Transportni problemi s nelinearnim vezama

Anamarija, Jagačić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N

Anamarija Jagačić

TRANSPORTNI PROBLEMI S NELINEARNIM VEZAMA

DIPLOMSKI RAD

Varaždin, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Anamarija Jagačić

Matični broj: 44805/16-R

Studij: Ekonomika poduzetništva

TRANSPORTNI PROBLEMI S NELINEARNIM VEZAMA

DIPLOMSKI RAD

Mentorica:

Prof. dr. sc. Vesna Dušak

Varaždin, rujan 2019.

Anamarija Jagačić

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni/diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor/Autorica potvrdio/potvrdila prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

Razlikujemo transportne probleme linearnog programiranja kod kojih su funkcija cilja i ograničenja izraženi u obliku linearnih funkcija, te transportne probleme nelinearnog programiranja kod kojih su u matematičkom modelu nelinearne veze. Transportni problemi često koriste linearne matematičke modele za rješavanje nelinearnih programa, zanemarujući činjenice da promatrani problemi često nisu vezani nelinearnim vezama. Za rješavanje nelinearnih transportnih problema potrebno je koristiti posebne metode koje će pratiti potrebe i specifičnosti, "anomalija", transportnog problema. Te metode olakšavaju pronalazak optimalnog rješenja transporta.

Ključne riječi:

transport, linearno programiranje, nelinearne veze, metode rješavanja transportnih problema, traženje optimalnog rješenja prijevoza

Sadržaj

1. Uvod 1
2. Metode i tehnike rada 2
3. Linearno programiranje 3
   3.1. Standardni problem 4
   3.2. Kanonski problem 4
   3.3. Metode linearnog programiranja 5
      3.3.1. Grafička ili elementarna metoda 5
      3.3.2. Simpleks metoda 5
      3.3.3. Metode za rješavanje problema transporta 6
4. Transportni problem 8
   4.1. Opći transportni problem 8
   4.2. Zatvoreni transportni problem 10
   4.3. Otvoreni transportni problem s viškom u ponudi 11
   4.4. Otvoreni transportni problem s viškom u potražnji 12
   4.5. Degeneracija u transportnom problemu 12
   4.6. Primjena metoda za rješavanje problema transporta 13
      4.6.1. Metoda sjeverozapadnog kuta 13
      4.6.2. Metoda najmanjih troškova 13
      4.6.3. Vogelova metoda 14
      4.6.4. Metoda skakanja s kamena na kamen 14
      4.6.5. MODI metoda 15
5. Nelinearni transportni problemi 16
   5.1. Barsovljeva metoda 17
      5.1.1. Primjena Barsovljeve metode 17
   5.2. Metoda Zuhovickoga i Avdejeve 20
      5.2.1. Primjena metode Zuhovickoga i Avdejeve 21
   5.3. Hammerova metoda 23
      5.3.1. Primjena Hammerove metode 24
   5.4. Rao – Garfinkelova metoda 32
   5.5. Metoda Romanovskog 33
      5.5.1. Primjena metode Romanovskog 34
6. Zaključak 37

Popis literature 39

Popis tablica 40

1. Uvod

Transport predstavlja premještanje ljudi i dobara s jednog mjesta na drugo. Postoje različiti oblici transporta i različita prijevozna sredstva uz pomoć kojih se vrši transport. Cilj transporta je premjestiti određenu količinu dobara s jednog mjesta na drugo u najkraćem mogućem vremenu i uz najniže troškove. Iz toga proizlazi problem transporta, a to je problem linearnog programiranja kod kojeg se premještaj dobara s jednog na drugo mjesto mora obaviti uz minimalne troškove.

Cilj ovog rada je upoznati se s teorijskim pojmovima i matematičkim metodama vezanim uz transportne probleme.

Rad se sastoji od pet poglavlja. Nakon uvoda te metoda i tehnika rada, u trećem poglavlju rada ukratko su opisani modeli linearnog programiranja, budući da je problem transporta bio jedan od prvih definiranih u terminima linearnog programiranja.

U četvrtom poglavlju rada prikazani su različiti modeli transportnog problema te metode uz koje se ti problemi rješavaju.

Peto, posljednje poglavlje, najvažniji je dio rada jer je u ovom dijelu objašnjena glavna tema ovog rada, a to su transportni problemi s nelinearnim vezama. Ovdje su navedene i opisane različite metode za rješavanje tih problema, te nekoliko zadataka riješenih uz pomoć tih metoda.

Na samom kraju rada nalaze se zaključak te popis literature i tablica.

2. Metode i tehnike rada

Prilikom izrade teorijskog dijela rada koristit će se sekundarni izvori, to jest stručna i znanstvena literatura, kako bi se što bolje upoznalo s terminologijom vezanom uz linearno programiranje, transport i matematičke metode u prometu.

U praktičnom dijelu rada uz pomoć jedne od metoda navedenih u teorijskom dijelu rada biti će riješen jedan transportni problem s nelinearnim vezama u poduzeću X.

3. Linearno programiranje

Operacijska istraživanja su višedisciplinarna grana matematike koja omogućuje rješavanje najsloženijih i najzahtjevnijih teorijskih i praktičnih znanstvenih problema i zadataka, te dokazivanje ili opovrgavanje znanstvenih i drugih hipoteza o brojnim pojavama u prirodi i društvu. Operacijska istraživanja omogućuju pronalaženje optimalnih rješenja, projekata, modela i odluka u svim primarnim, sekundarnim, tercijarnim, kvartarnim i kvintarnim djelatnostima. Jedna od tematskih jedinica koja redovito sadrži operacijska istraživanja je i linearno programiranje. (Zelenika, 2016.)

Modeli linearnog programiranja služe za prikazivanje strukture modela matematičkog programiranja. Modeli linearnog programiranja imaju niz prednosti: (Brajdić, 2012.)

- jednostavan proces modeliranja,
- jednostavna struktura modela,
- jednostavan algoritam za rješavanje modela,
- jednostavna teorija,
- opće primjenjiva metoda.

Kod linearnog programiranja postoje tri kategorije čimbenika s kojima se operira kako bi se odredilo optimalno rješenje, a to su: (Petrić, 1988. prema Brajdić, 2012.)

- ulazni čimbenici, oni koji su zadani uvjetima gospodarenja, proizvodnje, potrebama i troškovima,
- izlazni čimbenici, koje karakterizira rezultat djelatnosti ili akcije,
- strukturalni čimbenici, koje karakterizira proces rada, tehnologije, uzajamne veze i odnosi, organizacija.

Modeli linearnog programiranja određuju kombinacije uzajamno povezanih čimbenika, koji od niza mogućih kombinacija predstavljaju onu najpovoljniju, a ta kombinacija mora zadovoljiti dana ograničenja i kriterij optimalnosti. (Brajdić, 2012.)

Svaki problem linearnog programiranja mora imati tri kvantitativne komponente, a to su kriterij (prihod ili trošak) i cilj (minimum ili maksimum u zadanim uvjetima), alternativni procesi koji služe za postizanje cilja i ograničene resurse kao uvjet za postizanje cilja. Kako bi se problem prikazao u obliku matematičkog modela, sve nezavisnosti koje se mogu kvantificirati potrebno je prikazati u obliku sustava jednadžbi ili nejednadžbi linearnog tipa. (Brajdić, 2012.)

Osnovna postavka linearnog programiranja je da za svaki originalni problem postoji i jedan njegov dual.

3.1. Standardni problem

Standardnim problemom linearnog programiranja naziva se onaj linearni problem kod kojeg su sve relacije u ograničenjima (osim uvjeta nenegativnosti) istog tipa, s time da su kod problema maksimuma sve relacije ≤ , a kod problema minimuma ≥ . Ako se standardni problem maksimuma uzima kao originalni problem, tada je problem minimuma njegov dual. (Brajdić, 2012.)

Definicija standardnog problema maksimuma glasi: (Pašagić, 2003.)

maksimizirati linearnu funkciju

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \; \leq \; b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \; \geq \; 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

3.2. Kanonski problem

Kanonski problem ima veliku važnost kod rješavanja problema linearnog programiranja, a posebno ako je problem zadan u standardnoj formi. Za primjenu najvažnijih metoda za rješavanje problema linearnog programiranja potrebno je prvo originalne standardne i opće probleme pretvoriti u kanonski problem. Kanonski problem može biti problem maksimuma ili problem minimuma. Po konvenciji se polazi od kanonskog problema maksimuma. (Brajdić, 2012.)

Definicija kanonskog problema maksimuma je sljedeća: (Brajdić, 2012.)

treba maksimizirati funkciju cilja

$$Z = C' X$$

uz uvjete

$$AX = B$$

$$X \geq 0.$$

Nejednakosti su u uvjetima standardnog problema maksimuma postale jednakosti, to jest u kanonskom problemu maksimuma u ograničenjima postoje samo jednadžbe. (Brajdić, 2012.)

3.3. Metode linearnog programiranja

Neke od osnovnih metoda linearnog programiranja su: (Brajdić, 2012.)

- grafička ili elementarna metoda,
- simpleks metoda,
- metode rješavanja transportnih problema.

3.3.1. Grafička ili elementarna metoda

Tipični problemi linearnog programiranja mogu se formulirati tako da budu rješivi na elementaran način, a pri tome je važno da se u problemu javljaju samo dvije varijable. Kod primjene elementarne metode često se koristi i grafička metoda, no to nije nužno. (Brajdić, 2012.)

Faze rješavanja elementarno rješivih problema linearnog programiranja su: (Brajdić, 2012.)

- formulacija zadatka,
- tabelarni prikaz zadatka,
- matematički model problema,
- rješavanje modela elementarnom metodom,
- interpretacija dobivenog rješenja.

Nedostatak elementarne metode je što se može primijeniti samo u slučaju da postoje dvije varijable.

3.3.2. Simpleks metoda

Simpleks metoda je najčešće primjenjivana opća metoda rješavanja problema linearnog programiranja. Ta metoda se uz niz modifikacija primjenjuje u svim tipovima problema linearnog programiranja. No kako bi se riješio uz pomoć te metode, problem je potrebno pretvoriti u kanonski oblik, ako to već nije. Osnovna značajka simpleks metode je iterativnost, dakle proces rješavanja se sastoji od niza koraka i pri tome se u svakom koraku dobiva neko bazično rješenje. Bazično rješenje za probleme maksimuma osigurava da trenutačna vrijednost funkcije cilja je najmanje jednaka ili veća od vrijednosti u prethodnom koraku, a za probleme minimuma da je vrijednost funkcije cilja najmanje jednaka ili manja od vrijednosti u prethodnom koraku. (Brajdić, 2012.)

Prvi korak kod simpleks metode je utvrđivanje početnog rješenja. Formiranje početnog rješenja ovisi da li je zadani problem maksimuma ili minimuma, te da li je problem zadan u kanonskoj ili nekoj drugoj formi. Problem koji nije zadan u kanonskoj formi, uz posebnosti u pogledu transformacije različitih tipova problema, treba prvo svesti na kanonski oblik. Ako je zadan problem maksimuma polazi se od rješenja u kojem je najmanja dopustiva vrijednost strukturnih varijabli i najmanja vrijednost funkcije cilja, a to je nula i sa svakim sljedećim korakom u metodi ta se vrijednost povećava. Kod problema minimuma kreće se od najvećeg mogućeg rješenja i ono se sa svakim korakom smanjuje. (Brajdić, 2012.)

Kada se formira početno rješenje, tada se kreće s njegovim poboljšanjem. Poboljšano početno rješenje se ispituje da li je optimalno ili ne, a ako nije tada se i to rješenje poboljšava. Svaki taj korak poboljšanja naziva se iteracija. Ako se utvrdi da je dobiveno rješenje optimalno tada je primjena metoda završena. Moguće je da se dođe i do zaključka kako ne postoji optimalno rješenje i tada je također primjena metoda gotova. (Brajdić, 2012.)

Ako je dobiveno optimalno rješenje, potrebno je očitati optimalne vrijednosti varijabli i funkcije cilja za originalni problem i za njegov dual. Dobiveno optimalno rješenje potrebno je i interpretirati, no tu postupak ne mora biti gotov. Iz dobivenih rezultata može se izvesti cijeli niz daljnih analiza; traženje cjelobrojnog rješenja, traženje vrijednosti duala i analiza osjetljivosti. (Brajdić, 2012.)

Simpleks algoritam je postupak kojim se dobiva novo rješenje uz testiranje da li je rješenje optimalno ili ne. Simpleks algoritam mora omogućiti: (Brajdić, 2012.)

- da se odabere varijabla koja će zamijeniti neku od varijabli iz baze,
- da se odabere varijabla koja će izaći iz baze,
- transformiranje sustava ograničenja na način da nova varijabla zamijeni staru,
- utvrđivanje da li je novo rješenje optimalno ili ne.

Detaljan opis i primjenu simpleks metode moguće je prikazati u tabelarnom obliku i bez tabelarnog prikaza.

3.3.3. Metode za rješavanje problema transporta

U teoriji i praksi u transportnim, prometnim i logističkim industrijama razvile su se različite metode operacijskih istraživanja koje omogućuju optimizaciju transporta, manipuliranja i distribucije dobara s različitih ishodišta do različitih odredišta, a one se učinkovito, uspješno i racionalno primjenjuju u konvencionalnom transportu i prometu. (Zelenika, 2016.)

Transportne probleme moguće je rješavati na više načina. Metode za rješavanje transportnih problema baziraju se na simpleks metodi, a najpozantije metode za nalaženje početnog rješenja su: (Brajdić, 2012.)

- metoda sjeverozapadnog kuta,
- metoda najmanjih troškova i
- Vogelova metoda.

Postoje i specifične metode za testiranje optimalnosti dobivenog i nalaženje povoljnijeg rješenja, a to su: (Brajdić, 2012.)

- metoda skakanja s kamena na kamen i
- MODI metoda.

Spomenute metode se mogu, a ponekad i moraju kombinirati, npr. u prvom koraku se koristi metoda najmanjih troškova kako bi se dobilo početno rješenje, a nakon toga se koristi MODI metoda kako bi se testiralo da li je dobiveno rješenje optimalno ili ne. (Brajdić, 2012.)

Detaljan opis metoda za rješavanje problema transporta biti će u četvrtom poglavlju rada, točka 4.6.

4. Transportni problem

Transport obuhvaća premještanje dobara i prevoženje osoba. Transport je moguć samo kretanjem predmeta transporta između prostorno udaljenih mjesta. U skup transportnih poslova ubrajaju se premještanje i svi procesi vezani uz ukrcaj, iskrcaj i prekrcaj predmeta transporta. Transportni proces odvija se između pošiljatelja i primatelja predmeta transporta. (Božičević, Kovačević, 2002.)

Problem transporta je jedan od prvih problema koji su bili formulirani u terminima linearnog programiranja. (Lukač, Neralić, 2013.)

S obzirom na to da transportni problem ima karakteristične postavke matematičkog modela, taj problem se izdvaja kako bi se omogučio pojednostavljeni proces nalaženja optimalnog rješenja. Transportnim problemom se određuje optimalan plan transporta istovrsne robe kada su poznati: (Pašagić, 2003.):

- broj ishodišta,
- broj odredišta,
- količine tereta u ishodištima,
- količine tereta koje potražuje odredište,
- cijena transporta po jedinici tereta od ishodišta do odredišta.

Optimalan plan transporta podrazumijeva onaj plan koji od ishodišta do odredišta ima minimalne ukupne troškove transporta. (Pašagić, 2003.)

Kod transportnih problema kao kriteriji se koriste minimalni trošak transporta, minimalno vrijeme transporta ili kombinacija. Postoji nekoliko tipova transportnih problema uz minimalan trošak transporta, a to su: (Brajdić, 2012.)

- opći transportni problem,
- zatvoreni transportni problem,
- otvoreni transportni problem s viškom u ponudi,
- otvoreni transportni problem s viškom u potražnji.

4.1. Opći transportni problem

Kod općeg transportnog problema promatra se određeni tip robe za koji postoji *m* ishodišta ili mjesta proizvodnje I_1, I_2, ..., I_n i *n* odredišta ili mjesta za potrošnju O_1, O_2, ..., O_n. Poznati su sljedeći realni brojevi: (Brajdić, 2012.)

a_i = proizvodnja ili raspolaganje u svakom mjestu I_i, $i = (1,2, ..., m)$

b_j = potražnja u svakom odredištu O_j $j = (1, 2, ..., n)$

c_{ij} = cijena transporta jedinice robe iz I_i u O_j .

Plan transporta čini matricu $X = [xij]$ tipa $m*n$ s realnim nenegativnim elementima u kojoj je x_{ij} količina robe koja se u određenom vremenu prevozi iz ishodišta I_i u odredište O_j. (Brajdić, 2012.)

Pod tim pretpostavkama problem transporta se nalazi u sljedećem: (Brajdić, 2012.)

1. da li postoje planovi transporta takvi da količina robe koja se šalje iz ishodišta I_i ne prelazi proizvedenu količinu

   $X_{i1} + X_{i2} + ... + X_{in} \leq a_i \quad i = (1,2, ..., m)$,

   i da istovremeno roba koja se isporučuje u O_j nije manja od zahtjeva b_j

   $X_{1j} + X_{2j} + ... + X_{mj} \geq b_j \quad j =(1,2, ..., n)$
2. nalaženje među mogućim planovima transporta jedan optimalan (najmanji trošak) *min* $\sum x_{ij} \; c_{ij}$

Dakle, potrebno je odrediti količine robe x_{ij}, $i = (1,2, ..., m); j = (1,2, ..., n)$, tako da potražnja b_j na tržištu j bude zadovoljena, da ponuda a_i centra proizvodnje i ne bude premašena i sve to uz minimalne troškove prijevoza. (Brajdić, 2012.)

Iz toga proizlazi da matematički model problema izgleda ovako: (Brajdić, 2012.)

$$min \sum_{i=1}^{m} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad c_{ij}\, x_{ij}$$

uz uvjete

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \; \leq a_i \; i = (\, 1,2, \dots, m\,),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \; \geq \; b_j \; j = (\, 1, 2, \dots, n\,)$$

$$x_{ij} \; \geq 0 \; za \; svaki \; par \; i, j.$$

Pretpostavka je da su $c_{ij} > 0$, $a_i < 0$ i $b_j > 0$.

U gore navedenom modelu za ograničenja u odredištima postoji mogućnost da se isporuči više robe nego se potražuje. Ako se ta mogućnost ne dopusti, pa je dozvoljeno isporučiti onoliko robe koliko se u odredištu traži, tada se model mijenja i izgleda ovako: (Brajdić, 2012.)

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij}$$

uz uvjete

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \, i = (1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \, j = (1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; za \; svaki \; par \; i, j.$$

Postoji nekoliko mogućnosti koje se mogu javiti unutar posljednje navedenog modela. Taj model u sebi uključuje tri vrste modela, a to su: (Brajdić, 2012.)

a) zatvoreni transportni problem gdje je ponuda jednaka potražnji,
b) otvoreni model transporta:
    - transportni problem s viškom u ponudi,
    - transportni problem s viškom u potražnji.

Kod otvorenog transportnog problema prije primjene neke metode za rješavanje, prvo je potrebno primijeniti postupak formalnog prelaska otvorenog na zatvoreni transportni problem i to na način koji je specifičan za pojedini tip otvorenog transportnog problema. (Brajdić, 2012.)

4.2. Zatvoreni transportni problem

Zatvoreni transportni problem naziva se i problem Hitchcocka po Franku L. Hitchcocku koji je 1941. godine formulirao taj problem. Pitanje u zatvorenom modelu je kako distribuirati neki homogeni proizvod direktno iz ishodišta *m* s fiksnom ponudom a_i, $i = (1,2, ..., m)$ na *n* odredišta s fiksnom potražnjom b_j, a tako da se iscrpi sva ponuda i zadovolji sva potražnja uz minimalne ukupne troškove transporta. (Brajdić, 2012.)

U ovom modelu uzima se da su troškovi svake pošiljke x_{ij} iz *i* – tog ishodišta u *j* – to odredište proporcionalni veličini pošiljke. (Brajdić, 2012.)

U matematičkoj formi potrebno je naći matricu $X = [\, x_{ij} \,]$, $i = (1,2, ..., m)$ $j = (1,2, ..., n)$ uz minimalnu sumu

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

uz uvjete

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; za\ svako\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; za\ svako\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0\ za\ svaki\ par\ i, j$$

i iz toga proizlazi da je

$$\sum_i a_{ij} = \sum_j b_{ij}$$

U modelu postoji nekoliko pretpostavki: (Brajdić, 2012.)

- troškovi i uvjeti su linearni,
- homogeni proizvod
- pošiljke idu direktno iz ishodišta u odredište,
- uzima se da je $a_i > 0$ i $b_j < 0$, c_{ij} u pogledu predznaka nema ograničenja.

4.3. Otvoreni transportni problem s viškom u ponudi

Kod otvorenog transportnog problema s viškom u ponudi uvjet je da $\sum a_i > \sum b_j$ i u tom slučaju transportni problem izgleda: (Brajdić, 2012.)

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

uz uvjete

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \; i = (1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; j = (1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0\ za\ svaki\ par\ i, j.$$

Kod postupka prelaska otvorenog problema s viškom u ponudi na zatvoreni transportni problem, to je najjednostavnije i najpreglednije učiniti u tabelarnoj formi. S obzirom da je suma raspoloživosti a_i veća od sume potražnje b_j ograničenja treba pisati u obliku jednakosti. Kako bi se to postiglo, ubacuje se izmišljeno odredište O_n+1. U to odredište se isporučuje višak ponude $\sum a_i$ - $\sum b_j$, s cijenom transporta $c_{k,n+1}$ koja je jednaka nuli za sve vrijednosti $k = 1,2, ..., m$. (Brajdić, 2012.)

4.4. Otvoreni transportni problem s viškom u potražnji

Kod otvorenog transportnog problema s viškom u potražnji uvjet je da je $\sum a_i < \sum b_j$ i tada transportni problem izgleda: (Brajdić, 2012.)

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

uz uvjete

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; i = (1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \; j = (1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; za \; svaki \; par \; i, j.$$

U ovom slučaju, suma raspoloživosti a_i je manja od sume potražnje b_j, a za prelazak na zatvoreni problem ograničenja ponovno treba pisati u obliku jednakosti. Za pisanje jednakosti ovdje se ubacuje izmišljeno ishodište I_{m+1} iz kojeg se potražuje manjak ponude $\sum b_j$ - $\sum a_i$. Cijena transporta $c_{m+1,k}$ jednaka je nuli za sve vrijednosti $k = 1,2, ..., n$. (Brajdić, 2012.)

4.5. Degeneracija u transportnom problemu

Degeneracija se često pojavljuje u transportnom problemu. S obzirom da je u problemu transporta svaka bazična varijabla jednaka razlici parcijalnih suma od a_i i b_j, tada će bazična varijabla biti jednaka nuli kada su te parcijalne sume jednake, što u tom slučaju dovodi do pojave degeneracije. Degeneracija ne zadaje probleme kod rješavanja problema transporta. (Lukač, Neralić, 2013.)

Kod degeneriranog bazičnog rješenja neka od $n + m - 1$ bazičnih rješenja su jedanaka nuli. Takvo bazično rješenje ne može se poboljšati, već je potrebno degenerirano rješenje pretvoriti u nedegenerirano. Degenerirano rješenje se pretvara u nedegenerirano ubacivanjem fiktivnog tereta u neko popunjeno polje koje nam je potrebno za izračunavanje vrijednosti u_i i v_j, pri čemu fiktivni teret može, ali i ne mora nestati do kraja traženja rješenja. (Brajdić, 2012.)

4.6. Primjena metoda za rješavanje problema transporta

Rješavanje transportnog problema započinje određivanjem početnog baznog rješenja. Ako se u tom prvom koraku ne dobije optimalno rješenje, tada je u sljedećem koraku potrebno nizom iteracija prijeći s početnog baznog rješenja na bazična rješenja koja su sve bliže optimalnom rješenju. Postoji više metoda za određivanje početnog baznog rješenja, a njihov cilj je da se dođe do početnog baznog rješenja koje će biti bliže optimalnom rješenju. (Pašagić, 2003.)

4.6.1. Metoda sjeverozapadnog kuta

Kod metode sjeverozapadnog kuta započinje se u lijevom gornjem kutu (sjeverozapadnom) kutu u kojem se nalazi polje (1,1) i kreće se prema desnom donjem (jugoistočnom) kutu koje sadržava polje *(m,n).* U prvom koraku određuje se vrijednost varijable $x_{11} = min \{ a_1, b_1 \}$. Na taj način je iscrpljena ponuda a_1 ishodišta 1 ili je zadovoljena potražanja b_1 odredišta 1. Ako je $a_1 > b_1$ tada se nastavlja kretanje po prvom retku i uzima se $x_{12} = min \{ a_1 – b_1, b_2 \}$, a ako je $b_1 > a_1$ tada se nastavlja kretanje po prvom stupcu uzimajući $x_{21} = min \{ b_1 – a_1, a_2 \}$. U drugom koraku su ponovno iscrpljena ponuda drugog ishodišta ili zadovoljena potražnja drugog odredišta. Na taj način kretanja, u svakom se koraku iscrpi ukupna ponuda ishodišta ili se zadovolji ukupna potražnja odredišta, sve dok se ne dobije moguće rješenje. U svakom koraku metode je zadovoljeno jedno ograničenje, ponude ili potražnje, i nakon $m + n – 1$ koraka zadovoljeno je upravo $m + n – 1$ ograničenja. S obzirom na to da je rang matrice A problema transporta jednak $m + n – 1$, znači da postoji i toliko nezavisnih ograničenja, pa će i preostalo zavisno ograničenje biti zadovoljeno. Na taj način dostiže se jugoistočni kut i dobiva bazično rješenje. No, ova metoda ne uzima u obzir troškove transporta, pa početno bazično rješenje može biti daleko od optimalnog rješenja. (Lukač, Neralić, 2013.)

4.6.2. Metoda najmanjih troškova

Metoda najmanjih troškova u obzir uzima troškove transporta, pa se uz pomoć te metode dobiva početno bazično rješenje bliže optimalnom rješenju. Kod ove metode najprije je potrebno u matrici troškova pronaći polje s minimalnim troškovima transporta. Ako se polje nalazi u retku *r* i stupcu *s*, kao bazična varijabla x_{rs} uzima najveća količina robe koja se može prevesti iz ishodišta *r* u odredište *s*, $x_{rs} = min \{ a_r, b_s \}$. Nakon toga se ispusti redak ili stupac matrice troškova u kojem je iscrpljena ponuda ili zadovoljena potražnja i odredi se nova ponuda ili potražnja. Postupak se ponavlja na ostalim stupcima i recima. Ako se u postupku dogodi da se minimum troškova postiže na više polja, tada se uzima polje na koje se može staviti veća količina robe. U slučaju degeneracije, $a_r = b_s$, tada treba ispustiti samo redak *r* ili stupac *s.* Postupak se ponavlja tako dugo dok ne ostane samo jedno polje za popuniti i tada se i ono popunjava i ispušta se redak ili stupac u kojem se ono nalazi, te se dobiva početno bazično rješenje problema transporta. (Lukač, Neralić, 2013.)

4.6.3. Vogelova metoda

Kod Vogelove metode potrebno je prvo za svaki redak i stupac matrice troškova izračunati pripadnu razliku. Razlika se određuje tako da se u promatranom retku ili stupcu jedinični troškovi poredaju po veličini počevši od najmanjeg. Razlika za redak ili stupac je jednaka razlici drugog po veličini i najmanjeg jediničnog troška u tom retku ili stupcu. Ako se najmanji jedinični trošak doseže na dva ili više polja u retku ili stupcu, razlika je nula. Nakon toga se u retku ili stupcu koji ima najveću razliku izabere kao bazična varijabla ona koja ima najmanji jedinični trošak. Ako je najveća razlika u retku *r*, a minimalni trošak u tom retku je u stupcu *s,* tada je $x_{rs} = min \{ a_r, b_s \}$. Ako se najveća razlika doseže u nekoliko redaka u razmatranje se može uzeti bilo koja od njih. Redak ili stupac u kojem je iscrpljena ponuda ili zadovoljena potražnja se ispušta iz daljnjeg razmatranja. Postupak se uz odgovarajuće promjene ponude i potražnje ponavlja na ostalim retcima i stupcima matrice troškova. Postupak se ponavlja tako dugo dok ne ostane jedno nepopunjeno polje koje se popuni odgovarajućom vrijednošću ponude i potražnje i ispusti se redak i stupac u kojem se nalazi polje. Kada su svi retci i stupci ispušteni iz razmatranja postupak je završen i na taj način je dobiveno početno bazično rješenje. Vogelova metoda se smatra približnom metodom za rješavanje problema transporta jer se dobiveno početno bazično rješenje u mnogo slučajeva samo malo razlikuje od optimalnog rješenja. (Lukač, Neralić, 2013.)

4.6.4. Metoda skakanja s kamena na kamen

Kod metode skakanja s kamena na kamen vrši se prebacivanje određene količine robe s popunjenog polja u neko prazno polje, to jest bira se nova ruta s novom količinom robe. Prvi korak kod ove metode je odabir nepopunjenog polja u koje će se staviti neka količina robe. Kao kriterij odabira polja služi ocjena nepopunjenih polja koja je najveća, tj. najveća apsolutna vrijednost. Na odabrano polje se stavlja „kamen“ koji se označava s *x* i tako se određuje gdje će se staviti nepoznata količina robe *x*. Na temelju parnog broja „skakanja“, a polazeći od nepopunjenog polja *x* i vraćajući se na to polje, određuje se s kojih popunjenih polja će se prebacivati neka količina robe. Skakanje započinje s polaznog polja označenog s *x* i skače se na odgovarajuće popunjeno polje u retku ili stupcu gdje se nalazi polje *x*. Odgovarajućim poljem smatra se ono popunjeno polje koje daje alternativu da se s tog polja skače dalje na drugo popunjeno polje do kojeg se mora doći suprotnim skokom od onog od kojeg se došlo na to polje. Ako se na polje došlo skakanjem po retku, tada se iz tog polja mora skočiti na drugo popunjeno polje skakanjem po stupcu i obrnuto. Postupak se ponavlja sve dok se ne skoči natrag na polazno polje *x*. Postoji mogućnost da će se skakanjem izostaviti neka popunjena polja. Određivanje koja količina robe će se prebacivati vrši se tako da polazeći od polja *x* se označuju sva polja koja su se koristila prilikom skakanja naizmjenično s + i –. Na poljima označenima s – izabire se najmanja količina i ta količina se dodaje količinama u poljima označenima s +, a oduzima u poljima označenima s –. Ovom metodom dobije se novo poboljšano rješenje, koje se može testirati primjenom MODI metode. (Brajdić, 2012.)

4.6.5. MODI metoda

MODI metodom testira se optimalnost dobivenog rješenja, no prije same primjene metode potrebno je utvrditi da li je dobiveno rješenje degenerirano. Degeneracija se utvrđuje uz pomoć formule $m + n - 1$ i pokazuje nam broj pozitivnih bazičnih rješenja. Ako broj bazičnih pozitivnih rješenja nije jednak vrijednosti koja se dobije primjenom formule, nego je manji, postoji problem degeneracije i zadatak se ne može riješiti uz pomoć MODI metode, a u suprotnom može se pristupiti primjeni metode. (Brajdić, 2012.)

Bit MODI metode je u tome da se ocjenjuje vrijednost nepopunjenih polja primjenom formule: (Brajdić, 2012.)

$$c`_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \leq 0.$$

Ako je vrijednost svih nepopunjenih polja ≤ 0, dobiveno rješenje je i optimalno. No, ako je u nekom polju pozitivna vrijednost, mora se primijeniti neka druga metoda kako bi se dobilo novo poboljšano rješenje. Da bi se primjenila ranije spomenuta formula, potrebno je izračunati vrijednosti parametara u_i i v_j, primjenom sljedećih formula: (Brajdić, 2012.)

$$u_i = c_{ij} - v_j$$

$$v_j = c_{ij} - u_i$$

Takav sustav je rješiv ako je zadana vrijednost nekog parametra, a uobičajeno se uzima da je $u_1 = 0$. Dalje se mogu izračunati vrijednosti ostalih parametara tako da se u prvom redu u kojem je parametar $u_1 = 0$ nađu sva popunjena polja. Za ta polja se izračunaju odgovarajući v_j, te se ponovno izračunavaju one vrijednosti u_i koje odgovaraju popunjenim poljima u odgovarajućim kolonama od izračunatih v_j. Postupak naizmjeničnog računanja se primjenjuje sve dok se ne izračunaju sve vrijednosti od u_i i v_j. (Brajdić, 2012.)

5. Nelinearni transportni problemi

Godine 1959. A.S. Barsov je prvi puta u okviru matematičkog programiranja formulirao i riješio problem transporta s obzirom na vrijeme kao kriterij optimalnosti. Problem se sastoji u pronalasku optimalnog programa po kojem će se sav teret prevesti do odredišta u najkraćem mogućem roku. (Martić, 1973.)

Formulacija problema je sljedeća: (Martić, 1973.)

$$min\, max\, t_{ij}$$

$$x\ (\ i,j\ ) \in M$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ =\ a_i\ \ (\ i = 1,2,\dots,m\ )$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ = b_j\ (\ j = 1,2,\dots,n\ )$$

$$x_{ij}\ \geq 0$$

gdje je t_{ij} vrijeme prijevoza iz *i*-tog ishodišta u *j*-to odredište, $X=[\ x_{ij}]$ oznaka za mogući program transporta, a $M=\{\ (i,j)\ |\ x_{ij} > 0\ \}$ je skup ruta po kojima će se teret kretati.

Dakle, potrebno je minimalizirati maksimalno vrijeme potrebno za obavljanje transporta. Maksimum se traži preko svih ruta *(i,j)* na kojima je zamišljen tok tereta, a minimum preko svih mogućih programa. (Martić, 1973.)

Funkcija cilja *z* zapisuje se ovako: (Martić, 1973.)

$$z = max\ t_{ij} * \ \delta\ (\ x_{ij}\ )$$

gdje je

$$\delta\left(x_{ij}\right) = \begin{cases} 0\ ako\ je\ x_{ij}\ = 0, \\ 1\ ako\ je\ x_{ij}\ > 0. \end{cases}$$

Takva funkcija nije linearna i zato je to nelinearni problem transporta. Takvi problemi nastaju kod transporta lako kvarljivih proizvoda ili vojnog materijala gdje je trošak transporta od sekundarne važnosti. (Martić, 1973.)

5.1. Barsovljeva metoda

Barsov je riješio problem transporta po proceduri koja se zasniva na simpleks metodi. Pažnja je ograničena samo na bazična rješenja jer uvjeti problema su jedanki onima u klasičnom transportnom problemu. Ova procedura u konačnici vodi do optimalnog rješenja. (Martić, 1973.)

Koraci Barsovljeve metode su sljedeći: (Martić, 1973.)

1. određivanje početnog baznog rješenja x_1,
2. utvrđivanje maksimalnog vremena t_{x1} po programu x_1,
3. precrtavanje polja *(i, j)* u tabeli transporta sa $t_{ij} > t_{x1}$ i tako se isključe iz daljnjeg razmatranja,
4. istraže se preostala polja kako bi se vidjelo da li se može konstruirati „zatvoreni put“ u kojem će biti t_{x1}, kako bi se odgovarajuća bazična varijabla svela na nulu ili kako bi se smanjila njezina vrijednost,
5. izmijeni se program po konstruiranom zatvorenom putu, ako je novi program x_2 takav da je $t_{x2} = t_{x1}$, tada se ponavlja četvrti korak, a kada ponavljanje tog postupka ne dovede do boljeg rješenja tada je postignuto rješenje optimalno,
6. ako je novo rješenje x_2 takvo da je $t_{x2} < t_{x1}$, ponavljaju se treći i četvrti korak.

5.1.1. Primjena Barsovljeve metode

Ovdje je prikazana primjena Barsovljeve metode na numeričkom primjeru s matricom vremena transporta i sljedećim količinama ponude a_i i potražnje b_j: (Martić, 1973.)

Tablica 1.Početna matrica vremena transporta

							a_i
	20	27	30	35	40	45	28
	18	35	40	42	50	20	22
	40	30	35	25	48	30	36
	21	45	28	32	40	44	14
b_j	20	15	17	12	8	28	

(Prema Martić, 1973.)

Početno rješenje konstruirano je po pravilu sjeverozapadnog kuta i izgleda ovako: (Martić, 1973.)

Tablica 2. Početno bazično rješenje x_1

X_1

20 20	27 8	30	35	40	45
18	35 7	40 15	42	50	20
40	30	35 2	25 12	48 8	30 14
21	45	28	32	40	44 14

(Prema Martić, 1973.)

U tabeli x_1 maksimalno vrijeme transporta je $t_{x1} = t35 = 48.$ Precrtano je polje (2,5) gdje je zabilježeno najveće vrijeme transporta. Označen je zatvoreni put koji obuhvaća polje (3,5) s maksimalnim vremenom. Kada se izmjeni program u tom zatvorenom putu, dobije se novi program x_2 u kojem je maksimalno vrijeme transporta $t_{46} = 44$. (Martić, 1973.)

Tablica 3. Novo rješenje x_2

	X_2						a_i
	20 20	27 8	30	35	40	~~45~~	28
	18	35 7	40 15	42	~~50~~	20	22
	40	30	35 2	25 12	~~48~~	30 22	36
	21	~~45~~	28	32	40 8	44 6	14
b_j	20	15	17	12	8	28	

(Prema Martić, 1973.)

U tabeli x_2 precrtana su polja (1,6), (2,5), (3,5) i (4,2) te je konstruiran zatvoreni put po kojem će se izvršiti promjene u toj tabeli kako bi se dobio bolji program x_3. Vrijeme trajanja operacija transporta skraćeno je za 4 vremenske jedinice, $t_{x3} = 40 = t_{23} = t_{45}$. Precrtana su i polja (2,4) i (4,5). Obje bazične varijable $x_{23} = 15$ i $x_{45} = 8$ mogu se svesti na nulu, tako da se druga samo premjesti na polje (1,5) sa $t_{15} = 40$, te se tako dobije program x_3 koji je optimalan, ali nije i jedini. Optimalan može biti i program $x_{12} = 13$, $x_{13} = 7$, $x_{15} = 8$, $x_{21} = 20$, $x_{22} = 2$, $x_{34} = 8$, $x_{36} = 28$, $x_{43} = 10$ i $x_{44} = 4$, uz sve ostale nebazične varijable jednake nuli. Više mogućih rješenja proizlazi iz proizvoljnog izbora nove bazične varijable. (Martić, 1973.)

Tablica 4. Program x_3

			X_3				a_i
	20 20	27 8	30	35	40	45	28
	18	35 7	40 15	42	50	20	22
	40	30	35 2	25 6	48	30 28	36
	21	45	28	32 6	40 8	44	14
b_j	20	15	17	12	8	28	

(Prema Martić, 1973.)

5.2. Metoda Zuhovickoga i Avdejeve

Zuhovicki i Avdejeva predstavili su dvije procedure za rješavanje problema vremena transporta. Prva procedura je modifikacija simpleks metode, a druga prikazuje kako se do optimalnog rješenja može doći ako nismo ograničeni samo na bazična rješenja. (Martić, 1973.)

U prvoj metodi, transformacije u simpleks tabeli vrše se na ovaj način: (Martić, 1973.)

1. izabire se bazična varijabla s maksimalnim vremenom t_{x1} i ona napušta bazu,
2. u retku r nasuprot izabranoj varijabli traži se ključni elemenat a_{rs} koji se nalazi između elemenata $a_{rj} > 0,$ a koji zadovoljavaju uvjet

$$\frac{a_{ro}}{a_{rj}} = min\left(\frac{a_{io}}{a_{ij}}\right), a_{ij} \ > 0,$$

   i nalaze se u stupcu j pod $t_{ij} < t_{x1}$. Ako više elemenata a_{rj} ispunjava ta tri zahtjeva, izabire se elemenat koji je u stupcu t_{ij} najmanji.
3. varijabla koja ulazi i varijabla koja izlazi izmjenjuju mjesta,
4. u retku nove bazične varijable elementi se dijele s ključnim elementom, a na mjesto ključnog elementa dolazi njegov reciprok,
5. elementi u stupcu ključnog elementa dijele se s negativnom vrijednosti ključnog elementa,
6. ostali elementi transformiraju se kao u običnoj simpleks tabeli.

Druga metoda Zuhovickoga i Avdejeve se u nekim koracima razlikuje od Barsovljeve metode.

Koraci ove metode su sljedeći: (Martić, 1973.)

1. određivanje početnog baznog rješenja $x_{1,}$
2. utvrđivanje maksimalnog vremena t_{x1} po programu x_1,
3. precrtavanje svih praznih polja *(i,j)* sa $t_{ij} \geq t_{x,}$
4. konstruiranje zatvorenog puta, polazeći od polja t_x tako da se u njemu za minimalni elemenat x smanjuju veličine $x_{ij} > 0$, a povećavaju veličine x_{ij} sa $t_{ij} < t_{x.}$

Takav način konstrukcije zatvorenog puta i izmjene programa omogućuje da se iz baznog programa prijeđe na nebazični i obrnuto. U nizu programa kojim se približavamo optimalnom, mogu doći i nebazični programi. Barsovljev niz baznih programa koji teže optimalnom je poseban slučaj tog slobodnije formiranog niza. (Martić, 1973.)

5.2.1.Primjena metode Zuhovickoga i Avdejeve

Na sljedećem primjeru prikazan je način rada po drugoj metodi Zuhovickoga i Avdejeve: (Martić, 1973.)

Tablica 5. I program

					a_i
	2 - (13)	4 (9)	9 +	13	22
	3 +	10 (2)	12 - (10)	10	12
	8	3	6 (5)	7 (9)	14
b_j	13	11	15	9	

(Prema Martić, 1973.)

Prvi program je bazičan i konstruiran po metodi sjeverozapadnog kuta, a maksimalno vrijeme je $t_{x1} = t_{23} = 12$ te je precrtano polje (1,4) $t_{14} = 13$. Kako bi se reducirao $x_{23} = 10$ na nulu konstruiran je zatvoreni put koji obuhvaća dva prazna polja. (Martić, 1973.)

Tablica 6. II program

					a_i
	2 - 3	4 + 9	9 10	13	22
	3 + 10	10 - 2	12	10	12
	8	3	6 5	7 9	14
b_j	13	11	15	9	

(Prema Martić, 1973.)

Drugi program je nebazičan i može se poboljšati po naznačenom kružnom putu. U drugom programu su samo pozitivne varijable x_{ij}, pa će nakon izmjena opet nastati bazičan program. Treći prgram je ponovno bazičan te je i optimalan, a vrijeme prijevoza je 9 jedinica. (Martić, 1973.)

Tablica 7. III program

					a_i
	2 1	4 11	9 10	13	22
	3 12	10	12	10	12
	8	3	6 5	7 9	14
b_j	13	11	15	9	

(Prema Martić, 1973.)

5.3. Hammerova metoda

P. L. Hammer svoju pažnju je skrenuo na probleme minimalizacije vremena transporta, te se bavi nekom vrstom postoptimalizacije Barsovljevog problema. Za Hammera je optimalno rješenje Barsovljevog problema „gotovo optimalno“, a u skupu „gotovo optimalnih“ rješenja traži ono što minimalizira sumu (Martić, 1973.)

$$\sum x_{ij,}\ (\ i,j\ \in N\ ),$$

gdje je

$$N = \{(\ i,j\ )|\ t_{ij} = z^*\},$$

$$\text{a } z^* = min\,max\,t_{ij}, x\ (\ i,j\ ) \in M.$$

Suma predstavlja teret za transport za koje je potrebno vrijeme z^*. Takvo rješenje Hammer naziva optimalnim, i to je onaj „gotovo optimalni“ program po kojemu se što manje moguće tereta prevozi do posljednjeg trenutka trajanja operacije transporta. Svaki optimalni program po Hammeru je optimalan i po Barsovu, ali ne i obrnuto. (Martić, 1973.)

Hammerova metoda sastoji se od tri koraka: (Martić, 1973.)

1. određivanje jednog bazičnog mogućeg rješenja,
2. pronađe se jedno susjedno bolje bazično rješenje,
3. izvodi se drugi korak sve dok se ne ustanovi da nijedno susjedno bazično moguće rješenje nije bolje od razmatranog.

U općim crtama ova metoda se ne razlikuje od Barsovljeve, no Barsov i Hammer daju različite odgovore na to kako pronaći bolje susjedno bazično rješenje. Hammer je u tome mnogo određeniji i upućuje kako se ta polja istražuju. (Martić, 1973.)

Hammer skup polja M, u kojima su smještene pozitivne bazične varijable, dijeli u podskupove $L_0, L_1, ..., L_n$. U L_0 je jedno od polja za koje vrijedi $t_{hk} = t^*$, a u L_1 su polja iz M koja su u h-tom retku ili k-tom stupcu. U L_2 se nalaze polja iz M koja su u istom retku ili stupcu s poljima iz L_1. Nakon toga se svakom retku i pridružuje indeks $u_{h,k}\ (\ i\ )$. Ako elementi iz M koji pripadaju retku i jesu $(\ i,j_1\ ) \in L_{q1}$, $(\ i,\ j_2\ ) \in L_{q2}$, te ako je $q\ (\ i\ )$ najmanji od indeksa $q_1,\ q_2 ... q_n$, tada slijedi da je: (Martić, 1973.)

$$u_{h,k}\,(\,i\,) = \begin{cases} 0 \; ako\; je\; q\;(\,i\,) paran, \\ 1\; ako\; je\; q\;(\,i\,) neparan. \end{cases}$$

Na isti način se svakom stupcu *j* pridružuje indeks $v_{h,\,k}\,(\,j\,)$. Ako su elementi od *M* koji pripadaju stupcu *j* $(i_1, j) \in L_{S1}$, $(i_2, j) \in L_{S2}$ i $q\,(\,i\,)$ najmanji od indeksa $q_1, q_2 \ldots q_n$, tada je: (Martić, 1973.)

$$v_{h,k}\,(\,j\,) = \begin{cases} 0 \; ako\; je\; s\;(\,j\,) paran, \\ 1\; ako\; je\; s\;(\,j\,) neparan. \end{cases}$$

Nakon toga se za svako $(\,i,j\,) \notin M$ moraju izračunati sljedeće tri veličine: (Martić, 1973.)

- $z_{h,k}\,(\,i,j\,) = u_{h,k}\,(\,i\,) + v_{h,k}\,(\,j\,) - 1,$
- $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1\; ako\; je\; t_{ij} = t^*, \\ 0\; ako\; je\; t_{ij} < t^*, \\ m+n\; ako\; je\; t_{ij} > t^*, \end{cases}$
- $Z\,(\,i,j\,) = \varepsilon_{ij} + \sum\limits_{(\,h,k\,) \in R} z_{h,k}\,(\,i,j\,)$

Uz pomoć tih veličina se određuje skup *S* onih $(\,i,\,j\,) \notin M$ čije uvođenje u bazu vodi jednom boljem rješenju: (Martić, 1973.)

$$S = \{\,(\,i,\,j\,) \mid (\,i,\,j\,) \in M,\; Z\,(\,i,\,j\,) < 0\,\}.$$

Drugi korak Hammerove metode sastoji se od tri potkoraka: (Martić, 1973.)

1. određivanje *S* prema $S = \{\,(\,i,\,j\,) \mid (\,i,\,j\,) \in M,\; Z\,(\,i,\,j\,) < 0\,\}$,
2. pronađe se $(\,i,\,j\,) \in S$ za koji je apsolutna vrijednost od $Z\,(\,i,\,j\,)$ maksimalna,
3. uvođenje $(\,i,\,j\,)$ u bazu kao u klasičnom transportnom problemu.

Hammerova metoda se u općim crtama ne razlikuje od Barsovljeve, ali postoje neke razlike. Barsov i Hammer različito odgovaraju na to kako pronaći susjedno bolje bazično rješenje. Barsov istražuje polja s vremenom manjim od maksimalnog i konstruira zatvoreni put, a Hammer je mnogo određeniji i upućuje na to kako se ta polja istražuju. (Martić, 1973.)

5.3.1.Primjena Hammerove metode

Primjena Hammerove metode biti će prikazana na istom primjeru kao i Barsovljeva metoda u poglavlju 5.1.1.

Prvi korak Hammerove metode isti je kao i kod Barsovljeve metode. Početno rješenje x_1 dobije se primjenom metode sjeverozapadnog kuta. Maksimalno vrijeme je $t^* = 48 = t_{35}$ i prema tome se određuje veličina $z_{3,5}\ (i, j)$ za $(i, j) \notin M$. U daljnjoj tabeli u poljima (i, j) izvan baze M nalaze se veličine $z_{3,5}\ (i, j)$, a u poljima iz baze M skupovi L_r kojima ta polja pripadaju. (Martić, 1973.)

Tablica 8. Tabela z (3, 5)

	$z_{3,5}(i, j)$						$u_{3,5}(i)$
	L_5	L_4	0	0	-1	0	0
	0	L_3	L_2	0	-1	0	0
	0	0	L_1	L_1	L_0	L_1	0
	0	0	0	0	-1	L_2	0
$v_{3,5}(j)$	1	1	1	1	0	1	

(Prema Martić, 1973.)

Na marginama tabele su indeksi u i v. U samo jednom polju (3,5) je maksimalno vrijeme t^* i to je $Z\ (i, j) = \varepsilon_{ij} + z_{3,5}\ (i, j)$. Tabela $Z\ (i, j)$ za $(i, j) \notin M$ sastavlja se na način da su u njoj prazna polja $(i, j) \in M$, a budući da je $\varepsilon_{25} = m + n = 10$ i $z_{3,5}(2,5) = -1$, tada je $Z\ (2,5) = 10 - 1 = 9$. (Martić, 1973.)

Tablica 9. Tabela Z_1

$Z\ (i, j)$

		0	0	-1	0
0			0	9	0
0	0				
0	0	0	0	-1	

(Prema Martić, 1973.)

U tabeli se nalaze dva polja s negativnim *Z*, pa postoje dvije mogućnosti: uvođenje u bazu varijablu x_{15} ili varijablu x_{45}. U ovom primjeru u bazu se uvodi varijabla x_{15}. (Martić, 1973.)

Tablica 10. Program x_2

X_2

20 20	27 0	30	35	40 8	45
18	35 15	40 7	42	50	20
40	30	35 10	25 12	48	30 14
21	45	28	32	40	44 14

(Prema Martić, 1973.)

Novi bazični program je degenerirani i maksimalno vrijeme je $t^* = 44 = t_{46}$. U sljedeće dvije tabele prikazane su veličine $z_{4,\,6}$ i *Z* i tu se vidi mogućnost izbora četiri nove bazične varijable i svaki od ta četiri izbora vode boljem rješenju. (Martić, 1973.)

Tablica 11. Tabela z (4, 6)

	$z_{4,\,6}\,(i,\,j)$						$u_{4,\,6}\,(i)$
	L_6	L_5	0	0	-1	0	1
	0	L_4	L_3	0	-1	0	1
	0	0	L_2	L_2	0	L_1	1
	-1	-1	-1	-1	-1	L_0	0
$v_{4,\,6}\,(j)$	0	0	0	0	0	0	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 12. Tabela Z_2

Z (*i, j*)

		0	0		10
0			0	10	0
0	0			10	
-1	9	-1	-1	-1	

(Prema Martić, 1973.)

Hammerova metoda ne ide dalje od te konstatacije, no izvan te procedure može se odrediti najbolji izbor, a to je onaj koji će uzrokovati najveću redukciju bazične varijable x_{46}. Izbor x_{44} izaziva redukciju varijable x_{46} za 12 jedinica i to je najveća redukcija, te kada se izrši promjena programa po tom kriteriju dobije se sljedeći program x_3: (Martić, 1973.)

Tablica 13. Program x_3

X_3

20 20	27 0	30	35	40 8	45
18	35 15	40 7	42	50	20
40	30	35 10	25	48	30 26
21	45	28	32 12	40	44 2

(Prema Martić, 1973.)

Budući da je maksimalno vrijeme po tom programu $t_{46} = 44$, potrebno je izračunati $z_{4,6}$ i Z. U tabeli Z nalaze se tri negativne jedinice i izabere li se bilo koje polje sa -1 varijabla x_{46}

reducirati će se na nulu. Nadalje, ako se u bazu uvede varijabla x_{41} dobije se program x_4. (Martić, 1973.)

Tablica 14. Tabela z (4, 6)

	$z_{4,6}(i, j)$						$u_{4,6}(i)$
	L_6	L_5	0	1	L_6	0	1
	0	L_4	L_3	1	0	0	1
	0	0	L_2	1	0	L_1	1
	-1	-1	-1	L_1	-1	L_0	0
$v_{4,6}(j)$	0	0	0	1	0	0	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 15. Tabela Z_3

Z (*i*, *j*)

		0	1		10
0			1	10	0
0	0		1	10	
-1	9	-1		-1	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 16. Program x_4

X_4

20 18	27 2	30	35	40 8	45
18	35 13	40 9	42	50	20
40	30	35 8	25	48	30 28
21 2	45	28	32 12	40	44

(Prema Martić, 1973.)

Program x_4 je nedegenerirani bazični program, a testiranje tog programa provodi se izračunavanjem veličina $z_{1,\ 5,}$ $z_{2,\ 3}$ i Z. U bazi su dva polja (1, 5) i (2, 3) s maksimalnim vremenom $t^* = 40$, a u tabeli $Z\ (\ i,\ j\ )$ tri negativne jedinice, iz čega proizlazi da niti program x_4 nije optimalan. Uvede li se (1, 3) ili (4, 3) u bazu bazična varijabla x_{23} reducira se za dvije jedinice, a ako se u bazu uvede (2, 6) bazična varijabla svodi se na nulu, te se tada dobije novi program x_5. (Martić, 1973.)

Tablica 17. Tabela z (1, 5)

	$z_{1,\ 5}\ (i,\ j)$						$u_{1,\ 5}\ (i)$
	L_1	L_1	0	0	L_0	0	0
	0	L_2	L_3	0	-1	0	0
	0	0	L_4	0	-1	L_5	0
	L_2	0	0	L_3	-1	0	0
$v_{1,\ 5}\ (j)$	1	1	1	1	0	1	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 18. Tabela z (2, 3)

			$z_{2,3}(i, j)$				$u_{2,3}(i)$
	L_3	L_2	-1	0	L_3	-1	0
	0	L_1	L_0	0	0	-1	0
	1	1	L_1	1	1	L_2	1
	L_4	0	-1	L_5	0	-1	0
$v_{2,3}(j)$	1	1	0	1	1	0	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 19. Tabela Z_4

$Z(i, j)$

		-1	0		9
0			10	9	-1
2	1		1	10	
	10	-1		0	9

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 20. Program x_5

X_5

18	2			8	
	13				9
		17			19
2			12		

(Prema Martić, 1973.)

Po programu x_5 maksimalno vrijeme je $t^* = 40 = t_{15}$, a teret koji se transportira do kraja trajanja operacije transporta je manji za devet jedinica. Za testiranje programa x_5 potrebne su dvije tabele, $z_{1,5}(i, j)$ i $Z(i, j)$. U posljednjoj tabeli nema negativnih elemenata, pa se zaključuje da je program x_5 optimalan. Program x_4 je „gotovo optimalan“, a u Barsovljevom smislu je optimalan. (Martić, 1973.)

Tablica 21. Tabela z (1, 5)

	$z_{1,5}(i, j)$						$u_{1,5}(i)$
	L_1	L_1	0	0	L_0	0	0
	0	L_2	0	0	-1	L_3	0
	0	0	L_5	0	-1	L_4	0
	L_2	0	0	L_3	-1	0	0
$v_{1,5}(j)$	1	1	1	1	0	1	

(Prema Martić, 1973.)

Tablica 22. Tabela Z_5

Z (*i, j*)

		0	0		10
0			10	9	
1	0		0	9	
	10	0		0	

(Prema Martić, 1973.)

5.4. Rao – Garfinkelova metoda

Rao – Garfinkelova metoda zasniva se na redukciji problema vremena transporta na klasični transportni problem s matricom troškova koja se mijenja u toku iteracija rješavanja. Na sličan način problem je rješavao i I. V. Romanovski, koji do optimalnog rješenja dolazi rješavajući niz klasičnih problema transporta koji se međusobno razlikuju u matrici troškova. (Martić, 1973.)

Koraci Rao – Garfinkelove metode su: (Martić, 1973.)

1. pronalazak početnog baznog mogućeg rješenja *x,* po npr. metodi sjeverozapadnog ugla,
2. konstruiranje matrice troškova s elementima

$$c_{ij} = \begin{Bmatrix} 1\ ako\ je\ t_{ij} = t^* \\ 0\ ako\ je\ t_{ij} < t^* \\ M\ ako\ je\ t_{ij} > t^* \end{Bmatrix}$$

   gdje je M proizvoljno velik broj, t^* je maksimalno vrijeme t_{ij} po početnom programu *x*
3. rješava se problem transporta s matricom troškova C = [cij], po npr. MODI metodi,
4. ako je vrijednost funkcije cilja 0, ponavalja se postupak iz drugog i trećeg koraka, a ako nije 0, tada je postignuto rješenje X optimalno.

5.5. Metoda Romanovskog

Ideja I. V. Romanovskog je da se kod rješavanja nelinearnih transportnih problema za osnovni cilj zada smanjenje maksimalnog vremena transporta dostave prema baznom planu, te se zbog toga ispituje mogućnost smanjena vrijednosti: (Pašagić, 2003.)

$$t_{max} = max\ t_{ij}$$

gdje je

$$t_{ij} = \begin{Bmatrix} c_{ij}, za\ x_{ij} > 0 \\ 0, za\ x_{ij} = 0 \end{Bmatrix}.$$

Ako se uspije pronaći bazično rješenje za koje je t_{max} najmanji između svih t_{max} koji odgovaraju bazičnim rješenjima $x = \{ x_{ij} \}$, tada je takvo rješenje optimalno. U problemu se traži plan transporta gdje je vrijeme zadnje dostave minimalno i jednako: (Pašagić, 2003.)

$$min\ max\ t_{ij}$$

$$x_k \in \{X\} \qquad x_{ij}^k \in x_k$$

Koraci metode Romanovskog su sljedeći: (Pašagić, 2003.)

1. pronalazak početnog bazičnog rješenja,
2. određivanje t_{max} u početnom bazičnom rješenju,
3. veličine c_{ij} mijenjaju se veličinama h_{ij}, koje se određuju:
$$h_{ij} = \begin{Bmatrix} 0\ za\ c_{ij} < t_{max} \\ 1\ za\ c_{ij} = t_{max} \\ M\ za\ c_{ij} > t_{max} \end{Bmatrix}$$
gdje je M dovoljno velik pozitivan broj.
Uvođenjem veličina h_{ij} prometnice se dijele u tri skupine. U prvu skupinu prometnica spadaju prometnice s vremenom prijevoza manjim od maksimalnog, to jest $h_{ij} = 0$, i te su prometnice pogodne za transport. U drugu skupinu spadaju prometnice s vremenom transporta koje je jednako maksimalnom vremenu transporta, to jest $h_{ij} = 1$. U treću skupinu spadaju prometnice kod kojih je vrijeme transporta veće od maksimalnog vremena transporta ($h_{ij} = M$) i one su nepoželjne u novom bazičnom planu. (Pašagić, 2003.)
4. Na kraju se određuju karakteristike nebazičnih polja gdje je $x_{ij} = 0$. Ako su sve karakteristike nenegativne, tada je dobiveno bazično rješenje optimalno, a pri tome se maksimalno vrijeme transporta prema dobivenom planu može umanjiti. Ako je i samo

jedna karakteristika negativna, traži se novo bazično rješenje i za njega se izračunavaju karakteristike nebazičnih polja te se postupak ponavlja sve do pronalaska optimalnog rješenja. (Pašagić, 2003.)

5.5.1. Primjena metode Romanovskog

Na farmama u Hrvatskoj uzgajaju se krave koje daju svježe mlijeko koje je svaki dan potrebno prevesti do proizvodnih centara poduzeća „X“. Problem koji se javlja kod prijevoza sirovine jest kvarljivost, pa je svježe mlijeko potrebno što prije dopremiti do jednog od ukupno tri proizvodna centra poduzeća „X“. Količine mlijeka koje farme svakog dana daju su sljedeće: a_i (80, 70, 50) litara. Količine potrebne u proizvodnim centrima su: b_j (60, 100, 40) litara. Cilj je minimizirati vrijeme transporta svježeg mlijeka od farmi do proizvodnih centara, a vrijeme se mjeri u satima.

Tablica 23. Plan x_1

	O_1	O_2	O_3	
I_1	7 60	6 20	6	80
I_2	8	4 70	4	70
I_3	3	3 10	4 40	50
	60	100	40	

(Izvor: autor rada)

U tablici 23. izvršeni su prvi i drugi korak metode Romanovskog. Metodom sjeverozapadnog kuta dobiveno je početno bazično rješenje za koje je $max\ t_{ij} = t_{11} = 7$. Nakon toga se rade transformacije prema trećem koraku metode, te se uz pomoć koeficijenata redaka i stupaca računaju karakteristike nebazičnih polja.

Tablica 24. Treći korak metode Romanovskog

	O_1	O_2	O_3	α_i
I_1	1 - 60	0 + 20	0 0	0
I_2	M M	0 70	0 0	0
I_3	0 + - 1	0 - 10	0 40	0
β_j	1	0	0	

(Izvor: autor rada)

Koeficijenti redaka i stupaca računaju se po formuli $c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, te se uzima da je koeficijent prvog retka jednak nuli, tj. $\alpha_1 = 0$. U tablici 24. prikazani su svi koeficijenti α_i i β_j, te karakteristike nebazičnih polja. Karakteristike nebazičnih polja računaju se po formuli $k_{ij} = c_{ij} – (\alpha_i + \beta_j)$.

Polje (3, 1) ima negativne karakteristike što znači da plan nije optimalan. Sada se to polje uzima za bazično polje. Po lancu (3, 1) – (3, 2) – (1, 2) – (1, 1) unosi se promjena za δ = min { 60, 10 } = 10 i dobije se novo bazično rješenje x_2.

Tablica 25. Plan x_2

	O_1	O_2	O_3	α_i
I_1	1 - 50	0 + 30	0 - 1	0
I_2	M M - 1	0 - 70	0 + - 1	0
I_3	0 + 10	0 1	0 - 40	-1
β_j	1	0	1	

(Izvor: autor rada)

Ovdje se ponovno računaju koeficijenti redaka i stupaca te karakteristike nebazičnih polja. U planu x_2 dva nebazična polja imaju negativne karakteristike, polja (1, 3) i (2, 3), što ponovno znači da plan nije optimalan. Sada se za bazično polje uzima polje (2, 3) jer ono ima manje vrijeme. U tablici 25. po lancu (2, 3) – (2, 2) – (1, 2) – (1, 1) – (3, 1) unose se promjene za δ = min { 70, 50, 40 } = 40 i dolazimo do novog plana x_3.

Tablica 26. Plan x_3

	O_1	O_2	O_3	α_i
I_1	1 / 10	0 / 70	0 / 0	0
I_2	M / M – 1	0 / 30	0 / 40	0
I_3	0 / 50	0 / 1	0 / 1	-1
β_j	1	0	0	

(Izvor: autor rada)

Nakon što u planu x_3 izračunaju karakteristike nebazičnih polja dolazi se do zaključka kako je plan x_3 optimalan jer su sve karakteristike nebazičnih polja pozitivne. Sada se promatraju vremena t_{ij} iz tablice 23. za bazična polja tablice 26. te se dobije $t_{max} = max \{ 7, 6, 4, 4, 3 \} = 7$, što znači da će sve dostave biti obavljene za 7 sati i to se vrijeme ne može skratiti.

6. Zaključak

Glavna tema ovog rada su transportni problemi s nelinearnim vezama. Da bi se ti nelinearni problemi mogli riješiti, najprije je potrebno proučiti metode linearnog programiranja, jer su one temelj za rješavanje nelinearnih problema. Osnovne metode linearnog programiranja su grafička metoda, simpleks metoda i metode za rješavanje transportnih problema. Transportni problemi rješavaju se na više načina, a metode za pronalaženje početnog rješenja su metoda sjeverozapadnog kuta, metoda najmanjih troškova i Vogelova metoda. Kod transportnih problema javljaju se i posebne metode koje služe za testiranje optimalnosti dobivenih rješenja, a to su metoda skakanja s kamena na kamen i MODI metoda. Transportni problem ima karakteristične postavke matematičkog modela, pa se zbog toga taj problem izdvaja kako bi se što jednostavnije došlo do optimalnog rješenja. Optimalno rješenje transportnog problema ovisi o više kriterija, a to mogu biti minimalni troškovi transporta, minimalno vrijeme transporta ili kombinacija. Tipovi transportnih problema uz minimalan trošak transporta su opći transportni problem, zatvoreni transportni problem, otvoreni transportni problem s viškom u ponudi, otvoreni transportni problem s viškom u potražnji. Ako kao glavni kriterij za rješavanje transportnog problema uzimamo minimalno vrijeme transporta, tada dolazimo do nelinearnih transportnih problema. Barsov je prvi puta u okviru matematičkog programiranja formulirao i riješio problem transporta s obzirom na vrijeme kao kriterij optimalnosti. Prema Barsovu, optimalan plan je onaj u kojem će se sva dobra prevesti do odredišta u najkraćem mogućem roku. Za transportne probleme s nelinearnim vezama postoje posebne metode za njihovo rješavanje. Kod Barsovljeve metode traži se optimalno rješenje kroz nekoliko koraka koji se ponavljaju sve dok se ne dobije bazično rješenje gdje više nije moguće smanjiti vrijednost bazične varijable. Kod metode Zuhovickoga i Avdejeve mogu se pojaviti i nebazični pogrami. Za Hammera je optimalno rješenje Barsovljevog problema „gotovo optimalno“. U općim crtama Hammerova metoda se ne razlikuje od Barsovljeve, no Barsov i Hammer daju različite odgovore na to kako pronaći bolje susjedno bazično rješenje, te je Hammer u tome mnogo određeniji i upućuje kako se ta polja istražuju. Rao i Garfinkel te Romanovski na sličan način rješavaju problem. Rao – Garfinkelova metoda bazira se na redukciji problema vremena transporta na klasični transportni problem s matricom troškova koja se mijenja u toku iteracija rješavanja, a Romanovski do optimalnog rješenja dolazi rješavajući niz klasičnih problema transporta koji se međusobno razlikuju u matrici troškova.

U suvremenom svijetu gdje se javljaju različiti oblici transporta i prijevoznih sredstava, navedene metode uvelike olakšavaju pronalazak optimalnog rješenja transporta. S obzirom da je kod nelineranih transportnih problema glavni cilj u što kraćem vremenskom roku dopremiti tražena dobra s ishodišta do odredišta, a ljudima u današnjem svijetu je važno da što prije dobe tražena dobra, ove metode bi mogle poduzećima biti od iznimne važnosti kako bi ona ostvarila svoju konkurentsku prednost i u što kraćem roku zadovoljila vlastite potrebe za dobrima i sirovinama, te zadovoljila potrebe svojih klijenata i kupaca.

Popis literature

[1] Božičević D, Kovačević D (2002) *Suvremene transportne tehnologije,* Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Fakultet prometnih znanosti

[2] Brajdić I (2012) *Matematički modeli i metode poslovnog odlučivanja,* Sveučilište u Rijeci, Opatija, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu

[3] Lukač Z, Neralić L (2013) *Operacijska istraživanja,* Zagreb, Element

[4] Martić Lj (1973) *Nelinearno programiranje: odabrana poglavlja,* Zagreb, Informator

[5] Pašagić H (2003) *Matematičke metode u prometu,* Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Fakultet prometnih znanosti

[6] Zelenika R (2016) *Metode operacijskih istraživanja u kaleidoskopu obrazovnih i znanstvenih industrija,* NAŠE MORE : znanstveni časopis za more i pomorstvo, Vol. 63 No. 1, preuzeto s https://hrcak.srce.hr/154111

Popis tablica

Tablica 1.Početna matrica vremena transporta....18
Tablica 2. Početno bazično rješenje x_1....18
Tablica 3. Novo rješenje x_2....19
Tablica 4. Program x_3....20
Tablica 5. I program....21
Tablica 6. II program....22
Tablica 7. III program....22
Tablica 8. Tabela z (3, 5)....25
Tablica 9. Tabela Z_1....25
Tablica 10. Program x_2....26
Tablica 11. Tabela z (4, 6)....26
Tablica 12. Tabela Z_2....27
Tablica 13. Program x_3....27
Tablica 14. Tabela z (4, 6)....28
Tablica 15. Tabela Z_3....28
Tablica 16. Program x_4....29
Tablica 17. Tabela z (1, 5)....29
Tablica 18. Tabela z (2, 3)....30
Tablica 19. Tabela Z_4....30
Tablica 20. Program x_5....31
Tablica 21. Tabela z (1, 5)....31
Tablica 22. Tabela Z_5....32
Tablica 23. Plan x_1....34
Tablica 24. Treći korak metode Romanovskog....35
Tablica 25. Plan x_2....35
Tablica 26. Plan x_3....36