 2003)

Time su definirane početne značajke i ograničenja matrične igre koje moraju biti zadovoljene iz perspektive linearnog programiranja. Sada će se, uglavnom prema Neralić (2003), pokazati kako se igra dvaju igrača sa sumom nula svodi na problem linearnog programiranja za oba igrača. U takvoj igri, mješovita strategija $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ igrača A je optimalna jedino ako je očekivani dobitak igrača dan relacijom (23) veći ili jednak njegovom minimalnom očekivanom dobitku (V_A - donja vrijednost igre).
Matematički se to zapisuje kao

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, a_{ij} y_j \geq V_A, \tag{24}$$

za sve mješovite strategije $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ igrača B. Samim time, relacija (24) mora vrijediti za sve strategije igrača B. Tako na primjer za $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ = (1, 0,…,0) dobiva se sljedeće

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) x_i &= \sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i \\ &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \\ &\geq V_A \end{aligned} \tag{25}$$

Raspisivanjem svih strategija igrača B preko relacije (24) dobiva se sustav nejednadžbi kao

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m &\geq V_A \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m &\geq V_A \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m &\geq V_A \end{aligned} \tag{26}$$

Međutim, gornjoj relaciji (26) koja predstavlja ograničenja problema linearnog programiranja treba dodati dodatna ograničenja kojima se osigurava da su vrijednosti $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vjerojatnosti. Zbog toga se uvode sljedeća ograničenja

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \ ili \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{27}$$

$$x_i \ \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m. \tag{28}$$

Shodno tome, bilo koje rješenje $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ koje zadovoljava postavljena ograničenja (26), (27), (28) postaje optimalna mješovita strategija igrača A. No, ono što ne dostaje jest funkcija cilja za kompletiranje problema linearnog programiranja. Igrač A ima za cilj maksimizirati minimalni dobitak V_A, odnosno minimizirati vrijednost $\frac{1}{V_A}$ (razlog tome će se doznati kasnije) podjednako sa svakom od raspoloživih strategija uz zadana ograničenja. Na taj način za dobivanje optimalne mješovite strategija igrača A potrebno je riješiti sljedeći problem linearnog programiranja s funkcijom cilja:

$$Z = 1x_1 + 1x_2 + \cdots + 1x_m \ \rightarrow min \rightarrow 1$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m &\geq \ V_A \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m &\geq \ V_A \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m &\geq \ V_A \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1, \\ x_i \ \geq 0, i &= 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{29}$$

Analogno prethodnom načinu radi se i svođenje matrične igre na linearni problem za igrača B. Mješovita strategija $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ igrača B je optimalna jedino ako je očekivani dobitak igrača (23) manji ili jednak njegovom maksimalnom očekivanom gubitku (V_B - gornja vrijednost igre). Matematički se to zapisuje kao

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} y_j \leq V_B, \tag{30}$$

za sve mješovite strategije $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ igrača A. To znači da relacija (30) mora vrijediti za sve strategije igrača A. Tada se na primjer za strategiju $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ = (1, 0,…,0) dobiva

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i) y_j &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \\ &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ &\leq V_B \end{aligned} \tag{31}$$

Raspisivanjem relacije (31) za svaku strategiju igrača A također se dobiva sustav nejednadžbi. Takvim nejednadžbama potrebno je ponovno postaviti ograničenja linearnog problema kojima se osigurava da su vrijednosti $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vjerojatnosti. Zbog toga se uvode ograničenja

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1 \; ili \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \tag{32}$$

$$y_j \; \geq 0, j = 1\,,2, \dots, n. \tag{33}$$

Dakle, bilo koje rješenje $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ koje zadovoljava postavljena ograničenja (31), (32), (33) postaje optimalna mješovita strategija igrača B. Za razliku od igrača A, igrač B ima za cilj minimizirati maksimalni gubitak V_B, odnosno maksimizirati vrijednost $\frac{1}{V_B}$. Dobivanje optimalne mješovite strategija igrača B potrebno je riješiti sljedeći problem linearnog programiranja:

$$Z = 1y_1 + 1y_2 + \cdots + 1y_n \; \to max \to 1$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \leq \; V_B \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \leq \; V_B \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \leq \; V_B \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ y_j \; \geq 0, j = 1\,,2, \dots, n. \end{gathered} \tag{34}$$

Nakon svođenja matrične igre na linearni problem za oba igrača valja uočiti određene posebnosti. Kod pisanja ograničenja problema za igrača A uzimaju se vrijednosti iz stupaca, dok se za igrača B uzimaju vrijednosti iz redova matrice plaćanja. Prema napisanim problemima, odnosno relacijama (29) i (34) vidljivo je da se radi o standardnim problemima linearnog programiranja. Za igrača A vrijedi svođenje matrične igre na standardni problem za minimum, dok se za igrača B matrična igra svodi na standardni problem za maksimum. Također valja uočiti da su dobiveni problemi jedan drugom dualni, odnosno vrijedi opisani teorem dualiteta. Prema tome teoremu izračunato rješenje primarnog problema jednog igrača jednako je rješenju dualnog problema drugog igrača.

Kako bi se dobiveni standardni problem riješio simpleks algoritmom potrebno ga je prevesti u kanonski oblik. U nastavku slijedi prikaz transformacije dobivenog standardnog problema (34) za igrača B u kanonski oblik kako je to objašnjeno u prethodnom potpoglavlju. No, taj proces nije direktan, već je potrebno uvesti dodatne promjene u standardni problem. Naime, zbog nepostojanja ograničenja nenegativnosti na varijable V_A i V_B može se javiti da svi koeficijenti a_{ij} budu negativni ili nula. Stoga se javlja i mogućnost dijeljenja negativnih brojeva ili nule što u simpleks algoritmu nije dozvoljeno. Kako bi se to izbjeglo početna matrica plaćanja se transformira na način da se dodaje dovoljno velika konstanta d (diferencija) svim elementima (a_{ij}) čime svi elementi postanu nenegativni, odnosno pozitivni. Na taj način dobiva se nova matrica plaćanja kojom se osigurava da vrijednosti V_A i V_B budu veće od nule. Važno je na kraju izračuna ne zaboraviti na dodanu diferenciju jer se točna vrijednost igre izračunava oduzimanjem upotrjebljene konstante d od dobivene vrijednosti V_A ili V_B. Nakon dodavanja diferencije oznaka y_j se preimenuje u oznaku y'_j, a oznaka V_B u V'_B. Kako bi problem postao pretočio pravi standardni problem on mora poslije znaka „≤“ ili „≥“ imati neki broj. Poznato je da iznosi vjerojatnosti odigravanja svake strategije $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ moraju zajedno iznositi 100%, odnosno mora vrijediti $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$. Stoga je cilj na desnoj strani svih nejednadžba dobiti broj 1. Zato čitavu relaciju (34) pomnožimo s $\frac{1}{V'_B}$ čime se za igrača B dobiva sljedeći zapis oblika problema s diferencijom:

$$Z = \frac{y'_1}{V'_B} + \frac{y'_2}{V'_B} + \cdots + \frac{y'_n}{V'_B} \to max \to \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned}
a_{11}\frac{y'_1}{V'_B} + a_{12}\frac{y'_2}{V'_B} + \cdots + a_{1n}\frac{y'_n}{V'_B} &\le 1 \\
a_{21}\frac{y'_1}{V'_B} + a_{22}\frac{y'_2}{V'_B} + \cdots + a_{2n}\frac{y'_n}{V'_B} &\le 1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\
a_{m1}\frac{y'_1}{V'_B} + a_{m2}\frac{y'_2}{V'_B} + \cdots + a_{mn}\frac{y'_n}{V'_B} &\le 1 \\
\sum_{j=1}^{n} \frac{y'_j}{V'_B} &= 1, \\
\frac{y'_j}{V'_B} \ge 0, j &= 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{35}$$

Iz gornjeg zapisa može se vidjeti razlog maksimizacije funkcije cilja igrača B. Naime, cilj igrača B je minimizirati gubitak igre V_B, no to je isto što i maksimizirati njezinu recipročnu vrijednost $\frac{1}{V_B}$. Prethodno napisani problem dan relacijama (35) je dosta nepregledan i za lakše kasnije snalaženje i računanje u simpleks tablici radi se supstitucija svih varijabli $\frac{y'_j}{V'_B}$ s oznakom $\bar{y}_j$. Time dobivamo sljedeći supstituirani oblik problema

$$Z = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n \to max \to \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned}
a_{11}\bar{y}_1 + a_{12}\bar{y}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{y}_n &\le 1 \\
a_{21}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{y}_n &\le 1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{36}$$

$$a_{m1}\bar{y}_1 + a_{m2}\bar{y}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{y}_n \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 1,$$

$$\bar{y}_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Na kraju, da bi se problem mogao napokon upisati u simpleks tablicu i riješiti ga simpleks algoritmom, potrebno je dobiveni supstituirani oblik problema pretvoriti u kanonski oblik. Kao što je bilo rečeno, za transformiranje standardnog oblika problema u kanonski oblik potrebno je dodati onoliko dopunskih varijabli koliko ima nejednadžbi kako bi se nejednadžbe pretvorile u jednadžbe. Dopunske varijable nose oznaku $u_i, i = 1, 2, \dots, m$. Dakle, njihovim dodavanjem dobivamo sljedeći kanonski oblik problema:

$$Z = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n + 0(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) \rightarrow max \rightarrow \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{y}_1 + a_{12}\bar{y}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{y}_n + u_1 &= 1 \\ a_{21}\bar{y}_1 + a_{22}\bar{y}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{y}_n + u_2 &= 1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\bar{y}_1 + a_{m2}\bar{y}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{y}_n + u_m &= 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j &= 1, \\ \bar{y}_j \geq 0, j &= 1, 2, \dots, n, \\ u_i \geq 0, i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \tag{37}$$

Na taj način kompletirano je svođenje matrične igre za igrača B na kanonski linearni problem što omogućava njegovo rješavanje simpleks algoritmom. Uobičajeno je da se kod rješavanja matričnih igara pišu relacije standardnog (34), diferenciranog (35), supstituiranog (36) i u konačnici kanonskog oblika problema (37) kako bi se vidio cijeli postupak svođenja igre na linearni problem. Sličan postupak vrijedi i za igrača A, s tim da se tada radi o problemu linearnog programiranja za minimum koji se formira po stupcima matrice plaćanja kako bi se dobila željena relacija (29). Zapravo, kod traženja rješenja matrične igre primjenom linearnog programiranja dovoljno je odrediti kanonski oblik problema samo za jednog igrača. Na osnovu dobivenog rješenja problema određuje se optimalna strategija tog igrača, a temeljem dualnosti problema može se lako odrediti i optimalna strategija drugog igrača. Naime, optimalne vrijednosti dualnih varijabli $\bar{x}_i$ u ovom slučaju jednake su koeficijentima uz dopunske varijable u_i (Petrić, 1979). Sve prethodno opisano općenitim matematičkim izrazima biti će prikazano na realnom primjeru u sljedećim potpoglavljima.

5.4. Opis konkretnog problema

U ovom dijelu rada opisat će se konkretan primjer konfliktne situacije iz svakodnevnog života. Kroz opis problematike prikazat će se igra u tabličnom obliku sa strategijama i ishodima odigravanja istih strategija. Nadalje će se kvantificirati prethodno definirani ishodi koristeći se određenim elementima procjene kako bi se vidjelo koliko pojedina strategija donosi dobitak, odnosno gubitak svakom igraču. Na taj način će se konstruirati matrica plaćanja koja će poslužiti za prikaz svođenja igre na linearni oblik problema, ali i za prikaz simpleks algoritma. U konačnici, kao rezultat svega, odredit će se optimalne mješavine strategija svakog igrača kojom maksimizira svoju dobit, odnosno minimizira mogući gubitak.

Veliki vodovodi u cijeloj Hrvatskoj, pa tako i u Varaždinskoj županiji, uskoro bi trebali pripojiti one male. Naime, Ministarstvo zaštite okoliša i energetike je otvorilo javno savjetovanje o zakonima iz područja vodnoga gospodarstva, a glavne promjene očekuju iznimno disperzirane lokalne vodovode. Njihov bi se broj sa sadašnjih 180 trebao smanjiti na najviše 40. Prema tom novom zakonu varaždinski Varkom treba preuzeti sve lokalne vodovode koji nemaju status javnih vodovoda na području Varaždinske županije. Tako se primjer lokalnog sustava opskrbe može vidjeti na i području Grada Lepoglave gdje postoji oko 20-ak lokalnih vodovoda koji su nastali iz dogovora i vlastitog rada tamošnjih ljudi. Dakle, postojeće kilometre već položenih cjevovoda prema novom zakonu Varkom bi želio prisvojiti, dok najveći otpor tome zasad iskazuju građani Lepoglave čije je cijelo gradsko područje pokriveno lokalnim vodovodom. Varkom je svjestan da ga čeka ogroman posao kada krenu s pripajanjem lokalnih vodovoda zbog ljudi koji su spremni izaći na ulice kako bi to spriječili. Razlog buntovništvu građana Lepoglave nije nikakva tajna. Stanovnici tog grada plaćaju vodu mjesečno oko stotinjak kuna. S druge strane, nakon provedenog integriranja lokalnih vodovoda s Varkomom, kubični metar vode će svi potrošači plaćati u istom iznosu, a koji će za građane Lepoglave biti gotovo dvostruko veći od sadašnjega. Razlog tome su dodane usluge odvodnje i pročišćavanja otpadnih voda koje imaju različitu cijenu po aglomeracijama Varaždinske županije. Naravno, pobuna građana temelji se i na kvaliteti domaće vode koja definitivno postoji naspram Varkomove. Varkom je uvijek bio otvoren za suradnju prilikom preuzimanja lokalnih vodovoda posebice zbog troškova koji se pritom javljaju. Naime, Varkom smije puštati vodu iz svojih crpilišta u male lokalne vodovode isključivo ako su oni tehnički ispravni. Na lepoglavskom području to nije slučaj i morat će se izgraditi novi pri čemu bi ga djelomično trebao financirati i Grad Lepoglava. (Novak, 2019) Grad Lepoglava, kako govori dogradonačelnik, nema namjere davanja zajedničkih dobara na upravljanje privatnom kapitalu. Najpravednije je da zajedničkim dobrima, poput u ovom slučaju vodom, upravlja lokalna zajednica na najširoj osnovi, ali prema nekim pravilima struke i s punom odgovornošću. Neće se dozvoliti nikakva privatizacija i monopol javnih poduzeća koji se sada želi potiho nametnuti. Dakle, postoje i druga rješenja vezana uz ovo pitanje poput osnivanja vlastitog komunalnog poduzeća od strane Lepoglave i pokušaj suzbijanja mogućnosti davanja lokalnih vodovoda Varkomu.

Kroz prethodni opis konfliktne situacije mogu se vidjeti dva igrača, a to su Grad Lepoglava i Varkom. Također, mogu se raspoznati neke moguće strategije svakog igrača. Igrač Grad Lepoglava želi potpuno ili djelomično sačuvati vlasništvo nad vodovodima, stvoriti novo poduzeće zaduženo za komunalne poslove (stvaraju se nova radna mjesta, povećava se zadovoljstvo građana) i ostaviti približan iznos plaćanja koje građani imaju trenutačno. S druge strane, igrač Varkom želi dobiti vlasništvo nad lokalnim vodovodima, a time i nove korisnike te proširenje tržišta što omogućava stvaranje monopolske situacije u ovoj regiji (mogućnost povećanja cijena usluga). Sljedeća tablica opisuje i kvantificira (broj u zagradi) dobitke i gubitke svakog igrača stavljenih u međusoban odnos.

Tablica 5. Mogući dobitci i gubitci svakog igrača

Grad Lepoglava		Varkom d.d.
Dobitci:		**Gubitci:**
Očuvanje vlasništva vodovoda građana (+1)	=	Nemogućnost proširenja poslovanja na lepoglavske vodovode (-1)
Očuvanje broja vodovoda (+1)	=	Nemogućnost manipuliranja tuđim vodovodima (-1)
Očuvanje broja građana na trenutačnom vodovodu (+1)	=	Nema novog broja korisnika (priključaka) (-1)
Novo komunalno poduzeće (nova radna mjesta za građane) (+1)	=	Pojava nove konkurencije na tržištu - nema stvaranja monopola (-1)
Očuvanje približnih trenutačnih cijena (+1)	=	Bez monopola gubi se mogućnost povećanja cijena (-1)
Gubitci:		**Dobitci:**
Gubitak vlasništva nad vodovodima (-1)	=	Dobivanje vlasništva nad vodovodima (+1)
Zatvaranje većeg broja vodovoda (-1)	=	Zatvaranje onih nekorisnih vodovoda za poduzeće (+1)
Gubitak broja građana na trenutačnom vodovodu (-1)	=	Novi korisnici (priključci) u Varkomov vodovod (+1)
Ne otvara se komunalno poduzeće (ne stvaraju se nova radna mjesta) (-1)	=	Povećanje tržišnog udjela – pojava monopola (+1)
Veće cijene komunalnih usluga za građane (-1)	=	Mogućnost povećanja cijena usluga (+1)

(Izvor: vlastita izrada autora)

Problematika igre prikazana preko prethodne tablice čini ovu igru nula suma igrom gdje je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača. Devet ishoda, kao posljedice mogućeg odabira pojedine strategije svakog igrača, prikazani i opisani su u sljedećoj tablici.

Tablica 6. Opis posljedica odabranih strategija

		Varkom d.d.		
		Agresivno preuzimanje vodovoda	**Pregovaranje s „figom u džepu“**	**Bježanje od zakona**
Grad Lepoglava	**Osnivanje vlastitog neovisnog komunalnog poduzeća - *„Lepkom“***	• Varkom upotrebom sile zakona dobiva vlasništvom nad lokalnim vodovodima, a time dobiva i sve ostale pogodnosti • Lepkom poduzeće kao takvo ne bi imalo smisla	• Lepkom daje Varkomu koncesiju za distribuciju vode u postojećim cijevima • Lepkom postaje partner Varkoma kroz zajednički rad • Lepkom izbija „figu iz džepa“ tako što zadržava kontrolu nad svojim vodovodima	• Varkom Lepkomu ostavlja upravljanje lokalnim vodovodima • Lepkom osigurava distribuciju vode, otvaraju se nova radna mjesta, povećava se zadovoljstvo građana, itd.
	Stvaranje pobuna i pritisaka preko građana	• Varkom nasilno pokušava preuzeti vlasništvo vodovoda, no dolazi do masivnih pobuna, žalba i velikog nezadovoljstva građana • Grad Lepoglava ne da svoje vlastite vodovode (cijevi), dok se Varkomu ne isplati ulagati u nove cijevi po cijelom gradu • Ishod postaje povoljan za Lepoglavu na određeno vrijeme	• Varkom nudi „mogućnost“ otvaranja svoje podružnice u Lepoglavi tako da ta firma bude kompromisno rješenje (nova radna mjesta) • Lepoglava bi za taj kompromis dala vlasništvo vodovoda Varkomu • Varkom dobiva gotovo sve koristi lažnim obećavanjima	• Varkom prema sili zakona postaje vlasnik vodovoda na papiru, ali nema želje ni interesa za ikakva ulaganja u Lepoglavi zbog građana • Ovaj ishod rezultira u korist Lepoglave jer situacija ostaje ista kao do sad osim vlasništva na papiru
	Bez akcija	• Varkom prisvaja postojeće vodovode po danu donošenja zakona bez javljanja ikakvih pobuna građana • Svi građani su bez pristanka spojeni na Varkomovu vodu	• Nagovaranje Lepoglave na suradnju oko distribucije vode kroz postojeće vodovode • Lepoglava bez akcija odbija pregovore što dovodi Varkom pred zid jer moraju graditi vlastite vodovode • Varkom ne želi ući u toliku investiciju te stopira izgradnju na kraće vrijeme što je povoljno za Lepoglavu	• Lepoglava bez akcije predaje vodovode Varkomu koji ih mora preuzeti i s njima raditi jer je tako zakonom propisano • Varkom u ovoj situaciji dobiva velike mogućnosti no ne iskorištava ih u potpunosti

(Izvor: vlastita izrada autora)

Prethodna tablica prikazuje svih devet mogućih ishoda koji mogu nastati križanjem svih strategija svakog igrača. Tako je igrač Grad Lepoglava kao moguće strategije razvio mogućnost osnivanja komunalnog poduzeća naziva „Lepkom“ koje će biti u potpunosti neovisno od Varkoma i zapravo njemu stvarati konkurenciju. Također, Lepoglava će se osloniti na svoje građane kako bi vlastitim snagama stali na put Varkomu prilikom preuzimanja vodovoda. Naravno, postoji i opcija ne poduzimanja apsolutno nikakve akcije, odnosno propuštanje cijele situacije građanima samostalno. S druge strane, igrač Varkom ima na raspolaganju strategiju agresivnog preuzimanja vodovoda jer to po zakonu koji će doći na snagu može. Nadalje, specifičnost ove igre jednim djelom leži i u mogućem distributivnom pregovaranju kojim se stvara *win-lose* situacija u kojoj jedna strana ostvaruje svoje ciljeve na račun druge strane koja neminovno gubi. Varkom može pregovarati s Lepoglavom jer nije vlasnik postojećih cijevi kuda planira distribuciju vode i tim pregovorima želi izbjeći kopanje i polaganje vlastitih cijevi što bi za njih izazvalo velike troškove. Samim time Lepoglava bi postala gubitnik, a Varkom pobjednik. Treća moguća strategija je bježanje od zakona, odnosno ispunjavanje formalnosti zakona no bez ikojeg interesa u neka značajnija ulaganja u vodovode Grada Lepoglave.

Prethodno prikazanu igru u tabličnom obliku možemo transformirati u matricu plaćanja uzimajući u obzir ishode koji nastaju odabirom pojedinih strategija igrača preko nabrojanih dobitaka i gubitaka u tablici 5. Sljedeće prikazana matrica plaćanja sadrži procijenjene brojčane vrijednosti (isplate igrača) pridružene svakom pojedinom mogućem ishodu ove igre. Isplate igrača dobile su se temeljem zbrajanja svih onih postignutih dobitaka svakog igrača (brojevi u zagradi u tablici 5). Na taj način svaki ishod dobiva određenu vrijednost iz raspona od -5 do +5 zavisno o tome koji igrač dobiva.

		Varkom d.d.			
		Agresivno	*Pregovaranje*	*Bjeg od zakona*	
Grad Lepoglava	***Obrana***	-5	2	5	
	Pobune	3	-4	4	(38)
	Bez akcija	-5	1	-3	

Temeljem stvorene matrice plaćanja odrediti će se optimalna mješovita strategija igrača ove igre koristeći se linearnim programiranjem i simpleks algoritmom. Dakle, u nastavku rada odredit će se kojim strategijama se svaki igrač mora voditi za ostvarenje maksimalne koristi, odnosno minimalne gubiti s obzirom na definirane strategije i njihove moguće dobitke i gubitke.

5.5. Prikaz rješenja konkretnog problema

Rješavanje prethodno zadane matrične igre putem linearnog programiranja uz pomoć simpleks algoritma započinje prvo svođenjem matrične igre na linearni problem. U ovom slučaju igra će se svesti na problem maksimuma koji odgovara igraču B, odnosno Varkomu. Razlog tome je lakše praćenje definiranih matematičkih relacija u potpoglavlju koje se bavi svođenjem igre na linearni problem. Koristeći se tako napisanom relacijom (34) matrična igra (38) svodi se na standardni oblik problema kao

$$Z = 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \ \rightarrow max \rightarrow 1$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} -5y_1 + 2y_2 + 5y_3 &\leq \ V_B \\ 3y_1 - 4y_2 + 4y_3 &\leq \ V_B \\ -5y_1 + 1y_2 - 3y_3 &\leq \ V_B \\ y_i \ &\geq 0, i = 1\,,2,3. \end{aligned} \tag{39}$$

U prethodnom zapisu standardnog problema vidljivo je kako se za igrača B kod stvaranja ograničenja uzimaju vrijednosti iz redova matrice plaćanja. Kako matrica plaćanja sadrži negativne elemente, odnosno isplate igrača potrebno je dodati diferenciju. Diferencija (d) u ovom problemu iznosi 6 kako bi najmanja vrijednost elementa u matrici plaćanja (-5) postala pozitivna. Također, diferencija se dodaje i ostalim elementima matrice plaćanja čime i ostali negativni postaju pozitivni. Nakon dodavanja diferencije oznaka y_i se mijenja u oznaku y'_i, a oznaka V_B u V'_B. Tako dobivamo sljedeći oblik problema s diferencijom:

$$Z = 1y'_1 + 1y'_2 + 1y'_3 \ \rightarrow max \rightarrow 1$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} 1y'_1 + 8y'_2 + 11y_3 &\leq \ V'_B \\ 9y'_1 + 2y'_2 + 10y'_3 &\leq \ V'_B \\ 1y'_1 + 7y_2 + 3y'_3 &\leq \ V'_B \\ y'_i \ &\geq 0, i = 1\,,2,3. \end{aligned} \tag{40}$$

Kako bi se problem pretočio u simpleks tablicu, on mora poslije znaka „≤“ imati broj. To se dobiva množenjem svih nejednadžbe s $\frac{1}{V'_B}$ čime se za igrača Varkom dobiva sljedeći konačni zapis oblika problema s diferencijom:

$$Z = \frac{y'_1}{V'_B} + \frac{y'_2}{V'_B} + \frac{y'_3}{V'_B} \ \rightarrow max \rightarrow \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$1\frac{y'_1}{V'_B} + 8\frac{y'_2}{V'_B} + 11\frac{y'_3}{V'_B} \leq \ 1$$

$$9\frac{y'_1}{V'_B} + 2\frac{y'_2}{V'_B} + 10\frac{y'_3}{V'_B} \leq 1$$
$$1\frac{y'_1}{V'_B} + 7\frac{y'_2}{V'_B} + 3\frac{y'_3}{V'_B} \leq 1$$
$$\frac{y'_i}{V'_B} \geq 0, i = 1,2,3.$$

Za lakše kasnije snalaženje i računanje, u prethodno napisanom obliku problema s diferencijom radi se supstitucija svih vrijednosti $\frac{y'_i}{V'_B}$ s oznakom $\bar{y}_i$. Time dobivamo sljedeći supstituirani oblik problema:

$$Z = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 \rightarrow max \rightarrow \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} 1\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 + 11\bar{y}_3 &\leq 1 \\ 9\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 &\leq 1 \\ 1\bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 &\leq 1 \\ \bar{y}_i &\geq 0, i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{41}$$

Na kraju preostaje pretvaranje supstituiranog oblika u kanonski oblik problema. To je ujedno i prvi korak rješavanja simpleks metodom kako bi se problem mogao upisati u simpleks tablicu i riješiti se simpleks algoritmom. Supstituiranom obliku dodajemo onoliko dopunskih varijabli koliko ima nejednadžbi kako bi se nejednadžbe pretvorile u jednadžbe. Dopunske varijable nose oznaku u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Njihovim dodavanjem dobivamo sljedeći kanonski oblik problema:

$$Z = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + 0(u_1 + u_2 + u_3) \rightarrow max \rightarrow \frac{1}{V'_B}$$

uz uvjete ograničenja

$$\begin{aligned} 1\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 + 11\bar{y}_3 + u_1 &= 1 \\ 9\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 + u_2 &= 1 \\ 1\bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 + 3\bar{y}_n + u_3 &= 1 \\ \bar{y}_i &\geq 0, i = 1,2,3, \\ u_j &\geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{42}$$

Dobivenim kanonskim oblikom problema završeno je svođenje igre na prihvatljivi oblik linearnog programiranja za korištenje simpleks algoritma. U prvoj fazi simpleks algoritma traži se početno bazično rješenje, no kako su relacije (42) već u kanonskom obliku tada je početno bazično rješenje pronađeno i može se krenuti s njegovim poboljšanjem.

U drugoj fazi simpleks algoritma stvara se početna simpleks tablica u koju se smještaju simboli varijabli i vrijednosti njihovih koeficijenata iz kanonskog oblika (42). Tablica 7. prikazuje dobivenu početnu simpleks tablicu koja je polazište za daljnje iteracije simpleks algoritma.

Tablica 7. Početna simpleks tablica realnog problema

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
0	u_1	1	1	8	11	1	0	0	22	
0	u_2	1	9	2	10	0	1	0	23	
0	u_3	1	1	7	3	0	0	1	13	
$Z_j - c_j$		0	-1	-1	-1	0	0	0	-3	

(Izvor: autorski rad)

U početnu simpleks tablicu unesene su varijable i vrijednosti uvažavanjem definirane tablice 4. Tako se u baznom rješenju nalaze tri dopunske varijable sa svojim ograničenjima zapisanim u stupac „Kol“. Nadalje, ispod strukturalnih varijabli $\bar{y}_i$ zapisane su vrijednosti njihovih koeficijenata iz skupa ograničenja, dok se u zadnjem redu „$Z_j - c_j$“ nalaze njihovi negativni koeficijenti iz funkcije cilja. Ispod dopunskih varijabli upisuje se jedinična matrica. Jedina novost u gornjoj tablici su stupci „K“ koji predstavlja kontrolni stupac simpleks postupka, a njegove početne vrijednosti dobivaju se zbrajanjem svih lijevih vrijednost od njega. Također, novi stupac je stupac s oznakom „R“ kao rezultat, a služi za zapisivanje i traženje minimalnog kvocijenta kod odabira vodećeg reda. Nad tako postavljenom početnom simpleks tablicom može se krenuti sa simpleks algoritmom.

Trenutno bazično rješenje nije optimalno jer se u redu „$Z_j - c_j$“ nalaze negativne vrijednosti što znači da je ovo bazično rješenje moguće poboljšati. Dakle, u prvoj iteraciji simpleks algoritma prvo je potrebno odrediti vodeći stupac tako da se u redu „$Z_j - c_j$“ uzme najveća apsolutna vrijednost od negativnih brojeva. Pošto su vrijednosti retka „$Z_j - c_j$“ stupaca $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ i $\bar{y}_3$ jednake i iznose -1, potrebno je zbrojiti vrijednosti svakog od ta tri stupca zasebno. Stupac s najvećim zbrojem postaje vodeći stupac. To je u ovom slučaju stupac $\bar{y}_3$. Dodavanjem diferencije osigurala se pozitivnost koeficijenata vodećeg stupca. Time se ujedno omogućilo dijeljenje količine sa koeficijentima vodećeg stupca i zapisivanje kvocijenta u stupac „R“. Vodeći red postaje onaj koji posjeduje minimalni kvocijent, a to je prvi red. Sve prethodno opisano prikazano je u sljedećoj tablici.

Tablica 8. Prikaz simpleks iteracije na početnoj tablici

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
0	u_1	1	1	8	11	1	0	0	22	$\frac{1}{11}$
0	u_2	1	9	2	10	0	1	0	23	$\frac{1}{10}$
0	u_3	1	1	7	3	0	0	1	13	$\frac{1}{3}$
$Z_j - c_j$		0	-1	-1	-1	0	0	0	-3	

(Izvor: autorski rad)

U tablici 8. mogu se vidjeti vodeći stupac i vodeći redak označeni zelenom bojom. Određivanjem vodećeg stupca odredila se ulazna nebazična varijabla $\bar{y}_3$ koja će u bazičnom rješenju zamijeniti izlaznu bazičnu varijablu u_1, a koja je dobivena određivanjem vodećeg reda. Crveno označena ćelija u tablici 8. predstavlja stožerni element koji je dobiven križanjem vodećeg stupca i vodećeg reda. U ovom slučaju on iznosi 11. Stožernim elementom se nadalje dijele svi koeficijenti vodećeg reda čime se postiže transformacija koeficijenata vodećeg reda. Također, svi koeficijenti vodećeg reda, osim stožernog elementa, poprimaju vrijednost 0. Sve prethodne promjene potrebno je upisati u tablicu prve iteracije simpleks algoritma radi lakše transformacije svih preostalih koeficijenata simpleks tablice kao što prikazuje sljedeća tablica.

Tablica 9. Djelomična prva iteracija simpleks algoritma

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
1	$\bar{y}_3$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	1	$\frac{1}{11}$	0	0	2	
0	u_2				0					
0	u_3				0					
$Z_j - c_j$					0					

(Izvor: autorski rad)

Za upotpunjavanje prethodne tablice potrebno je transformirati ostale koeficijente. To se radi na način da se od trenutne vrijednosti svakog koeficijenta oduzme umnožak broja koji se nalazi na križanju stupca promatranog koeficijenta i vodećeg reda te broja koji se nalazi na križanju reda promatranog koeficijenta i vodećeg stupca. Tako se na primjer za koeficijente stupca „Kol“ računa sljedeće $1 - \left(\frac{1}{11} * 10\right) = \frac{1}{11}, 1 - \left(\frac{1}{11} * 3\right) = \frac{8}{11}$ i $0 - \left(\frac{1}{11} * -1\right) = \frac{1}{11}$. Isti postupak vrijedi i za sve preostale stupce, odnosno koeficijente prethodne simpleks tablice. Nakon tog izvršenog postupka, sve dobivene transformirane vrijednosti unose se u novu simpleks tablicu koja predstavlja izvršenu prvu iteraciju simpleks algoritma prikazanu u tablici 10.

Tablica 10. Prva iteracija simpleks algoritma

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
1	$\bar{y}_3$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	1	$\frac{1}{11}$	0	0	2	1
0	u_2	$\frac{1}{11}$	$\frac{89}{11}$	$-\frac{58}{11}$	0	$-\frac{10}{11}$	1	0	3	$\frac{1}{89}$
0	u_3	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{53}{11}$	0	$-\frac{3}{11}$	0	1	7	1
$Z_j - c_j$		$\frac{1}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{3}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	0	0	-1	

(Izvor: autorski rad)

Simpleks algoritam kreće u ponovnu provjeru dobivene tablice 10. s obzirom na postojanje optimalnog rješenja. Optimalno rješenje ponovno ne postoji jer red „$Z_j - c_j$" sadrži negativne vrijednosti u stupcima $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ koji ujedno postaju kandidati za vodeći stupac. Pošto stupac $\bar{y}_1$ sadrži veću apsolutnu negativnu vrijednost tada on preuzima ulogu vodećeg stupca kako je i naznačeno u tablici 10. Dijeljenjem vrijednosti iz stupca „Kol" s koeficijentima vodećeg stupca dobiva se da je drugi redak vodeći jer posjeduje minimalni kvocijent. Sada ulazna nebazična varijabla postaje $\bar{y}_1$, dok izlazna bazična varijabla postaje u_2. Ponovnom transformacijom vodećeg reda stožernim elementom, kao i transformacijom preostalih koeficijenata tablice, dobiva se nova simpleks tablica završene druge iteracije simpleks algoritma. Ona je prikazana sljedećom tablicom.

Tablica 11. Druga iteracija simpleks algoritma

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
1	$\bar{y}_3$	$\frac{8}{89}$	0	$\frac{70}{89}$	1	$\frac{9}{89}$	$-\frac{1}{89}$	0	$\frac{116}{59}$	$\frac{4}{35}$
1	$\bar{y}_1$	$\frac{1}{89}$	1	$-\frac{58}{89}$	0	$-\frac{10}{89}$	$\frac{11}{89}$	0	$\frac{33}{89}$	-/-
0	u_3	$\frac{64}{89}$	0	$\frac{127}{24}$	0	$-\frac{17}{89}$	$-\frac{8}{89}$	1	$\frac{175}{26}$	$\frac{25}{184}$
$Z_j - c_j$		$\frac{9}{89}$	0	$-\frac{77}{89}$	0	$-\frac{1}{89}$	$\frac{10}{89}$	0	$-\frac{59}{89}$	

(Izvor: autorski rad)

Kako druga iteracija u redu „$Z_j - c_j$" i dalje sadrži negativne vrijednosti, simpleks algoritam mora ići u novu, treću iteraciju. Postupak određivanja vodećeg stupca i reda, a time i ulazne i izlazne varijable, analogan je onome opisanom kroz prethodne iteracije. Transformacijom koeficijenata vodećeg reda i svih ostalih dobiva se sljedeća tablica treće iteracije simpleks algoritma.

Tablica 12. Treća iteracija simpleks algoritma

c_j	Var	Kol	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	u_1	u_2	u_3	K	R
1	$\bar{y}_2$	$\frac{4}{35}$	0	1	$\frac{89}{70}$	$\frac{9}{70}$	$-\frac{1}{70}$	0	$\frac{5}{2}$	
1	$\bar{y}_1$	$\frac{3}{35}$	1	0	$\frac{29}{35}$	$-\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	0	2	
0	u_3	$\frac{4}{35}$	0	0	$-\frac{323}{48}$	$-\frac{61}{70}$	$-\frac{1}{70}$	1	$-\frac{13}{2}$	
$Z_j - c_j$		$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{2}$	

(Izvor: autorski rad)

Nakon provedene treće iteracije simpleks algoritma u novo dobivenoj tablici 12. može se primijetiti da red „$Z_j - c_j$" ne sadrži negativne vrijednosti prema čemu algoritam staje. Dakle, pronađeno je optimalno rješenje problema. Prema tome dobiveno je sljedeće rješenje:

$$\frac{1}{V'_B} = \frac{1}{5}, \bar{y}_1 = \frac{3}{35} \ i \ \bar{y}_2 = \frac{4}{35},$$

dok varijabla $\bar{y}_3$ nije ušla u optimalno rješenje. U optimalno rješenje ušla je dopunska varijabla u_3, no ona ne nosi nikakvo realno značenje. Temeljem dobivenog optimalnog rješenja nadalje se izračunava vrijednost igre. Maksimalni očekivani gubitak V'_B igrača Varkom jednak je recipročnoj vrijednosti $\frac{1}{V'_B}$. Dakle, dobiva se da je $V'_B = 5$. S obzirom da se u početku svim elementima dodala diferencija, sada ju je potrebno oduzeti od dobivene vrijednosti V'_B kako bi se dobila konačna optimalna vrijednost igre V. Shodno tome, vrijedi $V = V'_B - d = 5 - 6 = -1$, odnosno $\boldsymbol{V = -1}$. Optimalna mješovita strategija (y_1, y_2, y_3) igrača Varkom izračunava se na sljedeći način. Kako je uvedena supstitucija $\bar{y}_i = \frac{y'_i}{V'_B}$, tada vrijedi $y'_i = \bar{y}_i * V'_B$. Stoga, vjerojatnost odigravanja svake strategije igrača B treba izračunati kao

$$\boldsymbol{y_1} = \bar{y}_1 * V'_B = \frac{3}{35} * 5 = \boldsymbol{\frac{3}{7}} = \boldsymbol{42,86}\%,$$
$$\boldsymbol{y_2} = \bar{y}_2 * V'_B = \frac{4}{35} * 5 = \boldsymbol{\frac{4}{7}} = \boldsymbol{57,14}\%,$$
$$\boldsymbol{y_3} = \bar{y}_3 * V'_B = 0 * 5 = \boldsymbol{0}.$$

Dakle, optimalna mješovita strategija Varkoma je $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0)$. S druge strane, optimalne vrijednosti dualnih varijabli $\bar{x}_i$ u ovom slučaju jednake su koeficijentima uz dopunske varijable u_i. Shodno tome, optimalna mješovita strategija za igrača Grad Lepoglava izračunava se na sličan način kao i za igrača Varkom, osim što se ovdje promatraju dobivene vrijednosti dopunskih varijabla u redu „$Z_j - c_j$". Računa se sljedeće:

$$\boldsymbol{x_1} = u_1 * V'_B = \frac{1}{10} * 5 = \boldsymbol{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{50}\%,$$
$$\boldsymbol{x_2} = u_2 * V'_B = \frac{1}{10} * 5 = \boldsymbol{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{50}\%,$$
$$\boldsymbol{x_3} = u_3 * V'_B = 0 * 5 = \boldsymbol{0}.$$

Optimalna mješavina strategija igrača A je $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Valja napomenuti da se vjerojatnosti odigravanja strategija y_i i x_j pišu u obliku postotaka za lakše kasnije razumijevanje i tumačenje rješenja.

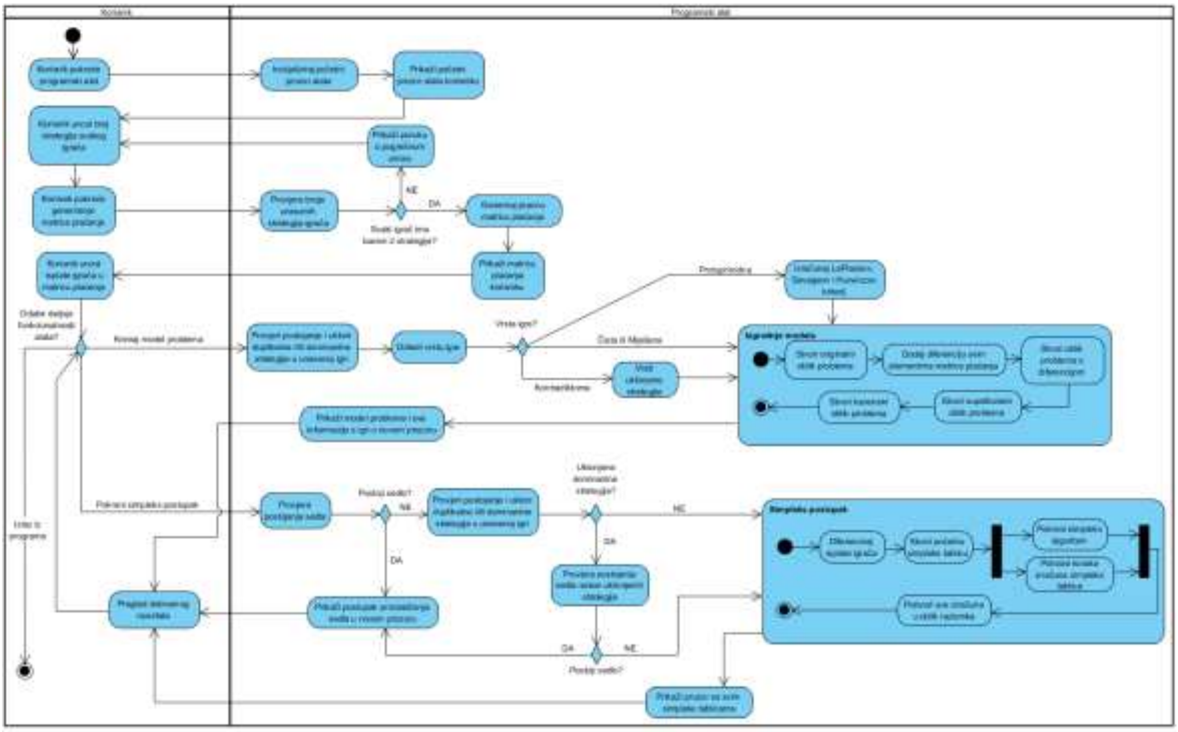
Nakon gotovog izračuna problema postavljenog preko matrične igre slijedi interpretacija dobivenih rezultata igre za svakog igrača. Optimalna vrijednost igre određuje pobjednika igre. U ovom problemu ona iznosi -1 što znači da je pobjednik igre igrač Varkom. Za realizaciju ove igre u svoju korist, igrač Varkom temeljem dobivenih rezultata, mora se služiti prvom strategijom y_1 u postotku od 42,86%. Također, drugu strategiju y_2 mora upotrijebiti u vjerojatnosti od 57,14%, dok treću strategiju y_3 uopće ne bi trebao igrati. S druge strane, igrač Grad Lepoglava za minimalizaciju svog gubitka mora kombinirati odigravanje prve i druge strategije x_1 i x_2 u jednakom iznosu vjerojatnosti od 50%. Istovremeno Grad Lepoglava se ne bi trebao koristiti trećom strategijom x_3.

Temeljem prethodno dobivenih rezultata može se postaviti pitanje što dobivene vrijednost konkretno označavaju za svakog igrača u stvarnosti. Dakle, Varkom bi se prema prethodno dobivenim rezultatima trebao najviše držati strategije pregovaranja preko kojih bi Grad Lepoglavu pregovorima nadigrao i time ostvario korist. Isto tako, uz strategiju pregovaranja, potrebno je da se dosta često drži i agresivne strategije preuzimanja vodovoda, što će mu po novom zakonu biti dozvoljeno. S ciljem odupiranja strategijama Varkoma, Grad Lepoglava treba podjednako razmišljati o korištenju strategije otvaranja vlastitog komunalnog poduzeća „Lepkom", kao i strategije preko koje će stvarati masovne pobune, žalbe i pritiske uz pomoć građana. Konačna vrijednost igre ipak govori kako bi pobjednik iz ovako postavljene igre bio Varkom. Takav rezultat je i realan s obzirom na to da će novi zakon više biti priklonjen Varkomu nego Gradu Lepoglavi. Varkom će prema ovoj igri, ukoliko Grad Lepoglava odigra podjednako gore navedene strategije, ostvariti minimalnu korist i to najvjerojatnije samo u obliku vlasništva nad vodovodima bez ikakvih daljnjih prava. Ovdje se može vidjeti velika korisnost teorije igara. Naime, donošenjem zakona o lokalnim vodovodima Grad Lepoglava zajedno sa svojim građanima naći će se u poziciji koja im može donijeti samo poraz. Teorija igara u ovom slučaju pomaže Lepoglavi da izgubi s najmanjom mogućom razlikom, odnosno da izgubi što je manje toga moguće. Upravo to može se vidjeti i na vrijednosti igre koja iznosi -1, a mogla je iznositi čak -5 u korist Varkoma.

Ovim prikazom realnog problema u obliku matrične igre i njezinim rješavanjem uz pomoć linearnog programiranja i simpleks algoritma, stvoreni su preduvjeti za verifikaciju i validaciju izrađenog programskog alata. Drugim riječima, prethodno rješenje problema će se u sljedećem poglavlju upotrijebiti kako bi se vidjelo da je izrađeni alat za rješavanje takvih vrsta problema dovoljno dobar i pouzdan kako bi služio ovoj svrsi.

6. Programski alat za rješavanje problema

U ovom poglavlju rada prikazat će se izrađeni programski alat za rješavanje problema teorije igara pomoću simpleks algoritma. U prethodnom poglavlju rada objašnjeno je sve ono na čemu se alat temelji, odnosno što radi i kako rješava probleme teorije igara. Za opisivanje samog funkcioniranja alata i njegove interakcije s korisnikom koristi se dijagram aktivnosti. Upotrebom takve vrste dinamičkog dijagrama opisano je unutarnje ponašanje izrađenog alata kroz aktivnosti i prijelaze između mogućih stanja alata. Na sljedećoj slici prikazan je dijagram aktivnosti izrađenog programskog alata.



Slika 3. Dijagram aktivnosti izrađenog programskog alata (izvor: vlastita izrada autora)

Dijagram aktivnosti na slici 3. prikazuje interakciju korisnika s alatom, a ujedno i sam radni tok alata preko aktivnosti. Prema dijagramu alat nakon pokretanja prikazuje početni prozor u kojem korisnik unosi broj strategija svakog igrača, a temeljem kojih alat generira matricu plaćanja ukoliko svaki od igrača ima na raspolaganju barem dvije strategije. Nadalje korisnik unosi isplate igrača u matricu plaćanja. Vrijednosti isplata igrača ograničene su samo na domenu cijelih brojeva. Programski alat zatim nudi dvije glavne funkcionalnosti, a to su kreiranje modela unesenog problema i njegovo rješavanje simpleks algoritmom. Korisnik prema želji odabire jednu od prethodno spomenutih funkcionalnosti. Ukoliko odabere kreiranje modela problema, programski alat prvo provjerava postojanje duplikatnih i/ili dominantnih strategija. Ukoliko takve strategije postoje, one se uklanjaju iz matrice plaćanja. To je važno jer se početni rang, a samim time i vrsta igre preinačuje uklanjanjem duplikatnih i dominantnih strategija. Važno je u suštini znati o kakvoj je igri riječ radi narednog postupka. Ukoliko se radi o kontradiktornoj igri tada ona kao takva nema previše smisla i zna se pobjednik igre. Stoga se kod nje vraćaju prethodno uklonjene strategije kako bi se izradio model temeljem netaknute matrice plaćanja. Kod preostalih vrsta uklanjaju se prethodno prepoznate dominantne i duplikatne strategije kako bi se dobila odgovarajuća vrsta igre. Valja spomenuti da se prije izgradnje modela kod protuprirodnih igara izračunavaju objašnjeni Laplaceov, Savageov i Hurwiczov kriterij koji korisniku daju optimalne strategije s aspekta teorije odlučivanja. Programski alat zatim kreće u izgradnju modela problema. Izgradnja modela u dijagramu aktivnosti prikazana je kao aktivnost koja se sastoji od nekoliko podaktivnosti. Prva od njih je stvaranje originalnog oblika problema, a koji se nadalje transformira u oblik problema s diferencijom zbog prethodno dodane diferencije svim isplatama igrača u matrici plaćanja. Nadalje slijedi stvaranje supstituiranog i u konačnici kanonskog oblika problema. Na taj način kreirani su svi oblici problema koji se prikazuju korisniku u novom prozoru zajedno sa dodatnim informacijama poput uklonjene strategije, izračunati kriteriji i slično.

Druga važna funkcionalnost je rješavanje problema simpleks algoritmom. Odabirom te opcije, prema dijagramu aktivnosti, programski alat prvo provjerava postojanje sedla, odnosno čiste igre. Ukoliko sedlo postoji tada se korisniku otvara novi prozor u kojem mu se objašnjava postupak pronalaženja sedla kao i sam rezultat igre. Ne postojanje sedla uzrokuje istu aktivnost uklanjanja strategija kao i prije izgradnje modela. Uklanjanjem dominantnih strategija igre može se javiti sedlo koje prethodno nije bilo raspoznato. Stoga alat ponovno provjerava postojanje sedla u igri. U slučaju da nisu bile uklonjene dominantne igre ili se njihovim uklanjanjem ne javlja sedlo, alat kreće u aktivnost simpleks postupka. Simpleks postupak sačinjen je od nekoliko podaktivnosti. Prvo se dodaje diferencija svim isplatama za osiguranje pozitivnosti svih ćelija u kreiranoj početnoj simpleks tablici. Kada se kreira početna tablica pokreće se simpleks algoritam koji traži optimalno rješenje problema. Usporedno se pohranjuje se svaki korak izračuna simpleks algoritma. Nakon što simpleks algoritam završi, svi decimalni brojevi u dobivenim tablicama iteracije kao i koracima izračuna pretvaraju se u razlomak. Tek tada se korisniku prikazuje upotreba simpleks algoritma za dobivanje optimalne mješavine strategija svakog igrača. Programski alat izrađen je tako da korisnik može birati jednu od prethodne dvije objašnjene funkcionalnosti koje su međusobno neovisne. Tako može samo dobiti modele problema njegovim svođenjem na linearno programiranje ili dobiti optimalno rješenje pomoću simpleks algoritma ili oboje. Iz razloga dobivanja takve fleksibilnosti alata u dijagramu aktivnosti pojedine aktivnosti se ponavljaju. Programski alat također omogućava promjenu isplate dobitaka i rješavanje nove igre u bilo kojem trenutku bez potrebe za gašenjem i ponovnim aktiviranjem alata. Sve prethodno opisano dijagramom aktivnosti je preko praktičnog primjera prikazano u sljedećim potpoglavljima.

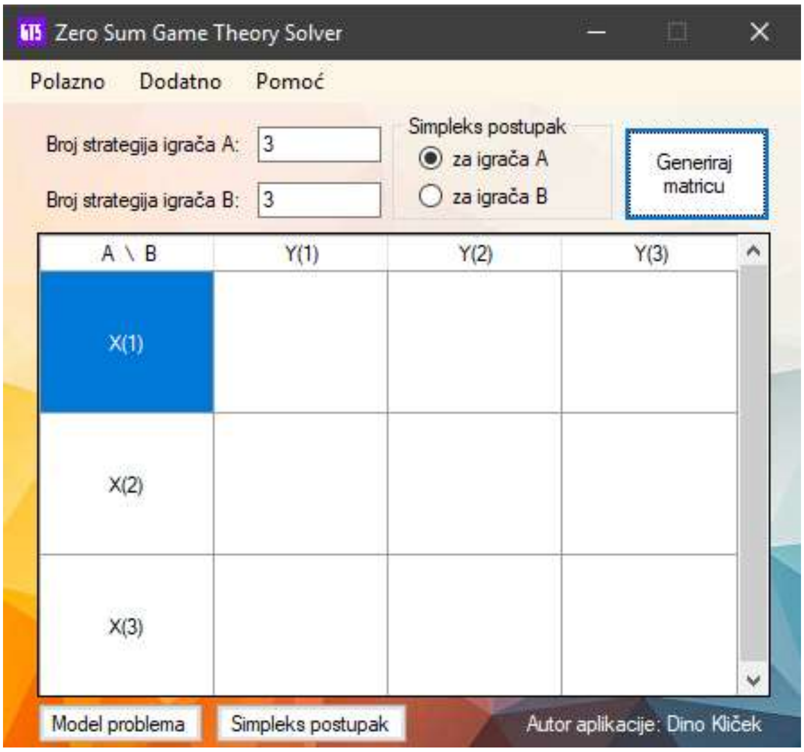
6.1. Generiranje matrice plaćanja i unos isplata igrača

Pokretanjem programskog alata korisniku se otvara početni prozor prikazan na slici 4. Taj prozor sastoji se od dva polja za unos broja strategija igrača A i igrača B. Desno od polja za unos omogućeno je biranje igrača za kojeg korisnik želi sprovesti simpleks postupak. Naravno, neovisno o odabranom igraču vrijednost igre i njihove optimalne strategije bit će iste, no alat time pruža korisniku uvid u različito svođenje igre i njezino rješavanje za svakog igrača.

Slika 4. Početni prozor alata

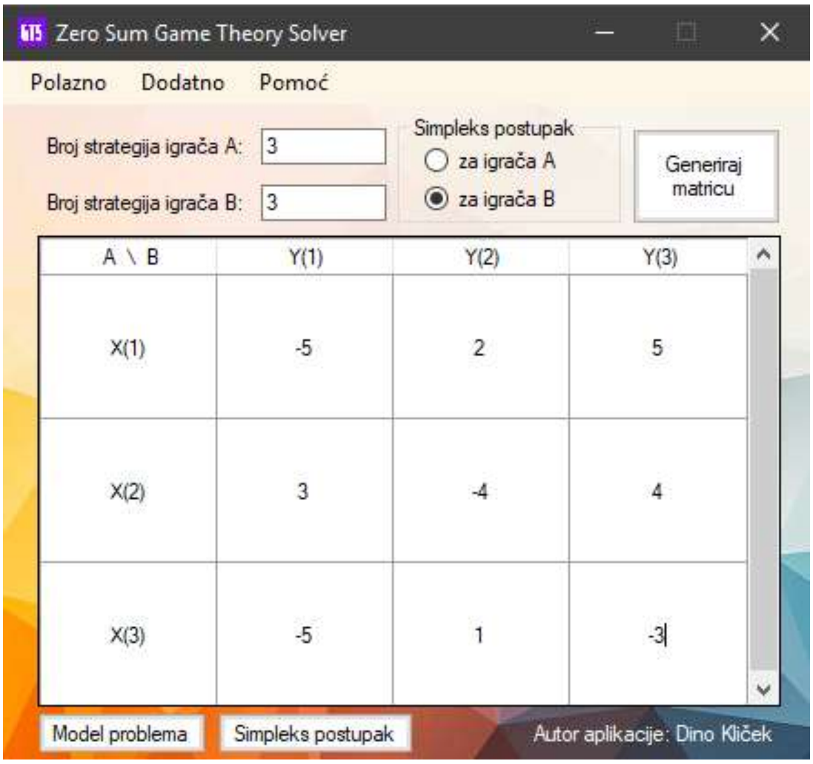
Početni prozor prema slici 4. sadrži također tri gumba. Prvi gumb „Generiraj matricu" stvara unutar sivog pravokutnika praznu matricu plaćanja željenog ranga korisnika. Zatim u donjem dijelu početnog prozora postoje dva guma. Gumb „Model problema" služi za stvaranje modela unesenog problema, dok gumb „Simpleks postupak" vodi korisnika do prikaza rješenja problema dobivenog pomoću simpleks algoritma. Svaki od ta dva gumba pokreće novi prozor aplikacije u kojemu se prikazuju rezultati pojedine funkcionalnosti.

Unosom broja strategija svakog igrača zapravo se određuje rang matrice plaćanja. Nakon unosa tih brojeva i pritiskom na gumb „Generiraj matricu" kreira se nova prazna matrica plaćanja. Kako bi se provjerila ispravnost rada alata koristit će se opisani problem i definirana matrica plaćanja (38). Prema toj matrici plaćanja svaki igrač na raspolaganju ima tri strategije. Dakle, u programski alat unosi se broj 3 u prazna polja strategija igrača i pritiskom na gumb „Generiraj matricu" dobiva se matrica plaćanja prikazana na slici 5.



Slika 5. Generirana matrica plaćanja ranga 3x3

Nakon generiranja matrice plaćanja omogućava se unos isplata igrača. Sljedeća slika prikazuje spremnu matricu plaćanja za pokretanje daljnjih funkcionalnosti alata.

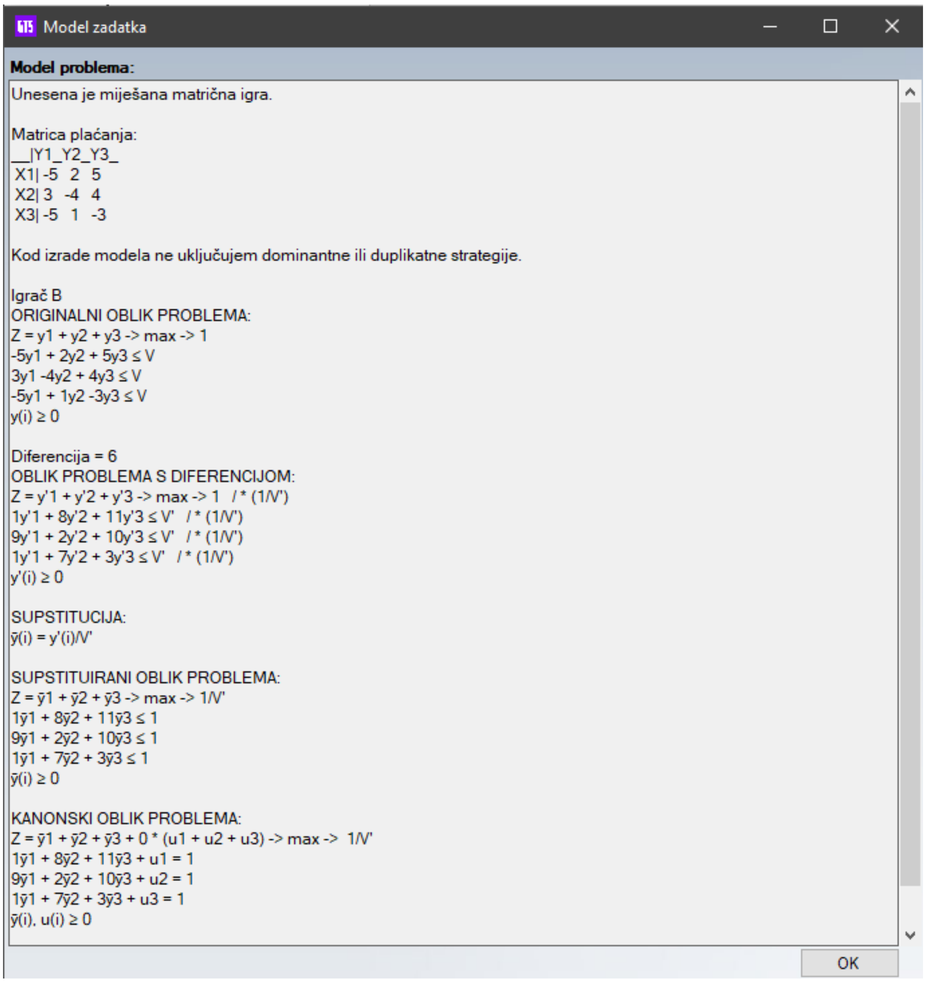


Slika 6. Upisane isplate igrača u matricu plaćanja

U nastavku slijedi opis i prikaz izrade modela unesene matrice plaćanja kao i njezino rješavanje uz pomoć simpleks algoritma ugrađenog u programski alat.

6.2. Izrada modela problema uz pomoć programskog alata

Prilikom svođenja matrične igre, odnosno matrice plaćanja na linearni problem programski alat radi sljedeće. Prvo prikaže igru u njenom originalnom obliku. Zatim zbog nepostojanja ograničenja varijable V dodaje diferenciju čime originalni oblik prelazi u oblik s diferencijom problema. Sve nejednadžbe oblika problema s diferencijom množe se s $\frac{1}{V}$ kako bi se na desnoj strani nejednadžbi dobio broj. Za pojednostavljenje oblika dobivenog prethodnim množenjem uvodi se supstitucija kojom se postiže supstituirani oblik problema. Na kraju, alat stvara kanonski oblik problema radi dobivanja početnog baričnog rješenja, odnosno mogućnosti rješavanja problema pomoću simpleks algoritma. Slika 7. prikazuje cjelokupni pisani postupak koji alat generira prilikom izrade modela zadane matrice plaćanja.

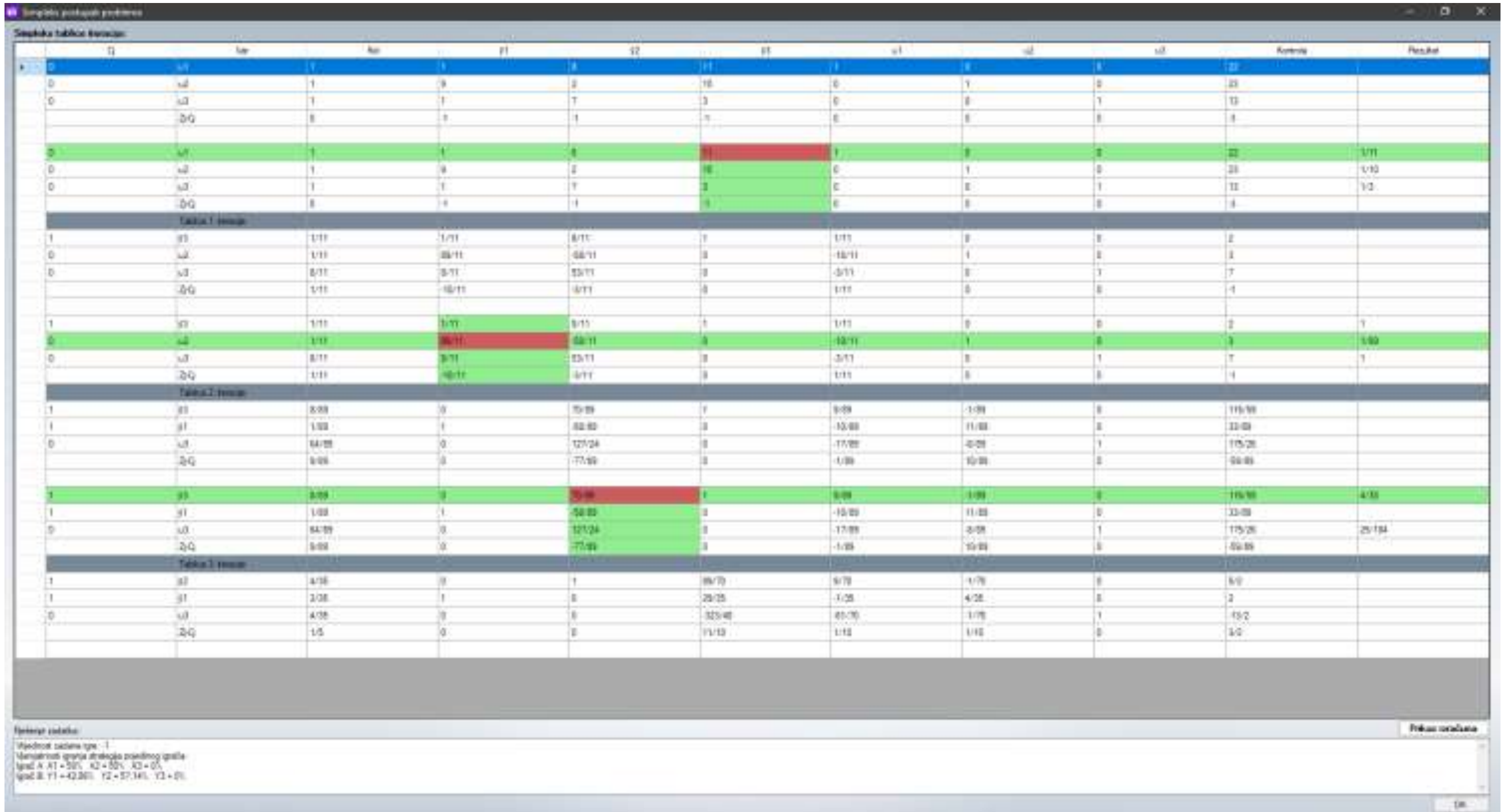


Slika 7. Generirani model zadanog problema u alatu

Uspoređujući respektivno generirane oblike problema alata na slici 7. s napisanim relacijama (39), (40), (41) i (42) može se vidjeti da izrađeni programski alat radi dobro i bez pogreške. U ovom prozoru, kako će biti kasnije prikazano, mogu se pojaviti i dodatne informacije poput vrste igre, oznaka uklonjenih strategija, izračunatih kriterija teorije odlučivanja i slično.

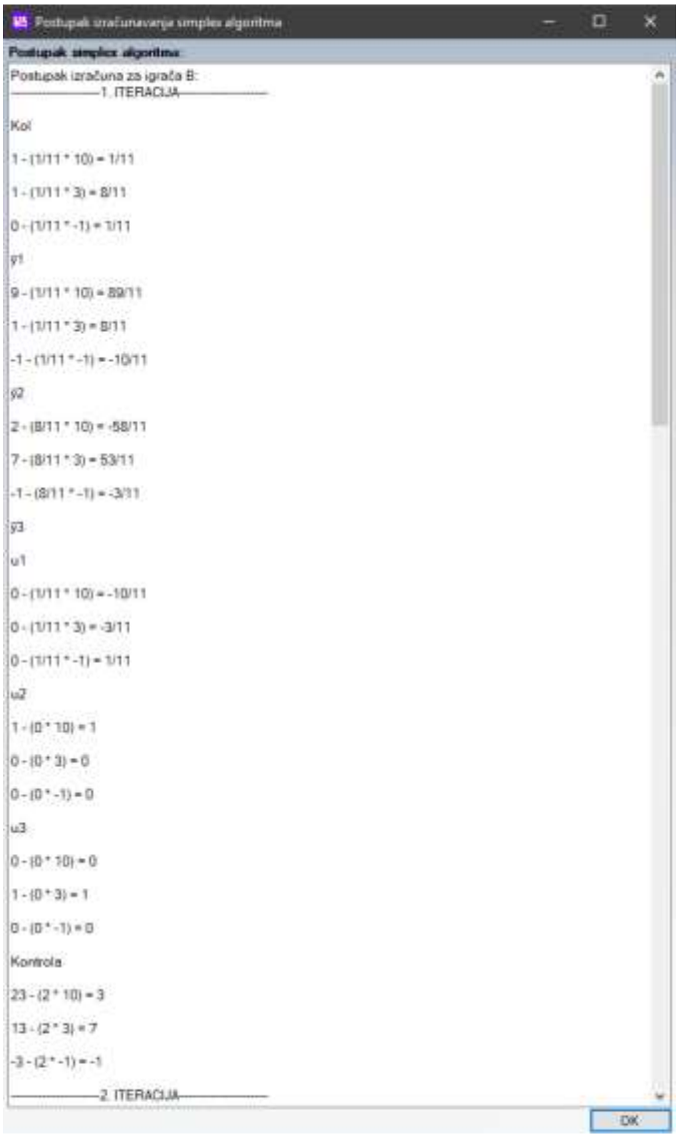
6.3. Prikaz rješenja problema uz pomoć programskog alata

Korisnik na početnom prozoru, kako je prikazano na slici 6., može odmah odabrati pokretanje simpleks postupka za unesenu matricu plaćanja bez da prije stvori modele problema. Pritiskom na gumb „Simpleks postupak" programski alat prvo provjerava postojanje sedla ili čiste igre. Kako matrica plaćanja (38) ne sadrži sedlo, odnosno kako se radi o miješanoj igri tako programski alat tu igru rješava simpleks algoritmom kroz nekoliko iteracija kako je prikazano na slici 8.



Slika 8. Prikaz simpleks tablica i rješenja dobivenog simpleks algoritmom

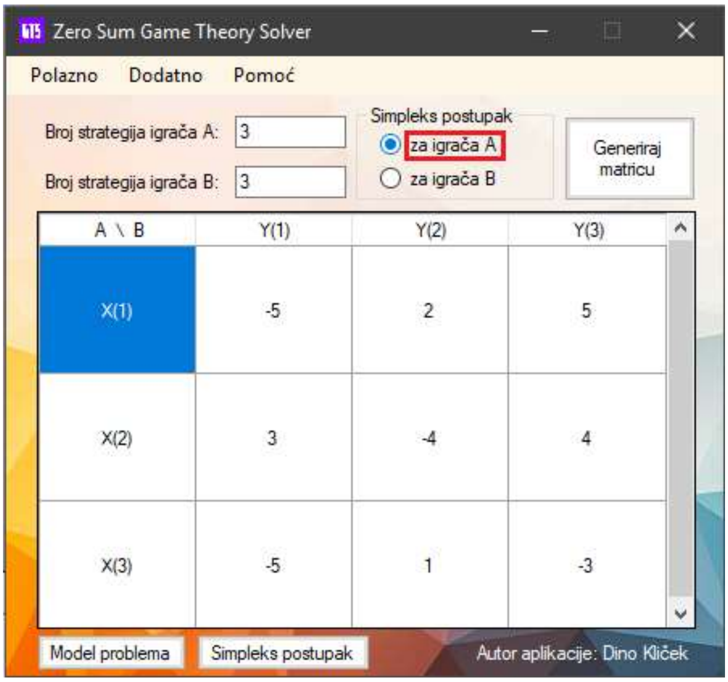
Na slici 8. prikazan je prozor alata koji opisuje primjenu simpleks algoritma i potrebne njegove tri iteracije za pronalazak optimalnog rješenja problema. Ispod svih tablica iteracija nalazi se rješenje zadatka koje govori o konačnoj vrijednosti igre i određuje optimalni odabir svake od strategija igrača. Usporedbom dobivenog rješenja preko programskog alata i onog dobivenog ručnog, vidi se da razlike ne postoje. Dakle, izrađeni alat i ovom funkcionalnošću služi dobro namijenjenoj svrsi, a ujedno korisniku detaljno prezentira simpleks algoritam kroz svaku njegovu iteraciju. Također, u svakoj tablici iteracije zelenom bojom označeni su vodeći stupci i vodeći redci, odnosno elementarne transformacije baze za svaku pojedinu iteraciju, dok su crvenom označeni stožerni elementi. Ovaj prozor alata ujedno sadrži u donjem desnom dijelu gumb „Prikaz izračuna“ čijim pritiskom se dobiva novi prozor prikazan na slici 9.



Slika 9. Prikaz izračuna prve simpleks iteracije

Prikazanim izračunima na slici 9. korisnik može pratiti transformaciju koeficijenata, odnosno popunjavanje svake tablice simpleks iteracije. Također, transformacijom decimalnih brojeva u razlomke daje se ispravniji i razumljiviji prikaz korisniku.

Programski alat, kako je već spomenuto, omogućuje izgradnju modela problema i njegovo rješavanje i za drugog igrača. Mijenjanje s igrača B na igrača A za kojeg se sada želi riješiti isti problem radi se jednostavnim odabirom kako je prikazano na sljedećoj slici.

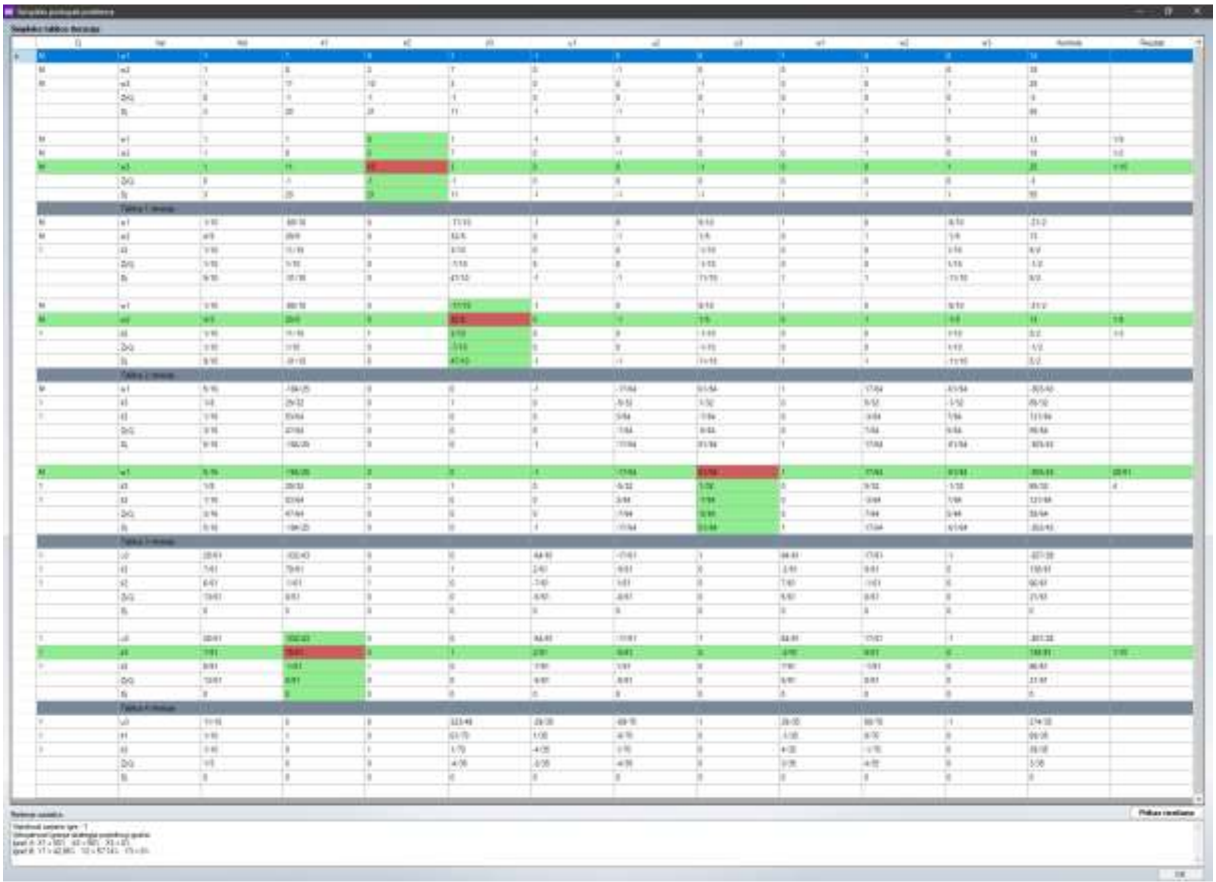


Slika 10. Odabir rješavanja problema za igrača A

Ponovnim pritiskom na gumb „Model problema" dobivaju se generirani modeli problema za igrača A, no oni nisu u potpunosti isti kao za igrača B što prikazuje slika 11.

Slika 11. Dobiveni model problema za igrača A

Prema prethodnom prozoru alata vidljivo je drugačije stvaranje originalnog, odnosno standardnog problema za minimum gdje se koeficijenti strukturnih varijabli uzimaju iz stupaca matrice plaćanja. Daljnji postupak jednak je kao i kod igrača B sve do kanonskog oblika koji je također promijenio svoj oblik problema. Ovaj kanonski oblik sadržava i varijable w koje se nazivaju artificijelne varijable, a uglavnom imaju samo kalkulativni značaj kako bi se dobilo početno bazično rješenje pošto dopunske varijable sada sadrže negativni predznak. Kako se radi o dualnim problemima igrača A i igrača B tako rješenja dobivena simpleks algoritmom moraju biti jednaka. Odabirom rješavanja problema simpleks algoritmom za igrača A dobiva se prozor alata prikazan na sljedećoj slici.

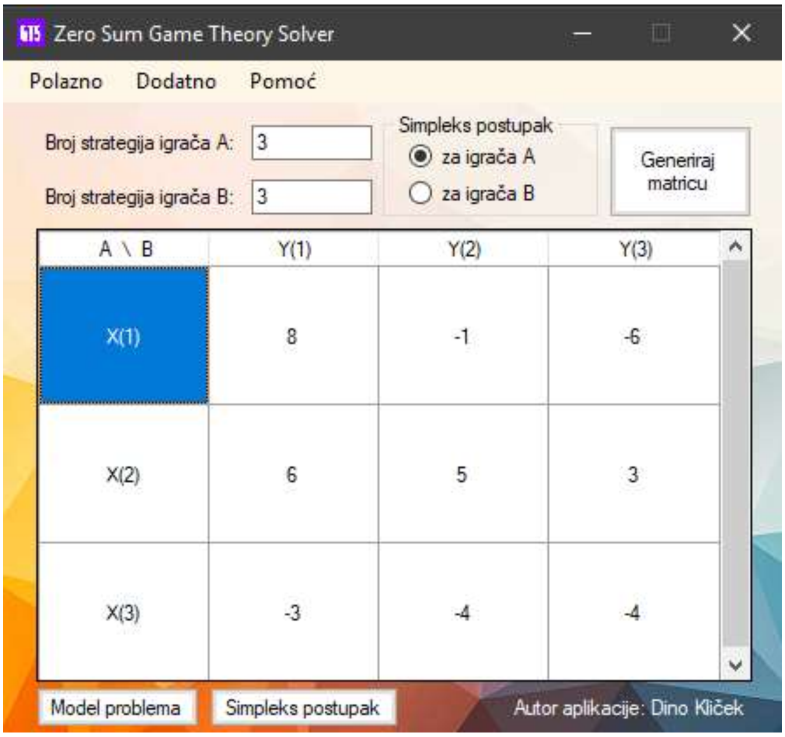


Slika 12. Dobiveno rješenje simpleks algoritma za igrača A

Uspoređujući dobiveno rješenje igrača A s prethodno dobivenim rješenjem igrača B na slici 8. može se zaključiti da razlika u konačnom rješenju ne postoji. Stoga programski alat zadovoljava i uvjete teorema dualnosti prema kojem oba problema moraju imati jednake vrijednosti optimalnih rješenja. Naravno, jedina očigledna razlika javlja se u iteracijama simpleks algoritma. Kod problema minimuma algoritam uzima u prvom koraku najveću vrijednost reda d_j, dok u drugoj fazi uzima najveću pozitivnu vrijednost iz reda $Z_j - c_j$. Ostali koraci algoritma jednaki su onima u iteraciji simpleks algoritma za maksimum. Također, kao i kod igrača B moguće je vidjeti svaki korak izračuna simpleks iteracija kojih u ovom slučaju ima ukupno četiri.

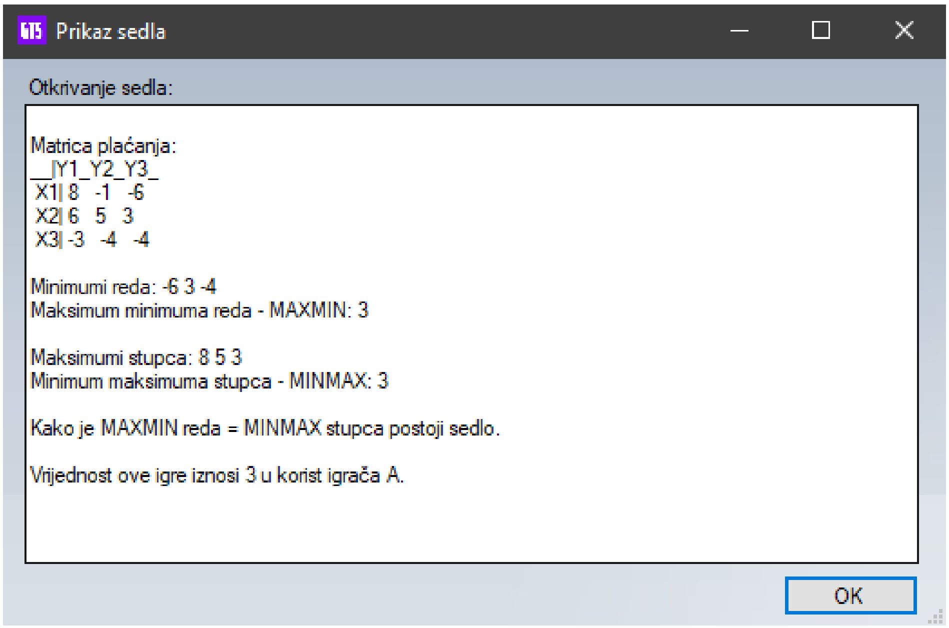
6.4. Pregled dodatnih mogućnosti alata

Programski alat nosi sa sobom i dodatne manje funkcionalnosti poput pronalaženja čiste igre, a isto tako određivanje protuprirodne ili kontradiktorne igre. Unosom matrice plaćanja (5) u programski alat može se vidjeti na koji način barata s takvim vrstama igre. Sljedeća slika prikazuje unesenu matricu plaćanja koja sadrži sedlo u početni prozor alata.



Slika 13. Upisana matrica plaćanja koja sadrži sedlo

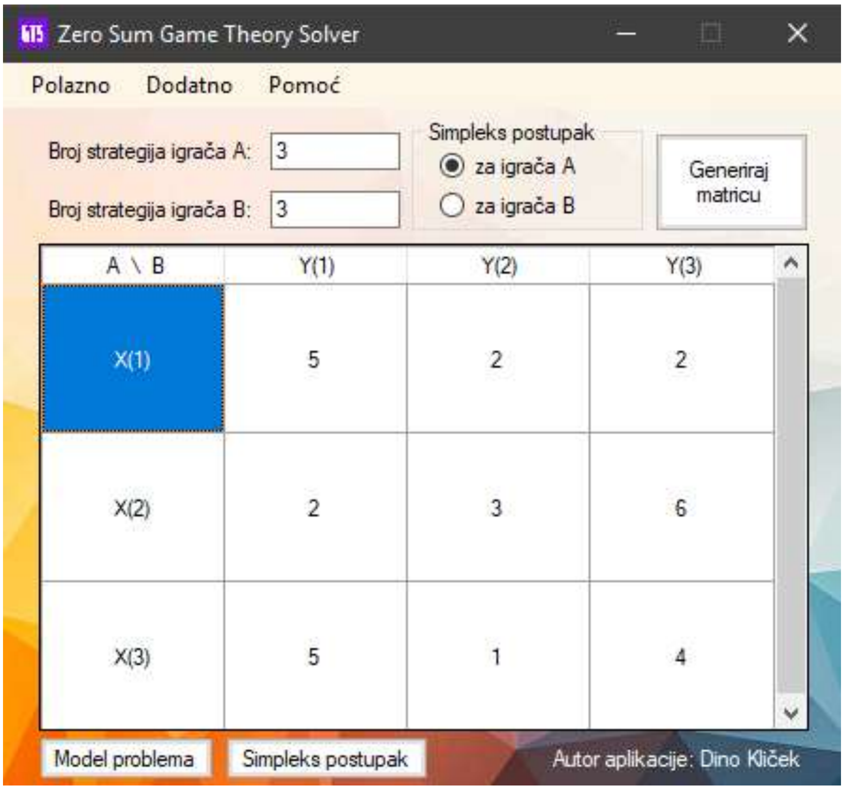
Pokretanjem rješavanja upisane matrice plaćanja pomoću simpleks algoritma alat korisniku prikazuje novi prozor kao na slici 14.



Slika 14. Prikaz rješenja i postupka pronalaženja sedla

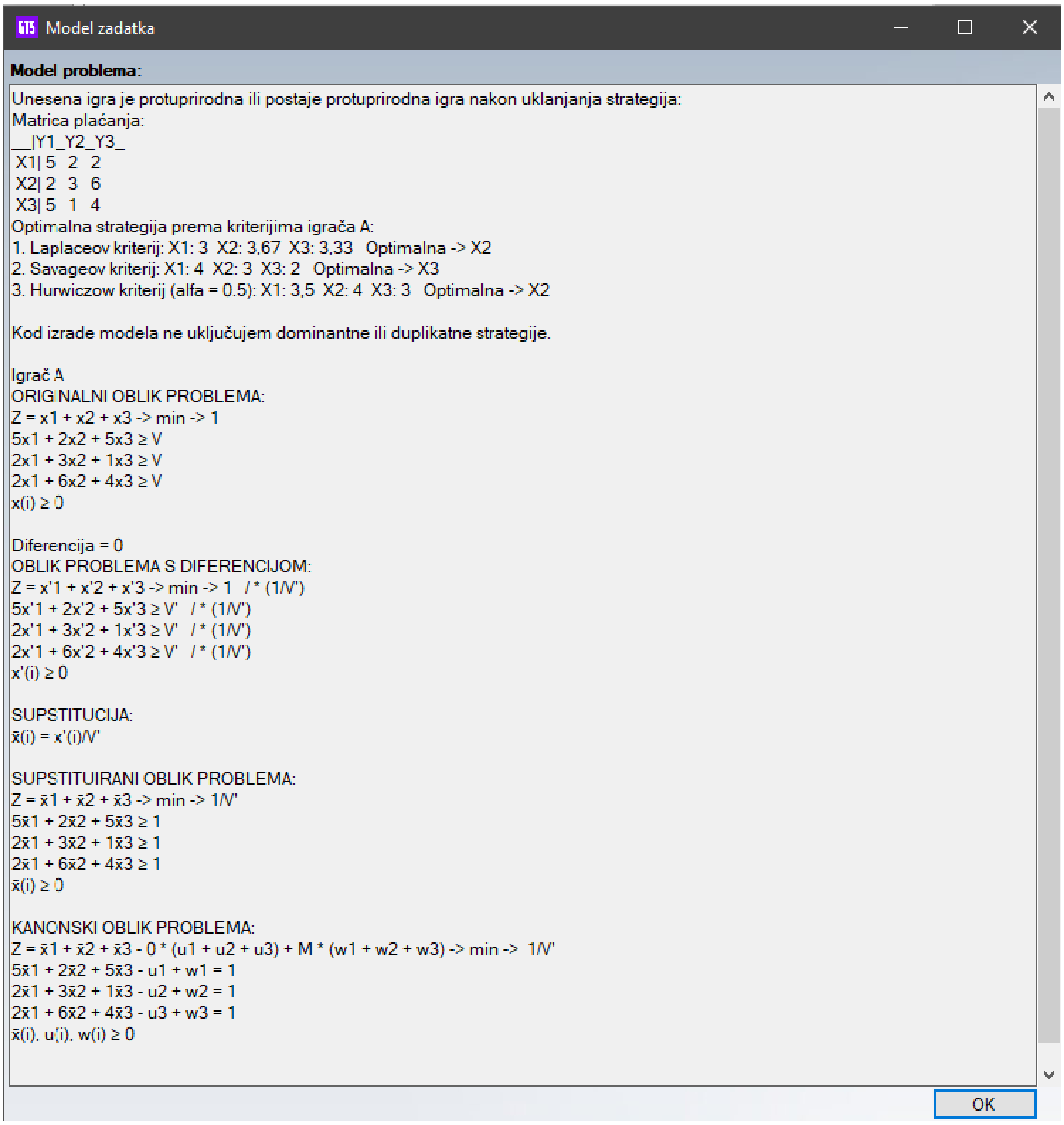
U prethodnom prozoru programski alat korisniku objašnjava metodu sedla pronalaženjem vrijednosti koja je maksimalna u minimum vrijednostima redova, kao i pronalaženje vrijednosti koja je minimalna u maksimum vrijednostima stupaca u matrici plaćanja. Dobivena vrijednost sedla iznosi 3, a to odgovara dobivenom rezultatu i ručnog postupka iz drugog poglavlja rada.

Jedan od najčešćih specijalnih slučajeva koji se javljaju u teoriji igara su protuprirodne igre. Primjer takve igre dan je matricom plaćanja (9) i prema njoj se unaprijed zna koji igrač dobiva, a koji gubi. Unosom takve matrične igre u programski alat dobiva se sljedeći početni prozor.



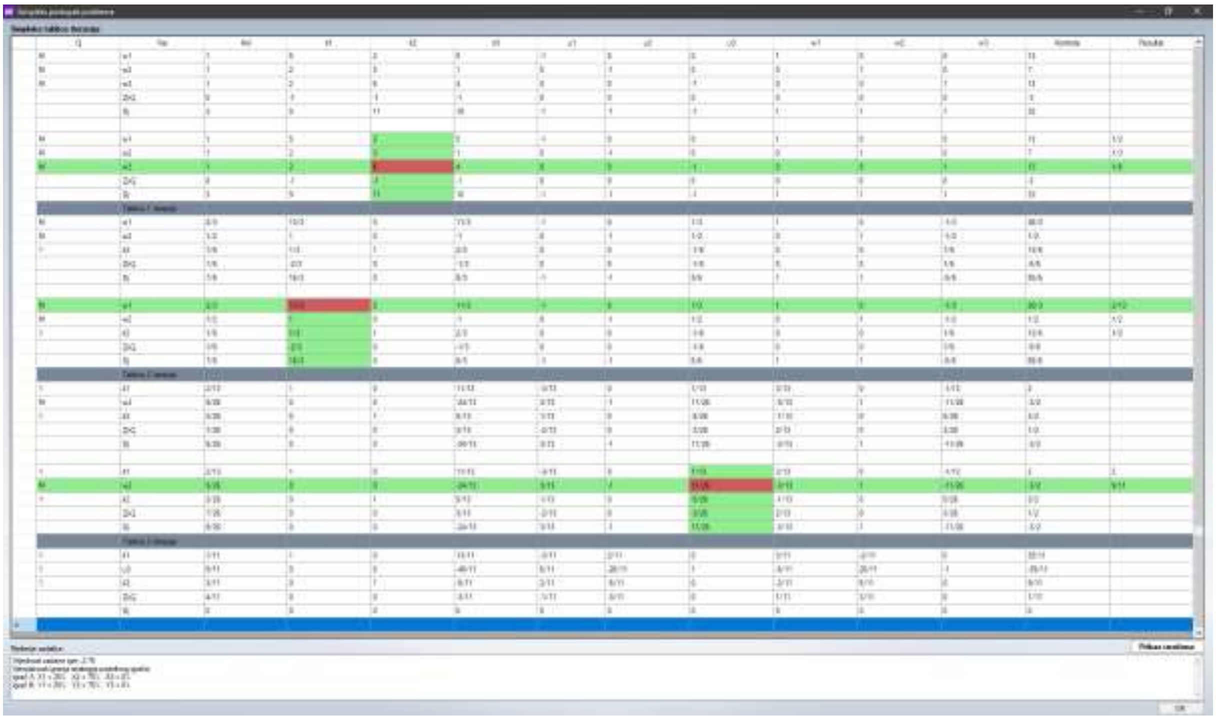
Slika 15. Unesena protuprirodna matrična igra

Protuprirodne igre mogu se rješavati uz pomoć linearnog programiranja, odnosno simpleks algoritma iako se zna konačni pobjednik igre. No, kako je kod njih bilo opisano, takve igre se češće promatraju i izračunavaju metodama razvijenih s aspekta teorije odlučivanja. Programski alat tako dodatno sadržava izračunavanje optimalne strategije s obzirom na kriterij Laplacea, Savagea i Hurwicza. Taj izračun radi se prije generiranja modela problema, no prikazuje se u istoj formi gdje i modeli. Slika 16. prikazuje tako sva tri izračunata kriterija i najoptimalniju strategiju za igrača A prema pojedinom kriteriju. Također, alat nadalje generira model unesene igre jer ga je moguće riješiti pomoću simpleks algoritma.



Slika 16. Prikaz izračunatih kriterija odabira strategija i dobivenog modela problema

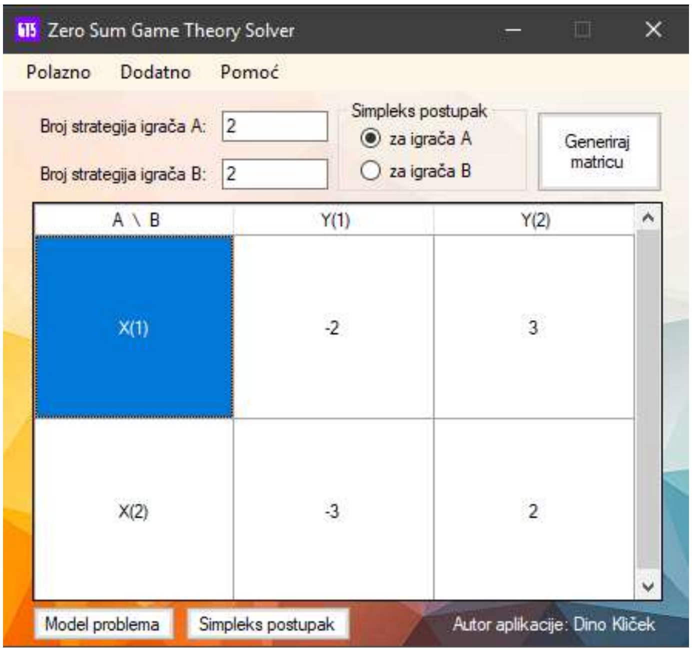
Prema prethodnoj slici može se vidjeti da prema Laplaceovom i Hurwiczovom kriteriju najoptimalnija strategija igrača A je x_2, dok je prema Savageovom kriteriju najoptimalnija strategija x_3. Zanimljivo je usporediti rezultat odabira strategija prema teoriji odlučivanja s onim rezultatom dobivenim pomoću simpleks algoritma. Upotreba simpleks algoritma na prethodnoj protuprirodnoj igri daje rezultate prikazane na sljedećoj slici.



Slika 17. Dobiveno rješenje protuprirodne igre simpleks algoritmom

Prema slici 17. simpleks algoritam za minimum prošao je kroz ukupno tri iteracije i pritom dao sljedeće rješenje. Konačna vrijednost igre iznosi 2,75 u korist igrača A, dok preporučena vjerojatnost odigravanja strategije x_1 iznosi 25%, a strategije x_2 75%. Dakle, rješenja protuprirodnih igara dobivena bilo preko kriterija teorije odlučivanja ili simpleks algoritmom se u većini slučajeva slažu, pa tako i ovdje gdje se naginje odabiru druge strategije.

Drugi najčešći specijalni slučaji koji se javljaju u teoriji igara su kontradiktorne igre čija je glavna karakteristika da imaju rang manji od $2x2$. Takva igra predstavljena je matricom plaćanja (11), dok slika 18. prikazuje njezin unos u programski alat.

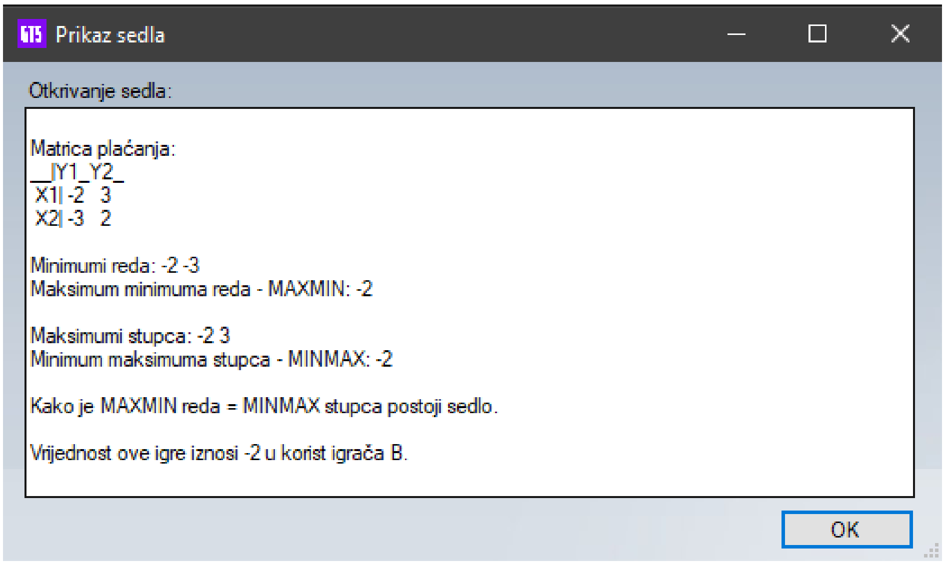


Slika 18. Upisana kontradiktorna matrična igra

Jedna od funkcionalnosti alata je i uklanjanje duplikatnih te dominantnih strategija. Informacije o uklonjenim strategijama prikazuju se u istom prozoru gdje i generirani modeli problema kao što se može vidjeti na sljedećoj slici.

Slika 19. Prikaz objašnjenja dobivanja kontradiktorne igre i dobivenih modela

Prema prethodnom prozoru objašnjeno je kako uklanjanjem dominantne strategije y_2 igrača B dolazi do pojave kontradiktorne igre. Stoga, kako bi ovaj problem bio rješiv ne uklanjaju se dominantne strategije. Njegovo rješavanje svodi se svejedno na metodu sedla kao što slika 20. prikazuje. Time se ponovno potvrđuje ispravnost rada izrađenog programskog alata.



Slika 20. Sedlo kao rješenje kontradiktorne igre

7. Zaključak

Tema ovog diplomskog rada je izrada programskog alata za rješavanje problema teorije igara pomoću simpleks algoritma. Izbor ove teme bazirao se na njezinoj povezanosti s procesom odlučivanja i mogućnosti upotrebe matričnih igara u mnogim djelatnostima. Proces donošenja odluka sastoji se od definiranja i odabira onih rješenja koje će rezultirati željenim ishodom. Svakodnevno se susrećemo s odlučivanjem bilo u privatnom ili poslovnom životu te je ono postalo neizostavan dio naših života. Posebna pažnja donošenju odluka pridaje se u poslovnom okruženju gdje se javlja odlučivanje u konfliktnim uvjetima, a kao takvo najčešće ima direktnu vezu i posljedicu na poslovni uspjeh poduzeća. Samim time želja je uvijek donositi one odluke kojima se ostvaruje najveća korist, odnosno najmanji gubitak za donosioca odluke. Prilikom odlučivanja se stoga koristi teorija igara koja kao teorija interaktivnog odlučivanja opisuje formalnu strukturu konfliktne situacije i pronalazi njezina najbolja rješenja.

Rad je podijeljen na dva glavna dijela, teoretski i praktični dio. U teorijskom dijelu rada objašnjena je teorija igara s aspekta njezinih glavnih karakteristika. Kroz pregled primjene teorije igara može se vidjeti njezina upotreba u različitim djelatnostima, dok danas sve više zahvaća i grane pojedinih računalnih znanosti zbog mogućnosti modeliranja i donošenja optimalnih rješenja u specifičnim situacijama. Matrične igre u radu su prikazane u obliku matrice plaćanja, dok je također navedeno nekoliko metoda za njihovo rješavanja. Univerzalni pristup rješavanju problema teorije igra omogućuje linearno programiranje uz pomoć simpleks algoritma. Glavni fokus ovog rada stavljen je na svođenje matrice plaćanja na problem linearnog programiranja koji se nadalje može lako riješiti upotrebom simpleks algoritma. Na primjeru konkretne konfliktne situacije iz prakse kreirana je matrična igra sa svojom pripadnom matricom plaćanja koja je poslužila za objašnjenje postupka svođenja igre na linearni problem. Za dobivanje optimalnog rješenja konkretne situacije opisani su koraci simpleks algoritma za maksimum zajedno sa konačnim dobivenim rješenjem.

U praktičnom dijelu rada prikazan je izrađeni programski alat koji se zasniva na opisanoj teoriji i postupku rješavanja problema iz teorijskog dijela rada. Kroz taj dio rada opisani su njegovi prozori, odnosno sučelja alata i funkcionalnosti koje ona nose. Upotrebom konkretnog problema iz prakse potvrdilo se da izrađeni programski alat daje valjane rezultate, odnosno identični su onim dobivenim ručnim izračunom. Stvaranje takvog programskog alata koji omogućuje rješavanje matričnih igara s nultom sumom je ujedno bio i cilj ovog rada. Dakle, takav alat kao ulazne podatke uzima početno zadanu matricu plaćanja određene igre, dok kao rezultat vraća optimalne strategije za svakog igrača zajedno s vrijednošću igre. Alat prvo koristi von Neumannon minimaks teorem za provjere postojanja sedla, odnosno čistih strategija u unesenoj matrici plaćanja. Ne pronalaženjem sedla alat pretvara matricu plaćanja u problem linearnog programiranja kojeg zatim rješava pomoću simpleks metode, odnosno simpleks algoritma. Sustav na kojem se alat bazira je proširen tako da korisnik može vidjeti rješavanje unesenog problema korak po korak preko tablica iteracije i njihovih koraka izračuna. Na taj način izrađeni alat može poslužiti korisniku kao pomoć za brzo rješavanje određenog problema teorije igara. Također, alat može poslužiti kao pomoć osobama koje rade s linearnim programiranjem i problemima teorije igara pružanjem detaljnog provedenog postupka načina rješavanja. Kako bi se osiguralo da program ima visoku razinu pouzdanosti i robusnosti, provedeno je mnoštvo postupaka za upravljanje pogreškama kako bi se dobio intuitivan i koncizan sustav.

Za zaključak cjelokupnog rada može se navesti korisnost primjene teorije igara u svakodnevnom životu. Teorija igara omogućuje ostvarenje željenog cilja, odnosno pobjede i onda kada objektivno ona nije na vidiku. Upravo se to može vidjeti da je moguće iz prikazanog konkretnog primjera konfliktne situacije između Varkoma i Grada Lepoglave. Prema pretpostavljenoj matrici plaćanja i definiranim strategijama, teorija igra omogućuje Gradu Lepoglavi da se dobivenim optimalnim strategijama efikasno obrani protiv strategija preuzimanja lokalnih vodovoda od strane Varkoma. Iako je igrač Varkom pobjednik takve igre, on je pobjednik s jako malom dobivenom korisnošću cjelokupne igre. Nekada su konkretne situacije definirane takvim postavkama i ograničenjima na temelju kojih uz svo iskustvo i znanje nije moguće polučiti željeni ishod. U takvim situacijama ni teorija igara neće biti od koristi. Teorija igara će nam pomoći svaki puta kada god postoji barem mala naznaka moguće pobjede maksimiziranjem dobitka ili ako stvari krenu lošim putem minimiziranje gubitka. Izrađeni alat može olakšati svima donošenje boljih odluka u strateškim situacijama. Također, alat omogućuje bolje razumijevanje određene situacije kroz promatranje posljedica koje nastanu odabirom pojedinih strategija, kao i kroz posljedice koje nastanu zbog nedostatka svih utvrđenih pravila i strategija. Poznavanje i upotreba teorije igara ne stvara donositelja odluke nadmoćnijim u odnosu na druge sudionike, ali zasigurno omogućuje da ostvare bolje rezultate i time budu bliže željenom ishodu.

Popis literature

Austen-Smith, D., & Banks, J. S. (1998). Social Choice Theory, Game Theory, and Positive Political Theory. *Annual Review of Political Science*, *1*(1), 259–287. https://doi.org/10.1146/annurev.polisci.1.1.259

Barković Bojanić, I., & Ereš, M. (2013). Teorija igara i pravo. *Pravni vjesnik : časopis za pravne i društvene znanosti Pravnog fakulteta Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku*, *29*(1), 59–76.

Barković, D. (2001). *Operacijska istraživanja* (2. izmjenjeno i dopunjeno izdanje). Osijek: Ekonomski fakultet.

Brkić, L. (2002). Temeljni koncepti teorije igara u međunarodnoj ekonomiji. *Politička misao : časopis za politologiju*, *39*(3), 75–87.

Dobrenić, S. (1974). *Linerarno programiranje*. Varaždin: Fakultet organizacije i informatike.

Dobrenić, S. (1978). *Operativno istraživanje*. Varaždin: Fakultet organizacije i informatike.

Dukić, G., Turkalj, D., & Sesar, M. (2008). Sustav podrške marketing-odlučivanju baziran na teoriji igara. *Ekonomski vjesnik*.

Fricker, R. D. (2006). Game Theory in an Age of Terrorism: How Can Statisticians Contribute? U A. G. Wilson, G. D. Wilson, & D. H. Olwell (Ur.), *Statistical Methods in Counterterrorism* (str. 3–7). https://doi.org/10.1007/0-387-35209-0_1

Kalpić, D., & Mornar, V. (1996). *Operacijska istraživanja*. Zagreb: Zeus.

Kapor, P. (2017). Teorija igara: sistemski pristup i razvoj. *Megatrend revija*, *14*, 153–282. http://dx.doi.org/10.5937/MegRev1701253K

Kopal, R., & Korkut, D. (2011). *Teorija igara-praktična primjena u poslovanju*. Zagreb: Comminus : Visoka poslovna škola Libertas.

Kopal, R., & Korkut, D. (2016). *Uvod u teoriju igara* (3. nepromijenjeno izd). Zagreb: Visoko učilište Effectus - visoka škola za financije i pravo.

Kreko, B. (1966). *Linearno programiranje*. Beograd: Savremena administracija.

Lemaire, J. (1984). An Application of Game Theory: Cost Allocation. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *14*(1), 61–81. https://doi.org/10.1017/S0515036100004815

Liang, X., & Xiao, Y. (2013). Game Theory for Network Security. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, *15*(1), 472–486. https://doi.org/10.1109/SURV.2012.062612.00056

Neralić, L. (2003). *Uvod u matematičko programiranje 1*. Zagreb: Element.

Novak, J. (2019, siječanj 25). Varkom po sili Zakona mora pripojiti ivanečki Ivkom i sve male lokalne vodovode. Preuzeto 18. travanj 2019., od 7Plus Regionalni Tjednik website: https://regionalni.com/varkom-po-sili-zakona-mora-pripojiti-ivanecki-ivkom-i-sve-male-lokalne-vodovode/

Pašagić Škrinjar, J., Abramović, B., & Brnjac, N. (2015). The use of game theory in urban transport planning. *Tehnički Vjesnik (Strojarski Fakultet)*.

Petrić, J. (1979). *Operaciona istraživanja* (5. izdanje). Beograd: Savremena administracija.

Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2005). *Mikroekonomija* (5. izdanje). Zagreb: Mate.

Roljić, L. (2017). Reafirmacija praktične primjenjivosti teorije igara. *Primus : naučno-stručni časopis*, *3*(1). Preuzeto od http://primus-global.org/images/trece_izdanje/pdf/reafirmacija_prakti%c4%8cne_primjenljivosti_teorije_igara.pdf

Sikavica, P., Hunjak, T., Begičević Ređep, N., & Hernaus, T. (2014). *Poslovno odlučivanje* (1. izdanje). Zagreb: Školska knjiga.

Von Neuman, J., & Morgenstern, O. (1953). *Games and economic behaviour*. Princeton: Princeton university press.

Popis slika

Popis tablica