Funkcije društvenog izbora s preferencijalnim glasanjem

Zovko, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Marko Zovko

FUNKCIJE DRUŠTVENOG IZBORA S PREFERENCIJALNIM GLASANJEM

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Marko Zovko

Matični broj: 0016136631

Studij: Poslovni sustavi

FUNKCIJE DRUŠTVENOG IZBORA S PREFERENCIJALNIM GLASANJEM

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Marcel Maretić

Varaždin, rujan 2021.

Marko Zovko

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni/diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor/Autorica potvrdio/potvrdila prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

____

Sažetak

Rad predstavlja važnije aksiome funkcija društvenog izbora s poznatim prednostima, zamjerkama i nedostacima. Kroz same opise najpoznatijih funkcija društvenog izbora poput Bordine i Condorcetove daje se i kratki povijesni opis te se navode važniji znanstvenici koji su doprinijeli njihovom razvoju. Opisuju se sve značajnije karakteristike tih metoda te njihovi nedostaci. Metode su potkrijepljene primjerima radi lakšeg razumijevanja.

Također se daje opis Arrowljevog teorema kao jednog od najznačajnijih teorema tog područja. U samoj izradi rada korištena su brojna teorijska i praktična istraživanja područja. Cilj je pružiti organizirani prikaz svih relevantnih činjenica na organiziran i pristupačan način.

Ključne riječi: Bordina metoda, Condorcetova metoda, funkcije društvenog izbora, birači, preferencijalno glasanje, Arrowljev teorem

Sadržaj

1. Uvod

Tema rada jesu funkcije društvenog izbora sa preferencijalnim glasanjem. Takve funkcije koriste se u velikoj većini država svijeta u brojnim izborima: od političkih, društvenih, školskih, pa čak i do natjecanja poput „Got talent show“ ili Eurovizije.

Rad opisuje neke od povijesno najznačajnijih poput Bordine i Condorcetove te su opisane njihove dobre i loše strane. U interesu lakšeg shvaćanja navedeno je mnogo primjera koji približavaju razne scenarije koji se mogu dogoditi u tim metodama. Ti primjeri su ponekad uobičajeni opisi kako metoda funkcionira, a ponekad su ekstremni primjeri (ali ipak mogući) koji se mogu dogoditi u tom sustavu.

Naveden je i opisan „Teorem generalne mogućnosti“ (izv. „General Possibility Theorem“), kasnije prozvan, po svome tvorcu Kennethu Arrowu, Arrowljev teorem nemogućnosti ili Arrowljev paradoks. Opisano je što teorem kaže, koje su mu premise i zaključci, kao i daljnje posljedice.

Metode i teorem, svaki u svojim uvodima, imaju opisanu kratku povijesnu crtu u kojoj se govori o tome gdje je i kada koncept smišljen te tko je tvorac kako bi se približila i povijesna komponenta ovih ideja.

2. Metode i tehnike rada

Autor je kao podlogu za pisanje završnog rada koristio literaturu preporučenu od strane mentora, kao i brojne druge izvore sa interneta te knjige. Također su korištene i slike i tablice kako bi se tema bolje približila.

Rad je potpuno teoretski te je potkrijepljen primjerima radi boljeg razumijevanja teme, ali nisu provođena istraživanja već su samo korišteni drugi radovi i djela kako bi se tema obradila.

Popis svih izvora može se pronaći na kraju rada u poglavljima „Popis literature“, „Popis slika“ te „Popis tablica“.

3. Osnovni pojmovi i definicije

Kako bi se sama tema rada mogla razraditi, prvenstveno je potrebno definirati ključne pojmove koji će se u radu koristiti. Ključni pojmovi su sljedeći:

Glasač ili birač – osoba koja odabire između više ponuđenih alternativa na izborima.

Alternative, opcije ili kandidati na izborima – skup svih potencijalnih mogućnosti za koje birači mogu glasati, pritom ih slažući po svojim preferencijama.

Funkcija društvenog izbora – metoda izbora između više opcija kojom se individualne preferencije birača pretvaraju u rezultate izbora koji reprezentiraju preferencije kolektiva svih birača.

Preferencijalno glasanje – metoda izbora gdje birači mogu sve opcije poredati s obzirom na to koje vole više, a koje manje (s obzirom na preferencije).

Diktatorstvo – izbori ovise o glasu jednog birača, odnosno jedan birač sam presuđuje rezultat. Analogno tome, **nedostatak diktatorstva** znači da rezultat izbora ne može biti ekvivalentan izboru jednog birača.

Anonimnost – funkcija izbora sve birače tretira na jednak način. U slučaju zamjene preferencija dvaju birača rezultat ostaje jednak.

Neutralnost – funkcija društvenog izbora tretira sve alternative izbora na jednak način (neutralno). U slučaju zamjene preferencija glasača po pitanju dvaju alternativa, te dvije alternative će svoja mjesta na izborima zamijeniti na ekvivalentan način. Primjerice, ako u izboru između opcija A i B svi glasači opcije A stave opciju B na prvo mjesto, a svi glasači opcije B naprave isto sa opcijom A, opcije A i B mijenjaju mjesta na poretku.

Monotonost – u slučaju da glasač odabere neku od opcija, ta opcija nužno mora rasti ili ostati jednaka u poretku. Glasač ne može svojim davanjem glasa ili povećanjem preferencije za neku opciju učiniti da ta opcija na ljestvici bude rangirana niže nego prije.

Pareto učinkovitost – u slučaju da svaki od birača preferira jednu od opcija više od svih drugih, ta opcija u konačnom poretku mora biti rangirana kao najviša.

Nezavisnost od nevažnih alternativa – poredak između dvaju opcija ovisi isključivo o međusobnom poretku tih dvaju opcija u izborima birača. Druge alternative koje postoje ne bi trebale utjecati na to. Primjerice, ako je opcija A pobijedila opciju B kod svih birača po preferencijama, opcija A u konačnici mora biti rangirana više od opcije B.

Nedostatak impozicije – funkcija društvenih izbora mora omogućiti da određenim promjenama preferencija birača svaka od opcija može završiti na bilo kojem mjestu. Drugačije postavljeno, svaki kandidat mora moći završiti na svakom od mjesta u nekoj kombinaciji izbora birača.

Univerzalnost – bilo koji birač može donijeti bilo koji izbor između ponuđenih opcija, ali ne može donijeti izbor za nešto čega nema na izborima. Svi glasovi moraju biti uračunati i rezultati, u slučaju da su glasovi više puta jednaki, moraju biti jednaki.

4. Condorcetova metoda

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet, francuski je matematičar koji je živio u 18. stoljeću. Postavio je jedan od najpoznatijih kriterija za određivanje pobjednika u izborima sa preferencijalnim glasanjem koju zovemo „Condorcetov uvjet pobjednika". Sve metode koje implementiraju taj uvjet kao glavni uvjet pobjede na izborima zovemo „Condorcetovom metodom". U nastavku će biti opisano kako te metode funkcioniraju te kako se slaže ljestvica kandidata.

Slika 1: Marquis de Condorcet (Izvor: Sunsings.org)

4.1. Ideja Condorcetovih metoda

U Condorcetovim metodama, osnovna ideja je da se izbori gledaju kao niz međusobnih sukoba kandidata. Primjerice, između opcija A, B i C, gledaju se okršaji A protiv B, B protiv C i C protiv A. **Condorcetov pobjednik tih izbora je opcija koja je u međusobnim sukobima pobijedila sve ostale.**

Način na koji se izbori održavaju je da svi birači imaju mogućnost rangirati sve opcije kojim god redoslijedom žele (po preferencijama). Primjerice, birač X će staviti opciju B na prvo mjesto, opciju C na drugo, a opciju A na treće. Birač može i ostaviti neke opcije praznima, time ih automatski stavljajući na zadnje mjesto. Potom se promatraju međusobni sukobi pojedinih opcija kod svakog od birača te se na temelju tih sukoba opcije rangiraju na konačnoj tablici.

4.2. Primjer klasične Condorcetove metode

Tablica 1: Klasična Condorcetova metoda

	A	B	C
X	1	2	3
Y	1	3	2
Z	2	1	3

Rezultati izbora se promatraju na sljedeći način:

A protiv B → 2:1 → pobjednik je A

A protiv C → 3:0 → pobjednik je A

B protiv C → 2:1 → pobjednik je B

Pobjednik u većini parova je opcija A, stoga opcija A biva proglašena Condorcetovim pobjednikom u ovakvoj metodi.

4.3. Problemi kod Condorcetovih metoda

Kod velikog broja birača mogućnost izjednačenog rezultata veoma je malena. Međutim, ta mogućnost postoji te različite metode imaju razne načine rješavanja tog problema. U tom slučaju kažemo da nema Condorcetovog pobjednika ili ga dobivamo pomoću nekih dodatnih kriterija. Još jedna od mogućnosti je pojavljivanje tzv. Condorcetovog paradoksa, koji je opisan u sljedećem potpoglavlju.

4.3.1. Condorcetov paradoks

Jedna od mogućnosti prilikom ovakve metode izbora je pojavljivanje tzv. Condorcetovog paradoksa. Uzmimo primjer da imamo skup opcija $S = \{A, B, C\}$ te skup birača $T = \{X, Y, Z\}$. Do paradoksa dolazi u sljedećoj situaciji:

Tablica 2: Condorcetov paradoks

	A	B	C
X	1	2	3
Y	2	3	1
Z	3	1	2

Ako pogledamo međusobne sukobe opcija vidimo da opcija A pobjeđuje opciju B dva puta (kod birača X i Y), opcija B pobjeđuje opciju C kod birača X i Z dok opcija C pobjeđuje opciju A kod birača Y i Z. Izbor, primjerice, opcije A kao pobjednika povlači pitanje zašto opcija C ne bi bila pobjednik, budući da kod većine birača pobjeđuje opciju A. Izbor opcije C kao pobjednika nadalje povlači sličnu situaciju kod opcije B, a izbor opcije B kod opcije A.

Ovaj paradoks prvi su primijetili Carrol i Nanson, a njegova rješenja ponuđena su kroz razne metode. Jedan od načina razrješavanja paradoksa, je, primjerice, glasanje kroz bodove, gdje svaki birač može uz svaku opciju dodijeliti broj bodova (npr. od 1 do 5), koliko se jako slaže sa pojedinom opcijom te se onda osim samih preferencija gleda i „za koliko“ je neka opcija jača od druge, što značajno smanjuje mogućnost paradoksa.

4.4. Ostali primjeri Condorcetovih metoda

Brojne metode inkorporiraju Condorcetov uvjet pobjednika. Ovdje su navedene neke te ukratko objašnjene. Svaka od njih ima svoj način dolaženja do pobjednika te imaju široku upotrebu u ekonomiji, sociologiji, teoriji igara i slično.

4.4.1. Kemeny-Youngova metoda

U ovoj metodi traže se postotci koliki broj birača preferira jednu opciju nasuprot druge. Zatim se radi liste (ako su primjerice 3 opcije: A, B i C) svih mogućih kombinacija poredaka te se gleda koliko je tko više ili manje preferiran u odnosu na drugu opciju. U sljedećem primjeru to je ilustrirano.

Ako su glasovi bili (100 birača):

C, B, A – 22

C, A , B – 46

B, A, C – 32

Onda lista izgleda:

1. A
2. B
3. C

Te se dobiva:

A protiv B – 46%

A protiv C – 32%

B protiv C – 32%

Zbroj postotaka u ovom rezultatu je 110. Zatim se radi sljedeća lista te se za svaku provjerava broj. Dalje bi liste bile 1.A , 2.C, 3.B, potom 1.B, 2.A, 3.C itd. Naposlijetku se dobije lista za koju se nalazi najveći zbroj postotaka. U našem slučaju to je lista:

1. C
2. B
3. A

Te se dobiva:

C protiv B – 68%

C protiv A – 68%

B protiv A – 54%

Zbroj postotaka u ovom slučaju je 190 te je do ujedno i najveći mogući zbroj. Ta lista se smatra rezultatom izbora te je Condorcetov pobjednik opcija C.

4.4.2. Dodgsonova metoda

Dodgsonovu metodu 1876. godine predložio je engleski matematičar Charles Lutwidge Dodgson. Dodgson je bolje poznat pod svojim pseudonimom Lewis Carroll te se, osim matematikom i logikom, bavio spisateljstvom pa je tako napisao poznato djelo Alisa u zemlji čudesa, a također se intenzivno bavio i fotografijom, te je bio đakon u Anglikanskoj Crkvi.

Sama metoda zasniva se na zamjenama kandidata na listićima koje su birači predali, a same zamjene povezuju se sa poznatom Bubble sort metodom. Ideja metode je sljedeća: birači predaju svoje listiće na kojima su sortirali opcije po preferencijama od najpoželjnije do najmanje poželjne. Zatim se na svim predanim listićima gleda koliki je najmanji broj zamjena mjesta potreban za svaku opciju kako bi ona postala Condorcetov pobjednik. Ona opcija kojoj je potreban najmanji broj zamjena proglašava se pobjednikom, ona kojoj je potreban drugi najmanji broj zamjena je druga u konačnom poretka itd.

4.4.3. Schultzeova metoda

Metodu je 1997. godine predstavio Markus Schultze, a sama metoda koristi se diljem svijeta. Primjeri organizacija koje koriste metodu su Piratske stranke diljem svijeta, Wikimedia, BoardGameGeek, Ubuntu, Volt i brojne druge.

Metoda će biti ilustrirana na sljedećem primjeru. U izborima između triju opcija (A, B i C), rezultati glasanja 100 birača su bili sljedeći:

A, B, C – 12

A, C, B – 14

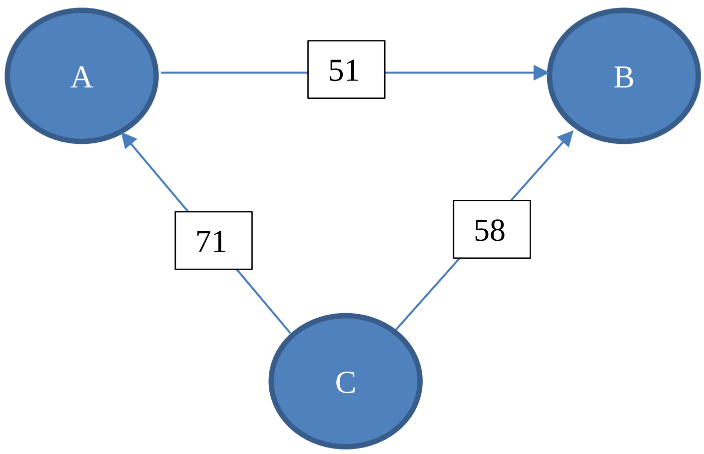
B, A, C – 13

B, C, A – 17

C, A, B – 25

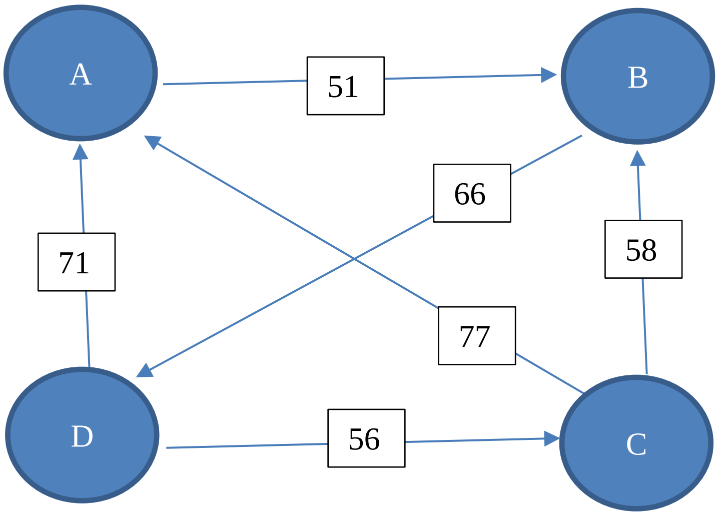
C, B, A – 19

Potom se kreira (ne nužno, ali je dobar primjer za ilustraciju metode) graf čiji vektori imaju orijentaciju prema opciji koja u međusobnim sukobima gubi, a na vektore se stavljaju vrijednosti koje govore koliko je glasova u međusobnom sukobu dobila opcija koja je pobijedila u sukobu. Primjerice, u sukobu između opcija A i B, opcija A pobjeđuje rezultatom 51:49. Stoga vektor ide od A prema B i na njemu piše 51. Graf za ovaj primjer izgledao bi:



Slika 1: Graf 1 Schultze

Potom se traže „najjači putevi“ za svaki od sukoba te se računaju njihove vrijednosti. Put je jak onoliko koliko je jaka njegova najslabija karika te se zatim uspoređuju snage najjačih puteva. U ovom slučaju u opciju C ne vodi niti jedan put te je ona automatski prva opcija u rezultatima. Sve opcije vode u B te ona mora biti zadnja. Pogledajmo drugi primjer grafa:



Slika 2: Graf 2 Schultze

Najjači putevi u ovom slučaju bi bili:

Tablica 3: Schultzeova metoda

	A	B	C	D
A	-	A,B – 51	A,B,D,C – 51	A,B,D – 51
B	B,D,A – 66	-	B,D,C – 56	B,D – 66
C	C,A – 77	C,B – 58	-	C,B,D - 58
D	D,A – 71	D,C,B – 56	D,C – 56	-

Zelenom bojom su označeni oni najjači putevi koji pobjeđuju u međusobnim okršajima, a crvenom oni koji gube u međusobnim okršajima (pobjeđuju oni koji imaju veću vrijednost).

Rezultat ovih izbora bi stoga bio:

1. C

2. B

3. D

4. A

Pobjednik bi, dakle, bila opcija C.

4.4.4. Minimax metoda

Minimax metoda (još znana i kao Simpson-Kramerova metoda) pobjednika teži na način da se, nakon gledanja međusobnih okršaja svih opcija, traži ona koja gubi s najmanjim postotkom. Ona opcija koju najmanje ljudi ne voli pobjeđuje izbore.

Unutar same metoda postoji više kriterija koji se mogu gledati, primjerice:

- S kolikom marginom opcija gubi u najgorem slučaju, ona koja ima najmanju marginu pobjeđuje.
- Koliki postotak ljudi je glasao protiv te opcije u najgorem porazu, ona kod koje je taj postotak najmanji pobjeđuje.
- Koliki postotak ljudi je glasao protiv te opcije u najgorem slučaju općenito, ona kod koje je taj postotak najmanji pobjeđuje.

4.4.5. Tidemanova metoda

Tidemanova metoda nazvana je po američkom ekonomistu Thorwaldu Nicolausu Tidemanu koji ju je predstavio 1987. godine. Ideja metode je da se prvo, kao i u svim metodama koje imaju Condorcetov uvjet pobjednika, međusobno usporede svi mogući parovi opcija. Zatim ih se poslaže od onih gdje je margina pobjede najveća, do onih gdje je najmanja. Potom se rade njihovi rezultati, počevši od para s najvećom marginom, s time da ako bi neki od parova stvorio krug onda se ignorira. Uzmimo sljedeći primjer:

Ako su glasovi bili (100 birača):

C, B, A – 22

C, A , B – 46

B, A, C – 32

Međusobni ogledi parova su onda:

B protiv A – 54%

C protiv A – 68%

C protiv B – 68%

Lista se potom slaže od najvećih do najmanjih margina pobjede te stoga izgleda:

C protiv B – 68%

C protiv A – 68%

B protiv A – 54%

Budući da se u ovom slučaju ne stvara krug, vrijedi da je C > B, C > A i B > A te je rezultat:

1. A
2. B
3. C.

5. Borda izračun

Borda izračun predstavlja alternativnu metodu računanja prilikom izbora s preferencijalnim glasanjem. Osmislio ga je 1770. francuski matematičar Jean-Charles de Borda, iako je sam sustav prije njega bio predložen više puta. Najraniji prijedlog sustava izbora potječe još iz 1435. godine.

5.1. Ideja Borda izračuna

Osnovna ideja Borda izračuna funkcionira na sljedeći način. Uzet ćemo za primjer da postoji 30 birača koji odabiru između 4 opcije (A,B,C,D). Dobivamo sljedeći uzorak izbora:

Tablica 4: Borda izračun

12	7	6	5
A	B	C	D
B	C	D	B
C	D	B	A
D	A	A	C

Po Borda izračunu prvo mjesto dobiva n-1 bodova gdje je n broj opcija. U našem slučaju prvo mjesto bi, stoga, dobilo 3 boda, drugo 2, treće 1 i četvrto 0. Potom se računa broj bodova za svaku od opcija:

A: 12*3+7*0+6*0+5*1 = 41

B: 12*2+7*3+6*1+5*2 = 61

C: 12*1+7*2+6*3+5*0 = 44

D: 12*0+7*1+6*2+5*3 = 34

Prema rezultatima, pobjednik izbora je opcija B.

5.2. Računanje izjednačenih rezultata

Postoji više metoda računanja bodova prilikom „izjednačenih“ izbora, odnosno kada birač više opcija rangira jednako. Primjerice, birač može opciji A dati prvo mjesto , B drugo mjesto, a za C i D ne napisati ništa, stavljajući ih tako na zadnje mjesto. Isto tako, birač može staviti više opcija na prvo mjesto, time ih izjednačavajući.

5.2.1. Bordina ideja

Originalna ideja Jean-Charlesa de Borde je bila da se izjednačavanja dopuštaju samo na kraju (prva situacija iz uvodnog dijela potpoglavlja). Primjerice, ako listić izgleda na sljedeći način:

A – 1. mjesto

B – 2. mjesto

C –

D – 3. mjesto

E –

Birač ne može staviti više opcija na isto mjesto (primjerice A i C na prvo), nego ako opcijama daje mjesta, onda ona moraju nužno biti različita. Jedini način na koji se dopušta izjednačavanje je da se pored opcije ne napiše mjesto. Ona u tom slučaju automatski ide na zadnje mjesto te bi u ovom slučaju bodovi bili sljedeći: A – 4, B – 3, D – 2, C – 0, E – 0.

5.2.2. Modificirana Bordina ideja

Najpoznatija modifikacija Bordine ideje prilikom zaokruživanja u obzir uzima i broj kandidata koji su ostali nerangirani, odnosno nije im dano mjesto u preferencijalnom glasanju. Oni u ovoj modifikaciji ponovno idu na dno tablice, ali se bodovi opcijama koje su dobile mjesto gledaju s obzirom na broj posljednjih.

Primjerice, ako uzmemo prošli primjer, kako su dvije opcije nerangirane, gleda se kao da su jedna opcija koja zauzima zadnje mjesto, te je broj bodova koji se dodjeljuju smanjen za 1 (jer su dvije nerangirane). Općenito, broj bodova koji se dodjeljuje prvom mjestu, računao bi se kao n-b gdje je n broj opcija, a b broj opcija koje su na zadnjem mjestu, odnosno nisu rangirane.

U prethodnom primjeru, stoga, broj bodova bi izgledao: A – 3, B – 2, D – 1, C – 0, E – 0.

5.2.3. Turnirski način

Turnirski način (engl. Tournament-style counting of ties) razrješava situacije na način da traži „prosjek bodova“ te ga dodjeljuje svakoj od opcija koje dijele mjesto. Primjerice, uzmimo sljedeći izborni listić:

A – 1. mjesto

B – 2. mjesto

C – 2. mjesto

D – 3. mjesto

Opcija A, s obzirom da je prva, dobiva 3 boda. Opcija D će dobiti 0, zato što je posljednja od svih, dok će opcije B i C „podijeliti bodove“ drugog i trećeg mjesta. Kako drugo mjesto donosi 2 boda, a treće 1 bod, svaka od opcija će dobiti (2+1)/2 = 1,5 bod.

5.2.4. Dowdallov sistem

Vrijedi još spomenuti i **Dowdallov sistem** koji se u praksi koristi kod parlamentarnih izbora male nacije Nauru u Pacifičkom oceanu. Ideja sistema je da se sve opcije nužno MORAJU poredati te se u toj varijanti izjednačeni rezultati ne dopuštaju i bilo koji izborni listić koji nije jasno poredao sve kandidate po preferencijama smatra se nevažećim. S obzirom da je ta nacija veoma mala (cijela država broji oko 10 000 stanovnika), sam broj kandidata na izborima nije prevelik te ih birači mogu u relativno kratko vrijeme poredati po preferencijama. U većim državama gdje se, primjerice, na izbore kandidira 50+ kandidata, takav bi sustav bio veoma naporan za birače.

Nakon što su kandidati poredani dodjeljuju im se bodovi na način da prva opcija dobiva 1 bod, druga opcija $\frac{1}{2}$ boda, treća opcija $\frac{1}{3}$ boda i tako dalje do N-te opcije koja dobiva $\frac{1}{N}$ bodova. Opcije sa najviše bodova bivaju izabrane u parlament. Sam sistem razvio je Nauruov ministar pravosuđa Desmond Dowdall 1971. godine.

5.3. Problemi sa Borda izborom

Svaka metoda izbora ima niz problema, pa tako i Borda izbor. Dva najveća koja je javljaju u Borda izboru su taktičko glasanje i strateško nominiranje kandidata.

5.3.1. Strateško nominiranje kandidata

S obzirom da veći broj kandidata uzrokuje veći broj ukupnih bodova, za stranke je povoljno kandidirati više svojih kandidata. Time se povećavaju šanse da netko od njih dobije na izborima. Primjerice, uzmimo lokalne izbore za gradonačelnika u gradu sa 100 stanovnika. Recimo da postoje dvije stranke, L i D. 20 stanovnika su čvrsti podržavatelji stranke L, dok je 20 stanovnika čvrsti podržavatelji stranke D. Preostalih 60 stanovnika nije sigurno za koga glasa te će se slučajno raspodijeliti između mogućih kandidata, ovisno o programu koji im se sviđa.

Ako svaka stranka nudi jednog kandidata, rezultat izbora će presuditi ljudi koji odabiru po programu, ali ako se ti ljudi podijele ravnomjerno na svakog kandidata, rezultati su izjednačeni. Uzmimo sad primjer da stranka D odluči uvesti još jednog kandidata (zvat ćemo ga D2). Rezultati izbora bi, pod prethodnim pretpostavkama, izgledali ovako:

20 glasova – L / D1 / D2 (10 birača L + 10 slobodnih)

20 glasova – L / D2 / D1 (10 birača L + 10 slobodnih)

20 glasova – D1 / D2 / L (10 birača D + 10 slobodnih)

20 glasova – D2 / D1 / L (10 birača D + 10 slobodnih)

10 glasova – D1 / L / D2 (10 slobodnih)

10 glasova – D2 / L / D1 (10 slobodnih)

U tom slučaju, nakon izbora, rezultati su sljedeći:

L – 40 + 40 + 10 + 10 = 100

D1 – 20 + 40 + 20 +20 = 100

D2 – 20 + 20 + 40 + 20 = 100

Možemo vidjeti da ponovno dolazi do izjednačenog rezultata, ali i da je stranka D dobila dvostruko više „bodova“ od stranke L, kad se zbroje bodovi svih njihovih kandidata. Također vidimo i da je samo jedan od tvrdih birača stranke D glasao za D1, a ne za D2, stranka D bi osvojila izbore. Stoga na sljedećim izborima stranka D kaže svim svojim biračima da nužno glasaju za D1, dok kandidat D2 služi samo radi oduzimanja glasova. Sljedeće izbore rezultati su:

20 glasova – L / D1 / D2 (10 birača L + 10 slobodnih)

20 glasova – L / D2 / D1 (10 birača L + 10 slobodnih)

30 glasova – D1 / D2 / L (20 birača D + 10 slobodnih)

10 glasova – D2 / D1 / L (10 slobodnih)

10 glasova – D1 / L / D2 (10 slobodnih)

10 glasova – D2 / L / D1 (10 slobodnih)Rezultati izbora su:

D1 – 20 + 60 + 10 +20 = 110

L – 40 + 40 + 10 + 10 = 100

D2 – 20 + 30 + 20 + 20 = 90

Ono što je ključno uočiti je da stranka D, samim time što je strateški kandidirala više kandidata, povećava svoj broj bodova na izborima. Kombiniranjem strateškog nominiranja kandidata i taktičkog glasanja, Borda sustav može se jako izmanipulirati kako bi se dobili poželjni izborni rezultati.

5.3.2. Taktičko glasanje

Taktičko glasanje je situacija u kojoj birači ne odabiru opcije svojim stvarnim poretkom, već ga modificiraju kako bi spriječili opcije koje ne vole da dođu na vlast (koncept manjeg zla). Događa se kada birač već ima neku ideju kako će rezultati izbora izgledati. Taktičko glasanje u sustavima koji koriste Borda izbor mogu potpuno promijeniti rezultate izbora te izglasati kandidate koje žele jako mali dijelovi birača.

Primjerice, uzmimo izbor za gradonačelnika istog mjesta iz prethodnog primjera sa 100 birača, ali recimo da se pojavila i treća opcija C. Opcija C ima malo ljudi koji ju podržavaju (svega 8), ali se svejedno odlučuje kandidirati. Slobodni birači uopće ne žele opciju C te svoje glasove daju samo opcijama L ili D, a opciju C smještaju na zadnje mjesto. Opcija D je u međuvremenu odlučila poslati samo jednog kandidata. Rezultati su sljedeći:

47 glasova – L / D / C (20 birača L + 27 slobodnih)

3 glasa – C / D / L (3 birača C)

3 glasa – C / L / D (3 birača C)

47 glasova – D / L / C (20 birača D + 27 slobodnih)

Rezultati bi bili:

L – 94 + 3 + 47 = 144

D – 47 + 3 + 94 = 144

C – 6 + 6 = 12

U ovome trenutku birači opcija L i D primjećuju da im oboma fali samo jedan bod za mjesto gradonačelnika. Oni nikako svojoj stranci ne mogu pridodati taj jedan bod, ali ono što mogu napraviti je oduzeti onoj drugoj jedan na način da stranku C stave na drugo mjesto na svojim izbornim listićima. Jedan po jedan, svi birači opcija L i D počinju strateški glasati te je rezultat sljedećih izbora:

47 glasova – L / C / D (20 birača L + 27 slobodnih)

3 glasa – C / D / L (3 birača C)

3 glasa – C / L / D (3 birača C)

47 glasova – D / C / L (20 birača D + 27 slobodnih)

Rezultati su:

C – 47 + 3 + 3 +47 = 100

L – 94 + 3 = 97

D – 3 + 94 = 97

Stranka C je pobijedila i dobila gradonačelnika, a tu stranku preferira 6% ljudi. Ovaj primjer pokazuje kako taktičko glasanje može drastično promijeniti rezultate izbora kod Bordine metode.

Interesantno je primijetiti da je taktičko glasanje veoma prisutno u svijetu i u drugim izbornim sustavima, gdje se ne primjenjuje preferencijalno glasanje. Primjerice u veoma raširenom „First-past-the-post“ (FPTP) sustavu glasanja (gdje kandidat treba više od pola glasova svih birača za pobjedu) taktičko glasanje je primarni razlog kako se vode izbori zbog toga što prilikom izlaska anketa ili prvog kruga izbora, birači odmah vide situaciju i prilagođavaju svoj glas. U takvom sustavu najčešće postoji više krugova glasanja te se birači stignu prilagoditi. Primjer takvog sustava bi bili predsjednički izbori u Hrvatskoj.

Kako bi birači uopće mogli taktički glasati, očigledno im je potrebna neka vrsta znanja o situaciji koja je *status quo*. U interesu toga da biračima pomognu pri informiranju o ravnoteži moći prije izbora, napravljene su mnoge internetske stranice. Primjerice u Velikoj Britaniji pri izborima 2019. godine napravljene su stranice poput „Swap my vote“ ili „People's Vote guide to tactical voting“ koje su analizama anketa i prošlih rezultata davale ljudima matematičke preporuke o tome kako najbolje taktički glasati. Primjerice, ako bi osoba željela da opcija A pobjedi, stranica bi mogla preporučiti glasanje za opciju F kako bi opcija A imala najbolje šanse.

Također, važno je naglasiti da, budući da stranice koriste različite algoritme za predviđanje rezultata, često se znalo dogoditi da različite stranice preporuče različite puteve glasanja kako bi neka stranka pobijedila/imala najveću šansu.

Treba spomenuti i da mnogi ljudi jednostavno ne žele taktički glasati te da će radije odabrati opciju koju najviše preferiraju, bilo zbog toga što ne shvaćaju koncept taktičkog glasanja, ne mare za njega ili pak ne vole da im itko govori što da učine i za koga da glasaju.

5.4. Upotreba Bordine metode u svijetu

Jedna od interesantnih upotreba nečeg sličnog Bordinoj metodi može se pronaći u mnogim sportovima (npr. nogomet) budući da se pobjedniku dodjeljuje 3 boda, za neriješen rezultat svatko dobiva 1 bod, dok gubitnik dobiva 0 bodova.

Sama Bordina metoda danas se koristi u nekim sveučilištima u svijetu za izbor studentskih zborova i sličnih organizacija (npr. Sveučilište u južnom Illinoisu koristi ovakvu metodu za izbor Senata sveučilišta). Studentska organizacija AIESEC također izabire svog predsjednika modificiranom verzijom ove metode. Čak se i glasanje za pobjednika Eurovizije smatra modificiranom verzijom Bordine metode.

Od značajnije uporabe u politici, najpoznatiji primjer je već prethodno navedeni Dowdallov sistem koji se koristi u izborima države Nauru. Također, u slovenskom parlamentu se zastupnici talijanske i mađarske manjine biraju pomoću Bordine metode.

6. Arrowljev teorem nemogućnosti (Arrowljev paradoks)

Arrowljev teorem iznio je u svome doktoratu 1951. američki ekonomist i matematičar Kenneth Arrow. Sam teorem iznio je veliku pomutnju u svijetu ekonomije zbog nedavnih Bergsonovih (1938.) i Samuelsonovih radova (1947.) te ljudi isprva nisu bili sigurni tko je u pravu i kako je to moguće. Dakako, kasnije se ispostavilo da same definicije i aksiomi uzeti u istraživanjima, što bi jedan sustav s preferencijalnim glasanjem trebao imati, nisu bili isti.

Teorem je ostavio velike posljedice iza sebe te veliko pitanje o ispravnostima sustava za glasanje te samog društvenog izbora. Ipak, sam Arrow rekao je da se nada kako će ljudi „shvatiti ovaj paradoks kao izazov, a ne kao obeshrabrujuću barijeru“. („Social Choice and Individual Values“, bez dat.)

Slika 4: Kenneth Arrow (Izvor: Stanford News)

6.1. Ideja teorema

Arrowljev teorem kaže:

Ako birači imaju tri ili više opcija, onda rezultati preferencijalnog glasanja ***ne mogu*** *istovremeno zadovoljavati kriterije* ***univerzalnosti, ne-diktatorstva, Pareto učinkovitosti te nezavisnosti od nevažnih alternativa*** *u niti jednom sustavu s preferencijalnim glasanjem gdje se opcije rangiraju**.***

Ovdje je važno primijetiti neka ograničenja. Arrow u svome teoremu nije uključio sustave gdje birači mogu reći koliko im je neka preferencija bitna (tzv. kardinalno glasanje). Primjer takvog glasanja bilo bi da birač dodijeli opciji A deset bodova, opciji B šest i opciji C dva, pritom ih rangirajući A, B, C.

Sam teorem često se pogrešno interpretira izjavama poput „Ne postoji pravedan sustav glasovanja u demokraciji" ili „Demokracija nužno vodi do diktature". Takva su shvaćanja teorema veoma banalizirana i u konačnici netočna shvaćanja samog teorema. On jednostavno pokazuje da uzevši u obzir neke od kriterija koji se čine intuitivnima u bilo kojem demokratskom sustavu glasanja, nužno dolazi do toga da će se neki od njih prekršiti. Zbog toga što je sam Arrow u svom dokazu išao na to da, držeći se svih ostalih premisa, nužno dolazi do toga da se ne može održati uvjet ne-diktatorstva, sam dokaz se često **pogrešno interpretira** na prethodno navedene načine.

Kasniji autori koji su proučavali sam teorem te se referencirali na njega, predložili su neke alternative teoremu te iznijeli kritike. Neke od alternativa bit će opisane u potpoglavlju 6.2. Jedna od čestih kritika na premise samog teorema je ta da je uvjet nezavisnosti od nevažnih alternativa (IIA) **prestrog uvjet**, s obzirom da ga mnoge metode ne implementiraju (poput već navedene Schultzeove, Kemeny-Youngove, Minimax i drugih). Međutim ono što je interesantno je da je teorem zapravo otkrio pozadinu toga zašto ne implementiraju taj kriterij koji se intuitivno čini veoma logičan: zato što logički ne mogu, ako ne žele zadržati preostale kriterije, poglavito ne-diktatorstvo.

Dokaz teorema, koji je ovdje opisan brojnim tablicama radi lakše ilustracije i shvaćanja samog teorema, pokazuje kako u proizvoljnom skupu birača može doći do situacije u kojoj se preferenca jednog birača odražava kao rezultat izbora, unatoč tome što svi (ili nitko) osim tog birača glasaju drugačije. Bitno je vidjeti da kroz teorem Arrow zapravo pokazuje situaciju sličnu onoj opisanoj u Condorcetovom paradoksu te da je vidljivo kako paradoks nije zapravo toliko banalan kao što se čini već da se može događati u kompleksnim sustavima sa mnogo birača.

6.1.1. Dokaz

Kroz dokaz Arrow pokazuje da u situaciji da su kriteriji univerzalnosti, Pareto učinkovitosti i nezavisnosti od nevažnih alternativa uzeti u obzir, nužno će doći do pojave diktatorstva.

Neformalni dokaz je sljedeći:

Uzmimo skupinu od tri opcije: A, B i C te uzmimo N birača. Zamislimo da svi birači preferiraju opciju A najmanje. Dobivamo sljedeću situaciju:

Tablica 5: Situacija 1.0

1	**2**	**3**	**...**	**N**
B ili C	B ili C	B ili C	...	B ili C
A	A	A	...	A

Ova situacija zvat će se situacija 1.0. Nadalje, nastavljamo sa situacijama gdje dodajemo po jednog birača koji preferira opciju A nasuprot opcija B ili C. Situacija 1.1 je stoga:

Tablica 6: Situacija 1.1

1	**2**	**3**	**...**	**N**
A	B ili C	B ili C	...	B ili C
B ili C	A	A	...	A

Te tako nastavljamo sve dok ne dođemo do situacije 1.X. U situaciji 1.X dolazi trenutak kada su birači od A svojim glasovima pomakli opciju A na vrh iznad opcija B ili C. Situacija 1.X izgleda ovako:

Tablica 7: Situacija 1.X

1	**2**	**...**	**X - 1**	**X**	**X+2**	**...**	**N**
A	A	...	A	A	B ili C	...	B ili C
B ili C	B ili C	...	B ili C	B ili C	A	...	A

Birač koji je promijenio rezultat nazvan je biračem X. Situacije se dalje nastavljaju sve do situacije 1.N u kojoj svi birači biraju opciju A naprotiv opcija B ili C.

Nadalje, pogledajmo sljedeću situaciju, nazvanu situacija 2.1:

Tablica 8: Situacija 2.1

1	**2**	**...**	**X - 1**	**X**	**X + 1**	**...**	**N**
A	A	...	A	C	C	...	C
B	B	...	B	A	A	...	A
C	C	...	C	B	B	...	B

Imamo dva dijela birača: dio od 1 do X-1 koji glasaju redom A, B, C (prvi dio) i dio od X+1 do N koji glasaju redom C, A, B (drugi dio). Birač X na početku glasa isto C, A, B. Važno je primijetiti da je izbor prvog dijela birača u ovoj situaciji zapravo jednak kao i izbor prvog dijela birača u situaciji 1.X. Uzmimo sada primjer da svi birači zamijene pozicije opcija A i B dok birač X zamijeni preference opcija A i C. Ovdje je bitno napomenuti da za sam dokaz nije bitno zamijeni li 0, 1 ili svi birači svoje preference između opcija A i B, konačni rezultat je isti. Ako uzmemo da su zamijenili svi dobivamo situaciju 2.2:

Tablica 9: Situacija 2.2

1	**2**	**...**	**X - 1**	**X**	**X + 1**	**...**	**N**
B	B	...	B	A	C	...	C
A	A	...	A	C	B	...	B
C	C	...	C	B	A	...	A

Po svojstvu nezavisnosti od nevažnih alternativa možemo vidjeti da, izbacimo li opciju B nakratko iz slike, dobivamo ovakvu situaciju (2.3):

Tablica 10: Situacija 2.3

1	**2**	**...**	**X - 1**	**X**	**X + 1**	**...**	**N**
A	A	...	A	A	C	...	C
C	C	...	C	C	A	...	A

To je, kao što možemo primijetiti, ista situacija kao u slučaju 1.X, osim što nema opcije B, ali po svojstvu nezavisnosti od nevažnih alternativa, ona ne bi trebala igrati ulogu u izboru između A i C. Stoga dolazimo do prvog rezultata: **opcija A mora u rezultatima biti pozicionirana više od opcije C.**

Pogledamo li sukob između opcija B i C, te ponovno se pozovemo na nezavisnost od nevažnih alternativa, ponovno dobivamo situaciju sličnu 1.X, samo što ovog puta birač X presuđuje izbore u korist birača od X+1 – N (situacija 2.4):

Tablica 11: Situacija 2.4

1	**2**	**...**	**X - 1**	**X**	**X + 1**	**...**	**N**
B	B	...	B	C	C	...	C
C	C	...	C	B	B	...	B

Iz ove situacije možemo izvući još jedan zaključak o rezultatima izbora: **opcija C mora u rezultatima biti pozicionirana više od opcije B.**

Ako uzmemo u obzir te dvije činjenice:

Opcija A mora u rezultatima biti pozicionirana više od opcije C

Opcija C mora u rezultatima biti pozicionirana više od opcije B

dolazimo i do treće činjenice, kao i do rezultata samih izbora:

opcija A mora u rezultatima biti pozicionirana više od opcije B. Rezultati izbora su:

1. mjesto – A
2. mjesto – C
3. mjesto – B.

Interesantno je primijetiti da, bez obzira što je samo jedan birač (birač X) stavio opciju A na prvo mjesto, opcija A svejedno pobjednik izbora. Također je važno primijetiti da je rezultat izbora jednak isključivo izboru birača X i niti jednog drugog birača osim njega. Isto tako, birač X jedina je osoba koja je stavila opciju A iznad opcije B. Stoga kažemo da je birač X **diktator za A protiv B.**

6.2. Alternative

Samom teoremu predložene su brojne alternative kako bi se izbjegao takav paradoks. Neki od primjera su sljedeći:

Beskonačno mnogo birača – u slučaju beskonačno mnogo birača svi kriteriji Arrowljevog teorema mogu biti zadovoljeni (jer se nikada neće doći do diktatorskog birača, uvijek postoji još jedan). Takvo ograničenje dakako nije primjenjivo u praksi iz razloga što je broj birača u svakim izborima uvijek konačan.

„Dobri diktator“ – pretpostavka da je osoba koja je diktator u Arrowljevom teoremu zapravo „dobri diktator“, odnosno da je diktator koji će gledati kako većina glasa i svoj glas pridodati većini također onemogućava Arrowljev paradoks.

Više informacija – u sustavima gdje postoje dodjeljivanja bodova, poput već spomenutog kardinalnog glasanja, Arrowljev teorem ne vrijedi. Treba napomenuti da je sam Arrow po tom pitanju rekao da nema smisla mjeriti preferencu koja je proizvod uma jednog čovjeka, sa preferencom druge osobe. Jednoj osobi 10 bodova može značiti jednu stvar, a drugoj osobi potpuno drugu.

6.3. Posljedice i utjecaj Arrowljevog teorema

Kao što je već rečeno, sam se Arrowljev teorem često previše pojednostavljuje izjavama poput „Ne postoji pravedan sustav glasovanja“ što nipošto nije ideja koju je Arrow dokazao. Ono što on tvrdi je: „Većina sustava neće loše raditi cijelo vrijeme. Ono što sam dokazao je da svaki sustav može, pod određenim uvjetima, raditi loše.“ („Social Choice and Individual Values“, bez dat.)

Teorem je nakon svoje objave izazvao popriličnu kontroverzu, jer uzima skup razumnih i intuitivno nužnih uvjeta u svakom izbornom sustavu te pokazuje da su međusobno isključivi. Kasniji radovi, poput onih W. Rikera ili R. Dahla pozivali su se na Arrowljevo istraživanje te su kasnije mnogi matematičari uzeli kao izazov pokušati naći skup alternativnih oslabljenih pretpostavki kako bi se Arrowljem teorem izbjegao (neke od njih su opisane u prethodnom potpoglavlju) te su pomoću njih pokušavali izvući određene ideje koje pretpostavke imaju koje posljedice u samoj teoriji društvenog izbora.

Sam teorem ostaje relevantan i danas, 70 godina nakon objave, te i dalje biva citiran i referenciran u istraživanjima kao jedan od najbitnijih teorema u teoriji društvenog izbora. Samo Arrowljevo djelo u kojem je teorem objavljen („Social Choice and Individual Values“) 1963.

godine doživio je još jedno izdanje gdje je pružen i kraći neformalni dokaz samog teorema te su ispravljene i u obzir uzete neke od primjedbi tadašnjih matematičara na rad.

7. Zaključak

Cilj rada bio je dati kratki povijesni pregled područja funkcija društvenog izbora s preferencijalnim glasanjem te opisati najznačajnije metode i teoreme u tom području.

Opisana je Condorcetova metoda glasanja koja je jedna od najpoznatijih metoda za određivanje pobjednika, kako funkcionira, tko ju je smislio te zašto je značajna. Naveden je i Condorcetov paradoks te je rečeno koje alternative postoje kako ne bi došlo do samog paradoksa. Također su opisane brojne metode koje koriste Condorcetov uvjet pobjednika te se, osim same klasične Condorcetove metode, isto tako ubrajaju u Condorcetove metode.

Opisana je i Borda metoda računanja koja ima implementaciju u današnjem svijetu politike, na brojnim sveučilištima te organizacijama. Navedene su i alternative originalnoj metodi te je kroz primjere opisano kako sama metoda funkcionira. Također su spomenuti sociološki i psihološki problemi poput strateškog kandidiranja više kandidata ili taktičkog glasanja birača te je kroz primjer pokazano kakvi rezultati tih problema mogu biti. Taktičko glasanje kao jedan od čestih fenomena današnjice po pitanju preferencijalnog glasanja, kao i glasanja općenito, opisan je detaljnije.

U konačnici su navedene premise i zaključci Arrowljevog teorema nemogućnosti, također poznatog i kao Arrowljev paradoks. Naveden je neformalni dokaz samog teorema kroz primjer. Objašnjene su i alternative koje ograničavaju ili olakšavaju kriterije Arrowljevog teorema te je rečeno na koji način one omogućavaju da do paradoksa ne dođe. Naposlijetku je opisan utjecaj samog teorema te su navedene relevantne pojedinosti o tome tko ga je koristio i kako se teorem mijenjao.

Popis literature

Social Choice and Individual Values. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 24.8.2021. s https://en.wikipedia.org/wiki/Social_Choice_and_Individual_Values#Summary,_interpretation,_and_aftereffects

Social choice theory. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021. s https://en.wikipedia.org/wiki/Social_choice_theory

Arrow's impossibility theorem. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021. s https://en.wikipedia.org/wiki/Arrow%27s_impossibility_theorem

Borda count. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021. s https://en.wikipedia.org/wiki/Borda_count

Condorcet winner criterion. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021 s https://en.wikipedia.org/wiki/Condorcet_winner_criterion

Condorcet method. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021 s https://en.wikipedia.org/wiki/Condorcet_method

Schulze method. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021 s https://en.wikipedia.org/wiki/Schulze_method

Kemeny–Young method. (bez dat.). U Wikipedia. Preuzeto 9.9.2021 s https://en.wikipedia.org/wiki/Kemeny%E2%80%93Young_method

Liberto, D. (2020.) *Arrow's Impossibility Theorem Definition*. Preuzeto 9.9.2021 s https://www.investopedia.com/terms/a/arrows-impossibility-theorem.asp

Math.hmc.edu (bez dat.) *Social Choice and the Condorcet Paradox*. Preuzeto 10.9.2021. s https://math.hmc.edu/funfacts/social-choice-and-the-condorcet-paradox/

Wulf Gaertner (2006.) A Primer in Social Choice Theory. Oxford, New York, USA: Oxford University Press.

Politics.co.uk (bez dat.) *Tactical Voting.* Preuzeto 14.9.2021. s https://www.politics.co.uk/reference/tactical-voting/

Stanford Encyclopedia of Philosophy (2019.) *Arrow's Theorem*. Preuzeto 14.9.2021. s https://plato.stanford.edu/entries/arrows-theorem/#WilPeo

Arrow, Kenneth J. (1950). *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*. Preuzeto 14.9.2021. s https://web.archive.org/web/20110720090207/http://gatton.uky.edu/Faculty/hoytw/751/articles/arrow.pdf

Hatzivelkos A. (2020). *Modeliranje pojma kompromisa u teoriji društvenog izbora.*

Darlington R.B. (2018). *Are Condorcet and Minimax Voting Systems the Best?* Preuzeto 14.9.2021. s https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiqn9D14oTzAhWGtqQKHU5mDkcQFnoECAkQAQ&url=https%3A%2F%2Farxiv.org%2Fpdf%2F1807.01366&usg=AOvVaw0RiJhpclh3Q7tnONO_5jZj

Popis slika

Popis tablica