Cjelobrojno linearno programiranje

Braniša, Darko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N

Darko Braniša

CJELOBROJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Darko Braniša

Matični broj: 43372/14–R

Studij: Poslovni sustavi

CJELOBROJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor/Mentorica:

Dr. sc. Nenad Perši

Varaždin, rujan 2019.

Darko Braniša

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni/diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor/Autorica potvrdio/potvrdila prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

____

Sažetak

Tema rada obuhvaća cjelobrojno programiranje što je podvrsta linearnog programiranja u kojoj je ideja izbaciti decimalni dio rješenja. Sama funkcija cilja može težiti u minimum pri čemu je cilj smanjiti troškove, dok kod maksimuma možemo povećati profit. U radu će biti opisani temeljni problemi/sustavi koji se rješavaju tom vrstom programiranja i dva temeljna algoritma kojim se dolazi do cjelobrojnog rješenja, a to su: metoda cjelobrojnih metoda i metoda grananje i ograđivanja. Sukladno definiranim problemima bit će ručno riješeni primjeri pomoću tih algoritma, te biti implementirani u MS Excelu putem grafičke ilustracije, matematičkih formula i korištenja dodatka „Rješavatelj zadatka". Svrha rada je prikazati rad algoritma na klasičan način putem simpleks i dualne simpleks metode koji se koristio u prošlosti i moderniji način koji koristi programsku implementaciju u rješavanju problema.

Ključne riječi: cjelobrojno; programiranje; algoritam; MS Excel; „Rješavatelj zadataka"; simpleks metoda; dualna simpleks metoda.

Sadržaj

1. Uvod 1
2. Uvod u cjelobrojno programiranje 2
3. Karakteristični problemi sustava 3
    3.1. Problem s fiksnim troškovima 3
    3.2. Problem optimalne investicijske odluke 4
    3.3. Problem ranca 5
4. Metode za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja 6
    4.1. Metoda cjelobrojnih formi 6
        4.1.1. Primjer zadatka s jednom ravninom 8
        4.1.2. Prikaz algoritma i rješenja zadatka u MS Excelu 12
        4.1.3. Grafička ilustracija rješenja zadatka 14
        4.1.4. Primjer zadatka sa dvije ravnine 16
        4.1.5. Prikaz algoritma i rješenja zadatka u MS Excelu 21
        4.1.6. Grafička ilustracija rješenja zadatka 22
    4.2. Metoda grananja i ograđivanja 25
        4.2.1. Primjer algoritma i ilustracija rješenja u MS Excelu 25
5. Zaključak 35

Popis literature 36

Popis slika 37

Popis tablica 38

1. Uvod

Cjelobrojno programiranje se danas sve više koristi kod poslovnog odlučivanja kod kojega je potrebno donesti pravu odluku na temelju danih kriterija pri čemu treba imati obzira na dostupnost i ograničenost resursa u poduzeću. Kod ovog tipa programiranja ideja je doći do minimalnog troška ili maksimalnog dobitka u obliku cijelog broja, odnosno zanemariti decimalni dio broja što čini poslovanje lakšim.

Tema ovog završnog rada je cjelobrojno linearno programiranje, što se odnosi na uklanjanje decimalnog rješenja i prikazivanje cjelobrojnog. Svaki problem koji je potrebno riješiti na takav način rješava se pomoću standardne simpleks metode koja služi za dobivanje optimalnog rješenja putem konačnog broja iteracija koje je obično u decimalnom oblika i nije ga moguće realizirati u stvarnosti. Nakon dobivanja optimalnog rješenja koje nije cjelobrojno potrebno je putem dolje navedenih metoda dobiti konačno, cjelobrojno rješenje koje se tretira kao optimalno.

Postoje tri vrste problema koje zahtijevaju primjenu cjelobrojnog linearnog programiranja u što spada problem s fiksnim troškovima, problem optimalne investicijske odluke i problem ranca. Problem ranca javlja se kod izbora predmeta kod kojih njihova težina ne premaši neki određeni broj pri čemu treba obratiti pažnju na prioritet predmeta. Problem s fiksnim troškovima i optimalne investicijske odluke javljaju se u ekonomiji gdje je cilj minimalizirati fiksne troškove, odnosno maksimizirati dodanu vrijednost investicijske odluke.

U radu će biti teorijski i praktično objašnjene dvije osnovne metode za rješavanje cjelobrojnog programiranja, a to su: metoda cjelobrojnih formi i metoda grananja i ograđivanja. Iste će biti objašnjene na primjerima koji će biti ručno riješeni, te na kraju prikazani u programskom alatu MS Excel računski i grafički putem vanjskog dodatka pod nazivom „Rješavatelj zadataka“.

2. Uvod u cjelobrojno programiranje

Počeci cjelobrojnog programiranja javljaju se 1957. godine kad su Markowitz i Manne dali svoj prvi doprinos na tom području. Bitno je naglasiti da su počeli davati ideje, te načine kako doći do rješenja pri čemu nisu iznesli neku općenitu metodu za rješavanje problema. Sljedeće godine Gomory je dao opću metodu pod nazivom metoda cjelobrojnih formi koja se još i naziva Gomory metodom. (Lj. Martić, 1979.)

Cjelobrojno programiranje može se definirati kao funkcija koja teži u minimum ili maksimum

$$min/\,max\, z\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

uz ograničenja

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \qquad i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2, \dots, n$$

pri čemu je x_j cijeli broj. U takvo definiranom problemu sve varijable imaju postavljeno ograničenje cjelobrojnosti pa se takav problem naziva problem čisto cjelobrojnog programiranja (eng. *pure integer linear programming problem*).

Ukoliko se traži da samo neke varijable poprime cjelobrojno vrijednost tada govorimo o problemu djelomičnog ili mješovitog cjelobrojnog programiranja (eng. *mixed integer programming problem*) koji se definira na slijedeći način:

$$min/max\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{p} d_k \overline{x_k}$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{p} h_{ik} \overline{x_k} = b_i, \qquad i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2, \dots, n \qquad\qquad x_k \geq 0, \qquad k = 1,2, \dots, p$$

gdje je x_j cijeli broj. Za kraj postoji još i binarno programiranje pri čemu vrijednosti poprimaju 0 ili 1 što znači da onda govorimo o binarnom programiranju. (Z. Lukač i L. Neralić, 2012.)

3. Karakteristični problemi sustava

U ovom poglavlju bit će prikazani stvarni problemi koje se rješavaju primjenu cjelobrojnog programiranja, a to su: problem s fiksnim troškovima, problem optimalne investicijske odluke i problem ranca.

.

3.1. Problem s fiksnim troškovima

Kod svake aktivnosti u poduzeću nastaju troškovi i oni se mogu razdvojiti na fiksne i varijabilne. Varijabilni troškovi ovise o obujmu i dinamici proizvodnje, dok fiksni ostaju nepromjenjivi kroz cijelo razdoblje i obično se odnose na dugotrajnu imovinu, kamate, najam prostora i amortizaciju.

Uzmimo da se aktivnost j sastoji od fiksnog troška d_j i varijabilnog troška c_j pri čemu je x_j razina na kojoj se aktivnost j izvodi. Onda se iz toga može izraziti ukupan trošak u obliku

$$h_j(x_j) = \begin{cases} d_j + c_j x_j, & x_j \geq 0 \\ 0, & x_j = 0. \end{cases}$$

Ideja ovog problema jest minimizirati fiksne troškove pa se funkcija može izraziti u obliku

$$h_j(x_j) = c_j x_j + d_j y_j$$

uz ograničenja

$$x_j(1 - y_j) = 0, \quad y_j \in (0,1).$$

Ukoliko je $x_j > 0$ mora vrijediti $1 - y_j = 0$ pri čemu je $y_j = 1$ što znači vrijedi

$$h_j(x_j) = c_j x_j + d_j.$$

Ukoliko se desi da je $x_j = 0$ onda y_j može poprimiti vrijednost 0 ili 1. Kako je već spomenuto gore cilj je minimizirati funkciju $h_j(x_j)$ pri čemu će troškovi biti manji ukoliko je $y_i = 0$ nego da je $y_i = 1$ pa će vrijediti $h_j(x_j) = 0$. (Z. Lukač i L. Neralić, 2012., D. Kalpić, V. Mornar, 1996.)

.

3.2. Problem optimalne investicijske odluke

Ovaj problem javlja se kod poduzeća koja moraju donesti odluku o ulaganju u investicije koje su rangirane po nekim kriterijima. Ti kriteriji ovise i o resursima koji su ograničeni te je potrebno sukladno njima donesti odluku. Za izbor projekta bitan kriterij jest neto sadašnja vrijednost (eng. *net present value*) koja se definira kao razlika primitaka i izdataka, odnosno novčanih tokova.

Kod odabira je potrebno paziti da neto sadašnja vrijednost bude što veća, odnosno da se investira u projekt koja ima najveću vrijednost uz ograničenja koja se odnose na raspoloživa sredstva u pojedinim godinama. Za odabir projekta prema (Z. Lukač i L. Neralić, 2012., str. 134.) potrebne su slijedeće oznake:

c_j – sadašnja neto vrijednost projekta j, $j = 1,2,\dots,n$

a_{ij} – sadašnja vrijednost troškova projekta j u godini i, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$

b_i – sadašnja vrijednost gornje ograde na budžet za godinu i, $i = 1,2,\dots,m$

n – broj projekta

x_j – cjelobrojna varijabla, $j = 1,2,\dots,n$ za koju vrijedi

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{ako je prihvaćen projekt } j \\ 1, & \text{ako nije prihvaćen projekt } j. \end{cases}$$

Problem se još može definirati u obliku cjelobrojnog programiranja

$$max\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sa ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1,2,\dots,n$$

pri čemu je x_j cijeli broj. Ta vrsta problema ima n varijabli i $m + n$ ograničenja i ograničenje cjelobrojnosti (0 ili 1) na varijablu što ga čini binarnim problemom cjelobrojnog programiranja. Rješenje tog problema će dati maksimalnu neto sadašnju vrijednost uz dozvoljena sredstva unutar pojedine godine trajanja projekta. (Z. Lukač i L. Neralić, 2012.)

3.3. Problem ranca

Problem ranca (eng. *Knapsack problem*) odnosi se na izbor predmeta pri čemu će vrijednost biti maksimalna, a njihova cjelokupna težina ne premaši b jedinica. Uvođenjem varijabli dobivamo

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je predmet } j \text{ uzet u ranac} \\ 0, & \text{ako predmet } j \text{ nije uzet u ranac} \end{cases}$$

prema (Z. Lukač i L. Neralić, 2012.) problem se definira kao

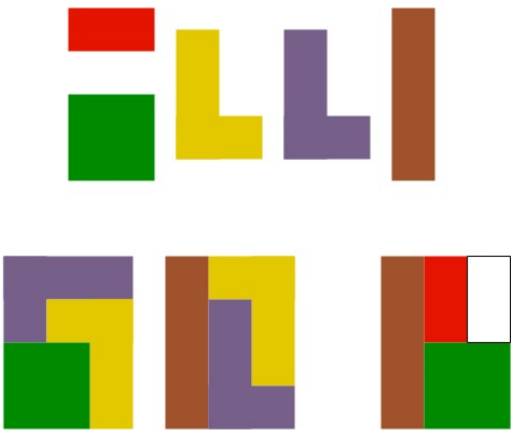
$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_y x_j$$

sa ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j = 0 \text{ ili } 1, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Problem ranca se može primijeniti na bilo koje spremiše koja ima definiran kapacitet, a može biti prikolica, kontejner, vagon i slično.



Slika 1. Primjer rada algoritma kod problema ranca
(Izvor: Matematički fakultet, Beograd)

Na slici može se vidjeti kako u realnosti funkcionira problem ranca na primjeru pet elemenata različitih oblika. Pomoću tih elemenata potrebno je formirati pravokutnik sa različitim pozicioniranjem. U prva dva slučaja je uspješno formiran pravokutnik sa tri elemenata, dok je u trećem slučaju formiran mnogokut od tri elemenata sa slobodnim prostorom.

4. Metode za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja

Dvije su osnovne metode za rješavanje cjelobrojnog programiranja, a to su: metoda cjelobrojnih formi i metoda grananja i ograđivanja. Metoda cjelobrojnih formi spada u skupinu metoda odsijecajućih ravnina koja se još zove i Gomoryeva metoda njemu u čast. Kod te metode se rješenje standardne simpleks metode nadograđuje novim ograničenjima koja odsijecaju decimalni dio i na takav način dolazi do optimalnog rješenja koje je cjelobrojnog oblika. Metoda grananja i ograđivanja spada u metode prebrajanja u kojoj se definiraju grane i ograde za svaki pojedini skup mogućih rješenja, te se za svaki skup posebno rješava simpleks metodom dok se dođe do zadovoljavajućeg rješenja.

4.1. Metoda cjelobrojnih formi

Prema (Lj. Martić, 1979.) Gomory metoda započinje s rješavanjem simpleks metode problem linearnog programiranja kod koje se ignorira cjelobrojno ograničenje. Ukoliko je optimalna vrijednost nije cijeli broj generira se odsijecajuća ravnina koja odsijeca dio skupa pri čemu se postepeno dolazi do cjelobrojnog rješenja. Kod ove definicije može se zaključiti da je ta metoda zapravo proširenje standardne simpleks metode koja sadrži i pokoji korak dualne simpleks metode.

Metoda se provodi kroz algoritam (Z. Lukač, L. Neralić, 2012., str. 136) sa slijedećim koracima:

1. korak: riješiti problem cjelobrojnog programiranja bez uvjeta cjelobrojnosti, odnosno riješiti problem linearnog programiranja i naći relaksirano rješenje.
2. korak: ukoliko je relaksirano rješenje cjelobrojno algoritam je gotov, te je dobiveno rješenje optimalno. Ako rješenje nije cjelobrojno potrebno je ići na 3. korak.
3. korak: izabrati bazičnu varijablu koja nije cjelobrojna i generirati odsijecajuću ravninu. Tu jednadžbu ravnine potrebno je dodati optimalnoj tablici, te izvršiti jedan korak dualne simpleks metode i ići na 2. korak.

Glavni problem koji se javlja jest kako odrediti odsijecajuću ravninu. Za to nam je potrebno funkcija najveće cijelo pri čemu je $[a]$ najveći cijeli broj koji je manji ili jednak od a pa sukladno tome vrijedi $f_a = a - [a]$ ili $a = [a] + f_a$. Za primjer uzmimo 3 broja koja mogu biti decimalna, cijela ili negativna.

Imamo:

a) $a = 4.2$, $[a] = 4$, $f_a = 4.2 - 4 = 0.2$

b) $a = 2$, $[a] = 2$, $f_a = 2 - 2 = 0$

c) $a = -4.8$, $[a] = -5$, $f_a = -4.8 - (-5) = 0.2$

pri čemu uvijek vrijedi $0 < f_a < 1$ za taj decimalni dio. Za generiranje ravnine potrebno je kod rješenja ustanoviti koeficijent f_a, te izabrati ono rješenje koje ima veći f_a. Ako se slučajno desi da rješenja imaju isti koeficijent f_a tada je svejedno koje se rješenje uzme.

Za taj redak definiraju se koeficijenti f_{ij} pri čemu vrijedi

$$f_a \leq \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j \ .$$

Ako se sve prebaci na drugu dobivamo

$$f_a - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j \ \leq 0.$$

Za to je potrebno uvesti dopunsku cjelobrojnu varijablu g_i i prebaciti f_a na drugu stranu

$$-\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j + g_i = -\, f_a$$

i za kraj još zamijenimo strane radi preglednosti pri čemu konačni oblik jednadžbe izgleda kao

$$-\, f_a = -\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j + g_i$$

pri čemu je:

f_a – najveći decimalni dio relaksiranog rješenja

n – ukupan broj varijabli problema

m – broj baznih varijabli problema

f_{ij} – koeficijent odabranog retka rješenja za i –ti redak i j –ti stupac

x_j – vrijednost koeficijenta generirane ravnine

g_i – pomoćna varijabla i –tog retka .

4.1.1. Primjer zadatka s jednom ravninom

Za ilustraciju algoritma slijedi primjer u kojem je potrebno generirati jednu odsijecajuću ravninu za koju se dobiva cjelobrojno rješenje. Zadana je funkcija cilja

$$max\, z = 11x_1 + 4x_2$$

sa ograničenjima

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$2x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Za početak je potrebno problem pretvoriti u kanonski oblik i dodati dopunske varijable što na kraju ima oblik

$$max\, z = 11x_1 + 4x_2 + 0 * (u_1 + u_2 + u_3)$$
$$-x_1 + 2x_2 + u_1 \qquad = 4$$
$$5x_1 + 2x_2 + \qquad u_2 \qquad = 16$$
$$2x_1 - x_2 + \qquad\qquad u_3 = 4$$
$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}.$$

U drugom koraku potrebno je dodati koeficijente u simpleks tablicu.

Tablica 1. Početna simpleks tablica

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	R
0	u_1	4	-1	2	1	0	0	-
0	u_2	16	5	2	0	1	0	16/5
0	u_3	4	2	-1	0	0	1	2
$Z_j - C_j$		0	-11	-4	0	0	0	

Izvor: samo izrada

Nakon unosa potrebno je odrediti najveći $Z_j - C_j$ pri čemu taj stupac postaje referentni što je u ovom slučaju x_1. Zatim je potrebno podijeliti količinu sa koeficijentima referentnog stupca, te odabrati najmanji rezultat što je u ovom slučaju 2 pri čemu je u_3 referentni redak.

Na mjestu križanja stupca i retka nalazi se stožerni element s kojim je potrebno u prvoj iteraciji podijeliti taj redak.

Tablica 2. Prva iteracija

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	R
0	u_1	6	0	3/2	1	0	1/2	4
0	u_2	6	0	9/2	0	1	-5/2	4/3
11	x_1	2	1	-1/2	0	0	1/2	-
$Z_j - C_j$		22	0	-19/2	0	0	11/2	

Izvor: samo izrada

Slijedi dijeljenje retka sa stožernim elementom pa popunjavanje ostatka tablica prema formuli $a'_{ij} = a_{ij} - a'_{rj} * a_{is}$. Nakon toga vidimo da u retku $Z_j - C_j$ javlja još jedna negativna vrijednost, te ona predstavlja referentni stupac. Dijeljenjem količine sa koeficijentima dobivamo da je u_2 referentni redak pri čemu je 9/2 stožerni element.

Tablica 3. Druga iteracija sa rješenjem

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
0	u_1	4	0	0	1	-1/3	4/3
19/2	x_2	4/3	0	1	0	2/9	-5/9
11	x_1	8/3	1	0	0	1/9	2/9
$Z_j - C_j$		104/3	0	0	0	19/9	2/9

Izvor: samo izrada

Na kraju druge iteracije simpleks metoda je gotova pri čemu je postignuto optimalno rješenje pri čemu je $x_1 = 8/3$, $x_2 = 4/3$, $Z = 104/3$. Iz toga relaksiranog rješenja je vidljivo da ne postoji cijeli broj kao rješenje već kao decimalni broj.

Slijedeći korak jest generiranje ravnine pomoću dobivenih rješenja. Za početak je potrebno bazične varijable rješenja razlomiti na cjelobrojni i decimalni dio ili matematički rečeno cjelobrojno podijeliti. Iz toga slijedi:

$$x_1 = \frac{8}{3} = 8\,mod\,3 = 2 \text{ i } 2/3 \text{ ostatak}$$

$$x_2 = \frac{4}{3} = 4\,mod\,3 = 1 \text{ i } 1/3 \text{ ostatak.}$$

Iz toga je je potrebno odabrati najveći decimalni dio, te prema tome odrediti ravninu pa tako imamo de je najveći ostatak jednak

$$max\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Prema tome ravnina će se temeljiti na retku x_1. Zatim treba definirati parametre formule ravnine koji glase $i = 3$ zato jer se radi o trećem tetku, $m = 2$ jer imamo dvije bazične varijable, $n = 5$ jer imamo ukupno pet varijabli u problemu. Slijedeće što slijedi jest uvrštavanje parametara u formulu pri čemu imamo

$$-f_a = -\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j + g_i$$

$$-\frac{2}{3} = -\sum_{J=3}^{5} f_{ij}\, x_j + g_3$$

$$-\frac{2}{3} = -f_{33}x_3 - f_{34}x_4 - f_{35}x_5 + g_3$$

$$-\frac{2}{3} = 0x_3 - \frac{1}{9}x_4 - \frac{2}{9}x_5 + g_3.$$

Generiranu ravninu potrebno je dodati posljednjoj simpleks tablici kao ograničenje, te na primijeniti jedan korak dualne simpleks metode.

Tablica 4. Simpleks tablica sa dodatnim ograničenjem

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	g_3
0	u_1	4	0	0	1	-1/3	4/3	0
19/2	x_2	4/3	0	1	0	2/9	-5/9	0
11	x_1	8/3	1	0	0	1/9	2/9	0
0	g_3	-2/3	0	0	0	-1/9	-2/9	1
$Z_j - C_j$		104/3	0	0	0	19/9	2/9	0

Izvor: samo izrada

Nakon unosa u tablicu treba odrediti koji će vektor izaći, a koji ući u bazu; u ovom slučaju iz baze izlazi g_3 dok je prema (Z. Lukač, L. Neralić, 2012., str. 210.) potrebno podijeliti $Z_j - C_j$ tamo gdje ima vrijednosti sa retkom vektora koji izlazi iz baze da bismo došli do vektora koji ulazi u bazu. Formula po kojoj se to računa glasi

$$\theta = \frac{Z_j - C_j}{t_{rj}}$$

i iz nje je potrebno izvući najveću vrijednost i prema njoj uvesti novi vektoru u bazu. U ovom slučaju imamo

$$max\left(\frac{19/9}{-1/9}, \frac{2/9}{-2/9}\right) = max(-19, -1) = -1$$

iz čega se zaključuje da u bazu ulazi vektor u_3.

Tablica 5. Simpleks tablica sa stožernim elementom

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	g_3
0	u_1	4	0	0	1	-1/3	4/3	0
19/2	x_2	4/3	0	1	0	2/9	-5/9	0
11	x_1	8/3	1	0	0	1/9	2/9	0
0	g_3	-2/3	0	0	0	-1/9	-2/9	1
$Z_j - C_j$		104/3	0	0	0	19/9	2/9	0

Izvor: samo izrada

Iz tablice zaključujemo da je stožerni element jednak -2/9, te da je potrebno podijeliti taj redak sa stožernim elementom i odrediti ostale koeficijente prema formuli $a'_{ij} = a_{ij} - a'_{rj} * a_{is}$. Ono što je zanimljivo na tom postupku ja da će uvijek generirana ravnina izaći iz baričnog rješenja jer je prema formuli decimalni dio uvijek negativan.

Tablica 6. Simpleks tablica sa konačnim rješenjem

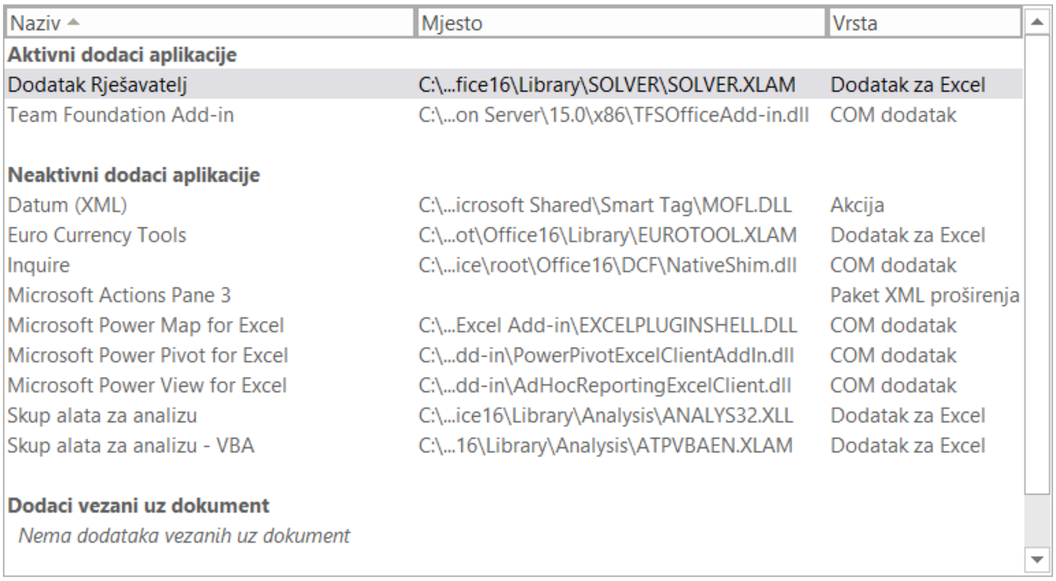
C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	g_3
0	u_1	0	0	0	1	-1	0	0
19/2	x_2	3	0	1	0	1/2	0	-5/2
11	x_1	2	1	0	0	0	0	1/2
2/9	u_3	3	0	0	0	1/2	1	-9/2
$Z_j - C_j$		34	0	0	0	2	0	1

Izvor: samo izrada

U tablici 6. je vidljivo konačno cjelobrojno rješenje iz kojeg se vidi da je $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $Z = 34$.

4.1.2. Prikaz algoritma i rješenja zadatka u MS Excelu

Microsoftov alat Excel nudi mogućnost rješavanja problema cjelobrojnog linearnog programiranja putem dodatka „Rješavatelj zadataka“. Za početak treba uključiti dodatak u sam program putem kartice Datoteka – Mogućnosti – Dodaci i uključiti dodatak „Rješavatelj“.



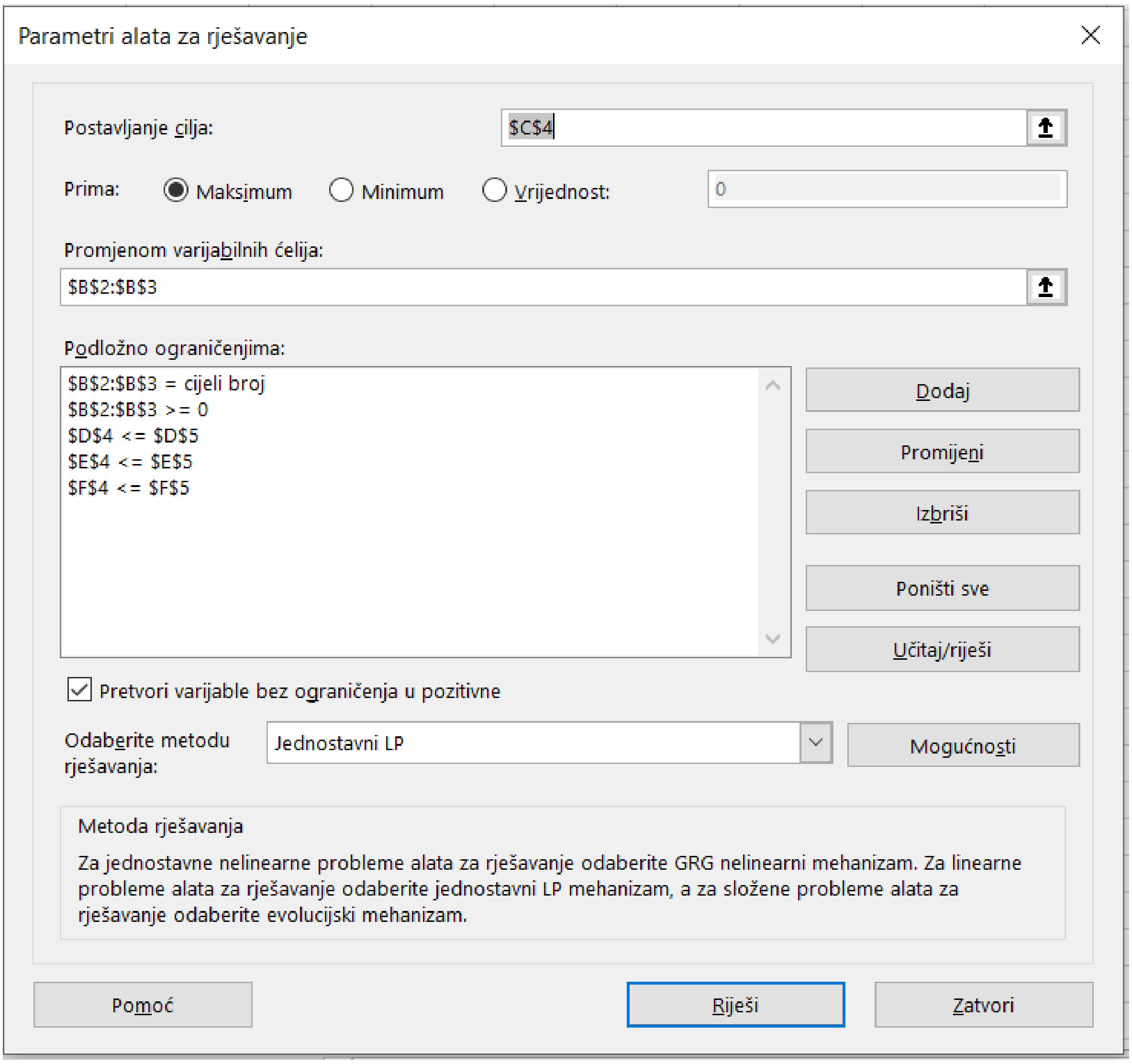
Slika 2. Kartica Mogućnosti sa uključenim dodatkom „Rješavatelj“ u MS Excelu
(Izvor: samo izrada)

	A	B	C	D	E	F
1		Varijabla	Funkcija cilja	Ograničenje 1	Ograničenje 2	Ograničenje 3
2	X1		11	-1	5	2
3	X2		4	2	2	-1
4						
5			Max	4	16	4

Slika 3. Izgled problema u MS Excelu

(Izvor: samo izrada)

Na slici 3. je vidljivo kako je problem formuliran. Definirana je funkcija cilja i ograničenja, te žuta polja označuju vrijednosti koja će dodatak izračunati. Nakon toga slijedi unos potrebnih ograničenja pri čemu je naglasak na funkciju cilja i na promjenu varijabli.



Slika 4. Parametri sukladno zadanim problemom

(Izvor: samo izrada)

Klikom na Riješi program rješava problem i na žuta polja postavlja rješenja i po potrebi se generira izvješće sa rezultatom rješavanja.

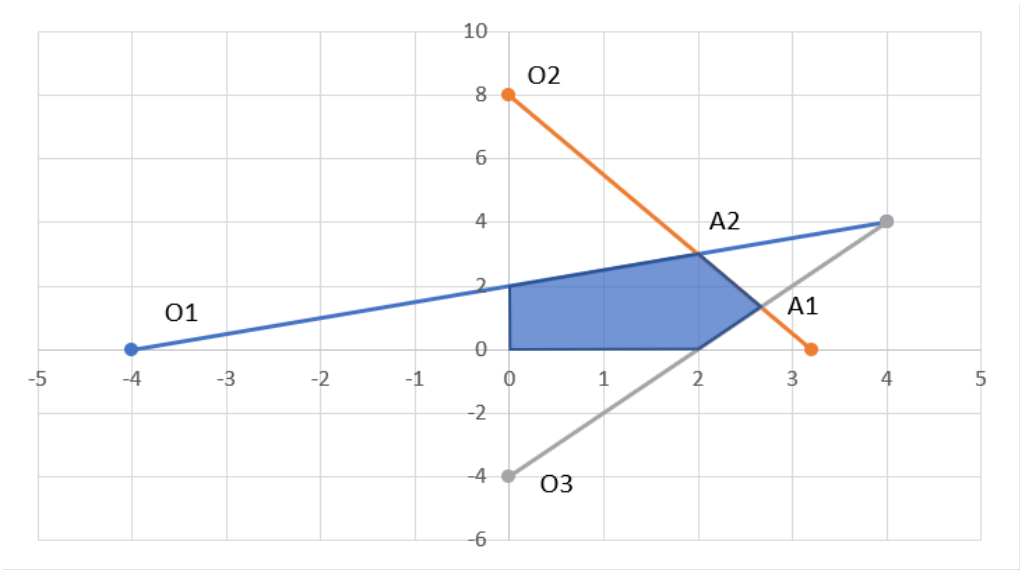
	A	B	C	D	E	F
1		Varijabla	Funkcija cilja	Ograničenje 1	Ograničenje 2	Ograničenje 3
2	X1	2	11	-1	5	2
3	X2	3	4	2	2	-1
4			34	4	16	1
5			Max	4	16	4

Slika 5. Konačno rješenje problema

(Izvor: samo izrada)

4.1.3. Grafička ilustracija rješenja zadatka

Kako se radi o dvije varijable rješenje je moguće prikazati grafički pri čemu su ograničenja pravci koji imaju određeno područje rješenja, plavo ocrtano područje je područje rješenja sa optimalnom točkom A1, dok je točka A2 optimalna za cjelobrojno rješenje.



Slika 6. Grafički prikaz rješenja relaksiranog problema

(Izvor: samo izrada)

Da bi prikazali konačno rješenje, odnosno rješenje cjelobrojnog problema potrebno je pomoću generiranog rješenja dobiti ravninu iskazanu pomoću varijabla x_1 i x_2. Prvo je potrebno ograničenja kanonskog oblika iskazati pomoću varijabli x_1 i x_2 pri čemu imamo

$$x_4 = 16 - 5x_1 - 2x_2$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 + x_2.$$

Gomoroyev odsječak je oblika

$$-\frac{1}{9}x_4 - \frac{2}{9}x_5 \leq -\frac{2}{3}$$

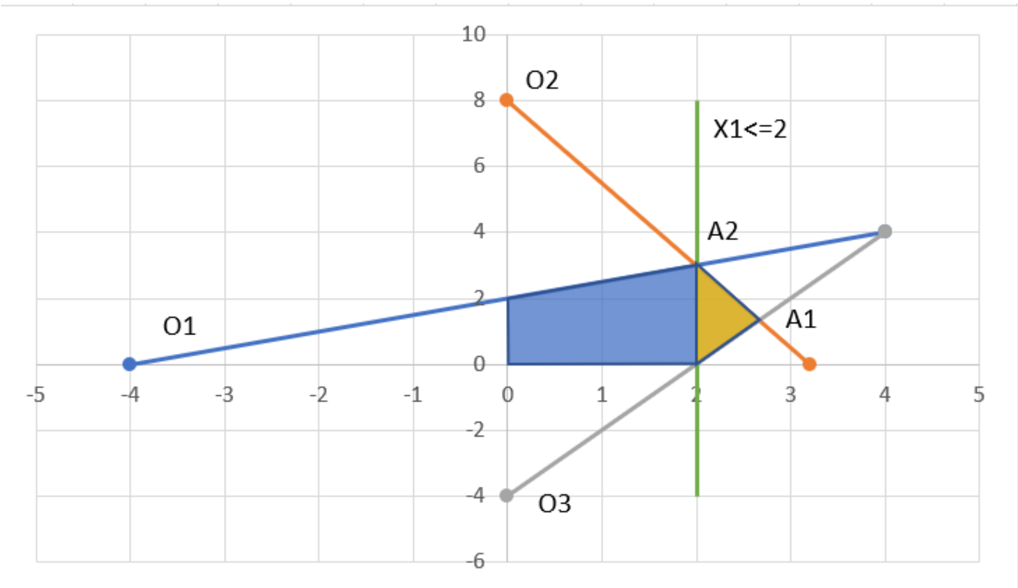
i u njega je potrebno substituirati varijable x_4 i x_5 pri čemu dobivamo slijedeće

$$-\frac{1}{9} * (16 - 5x_1 - 2x_2) - \frac{2}{9} * (4 - 2x_1 + x_2) \leq -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{16}{9} + \frac{5}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \frac{8}{9} + \frac{4}{9}x_1 - \frac{2}{9}x_2 \leq -\frac{2}{3}$$

$$x_1 \leq 2.$$

Ako se ta ravnina uvede na prijašnji graf vidimo de se sva rješenja u žuto obojenom područje odsječena i da je točka nova točka maksimuma točka A2.



Slika 7. Grafički prikaz konačnog rješenja problema

(Izvor: samo izrada)

Isto tako je moguće računski doći do optimalnog rješenja putem MMULT i MINVERSE. Funkcija MMULT vraća produkt sva polja, dok funkcija MINVERSE vraća inverznu matricu u polju. Bitno je prije toga definirati koji se pravci sijeku za pojedinu točko da bi se znale vrijednosti polja.

Točka A1						X1	2,67
O2	5	2	<=	16		X2	1,33
O3	2	-1	<=	4		Z	34,7
Točka A2						X1	2
O1	-1	2	<=	4		X2	3
O2	5	2	<=	16		Z	34

Slika 8. Prikaz optimalnih rješenja problema
(Izvor: samo izrada)

4.1.4. Primjer zadatka sa dvije ravnine

Kod ovog primjera ćemo imati dvije ravnine koje će odsijecati skup rješenja, te tako predstaviti cjelobrojno rješenje. Zadana je funkcija cilja

$$min\, z = -\, x_1 - x_2$$

sa ograničenjima

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 17$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Iz tog oblika treba napraviti kanonski oblik i dodati dopunske varijable što onda ima oblik

$$min\, z = 7x_1 + 9x_2 + 0 * (-u_1 - u_2) + M(w_1 + w_2)$$

$$2x_1 + 5x_2 - u_1 \qquad + w_1 \qquad = 20$$

$$4x_1 + 3x_2 \qquad - u_2 \qquad + w_2 = 17$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, w_1, w_2 \geq 0, \qquad x_1, x_2, u_1, u_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}.$$

Nakon toga slijedi upis u simpleks tablicu.

Tablica 7. Početna simpleks tablica

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	R
M	w_1	20	2	5	-1	0	1	0	4
M	w_2	17	4	3	0	-1	0	1	17/3
$Z_j - C_j$		0	1	1	0	0	0	0	
d_j		37	6	8	-1	-1	1	1	

Izvor: samo izrada

Opet se gleda najveća apsolutna vrijednost, ali sad u d_j retku što je 8, te taj stupac postaje referentni. Slijedi podjela količine se koeficijentima od referentnog retka pri čemu se uzima najmanji što je w_1 u ovom slučaju. Slijedi dijeljenje retka sa stožernim elementom i određivanje ostalih koeficijenata.

Tablica 8. Prva iteracija

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	R
1	x_2	2	2/5	1	-1/5	0	1/5	0	10
M	w_2	5	14/5	0	3/5	-1	-3/5	1	25/14
$Z_j - C_j$		-4	3/5	0	1/5	0	-1/5	0	
d_j		5	14/5	0	3/5	-1	3/5	1	

Izvor: samo izrada

Slijedeći vektor koji napušta je w_2 dok u bazu ulazi x_1. Opet se odredi redak i stupac, te se redak podijeli sa stožernim elementom; u ovom slučaju 14/5.

Tablica 9. Druga iteracija sa rješenjem

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	R
1	x_2	23/7	0	1	-2/7	1/7	2/7	-1/7	
3/5	x_1	25/14	1	0	3/14	-5/15	-3/14	5/14	
$Z_j - C_j$		-71/14	0	0	1/14	3/14	-1/14	-3/14	
d_j		0	0	0	0	0	0	0	

Izvor: samo izrada

Iz tablice 9 je vidljivo da je postignuto relaksirano rješenje koje nije optimalno i iznosi $x_1 = 25/14$, $x_2 = 23/7$, $Z = -71/14$. Kako konačno rješenje nije cjelobrojno potrebno je generirati ravninu koja će odsjeći dio rješenja, te tako biti bliža cjelobrojnom. Za početak je potrebno rješenje cjelobrojno podijeliti i odrediti njihove ostatke, odnosno decimalne dijelove. Pa tako imamo

$$x_1 = \frac{25}{14} = 25 \, mod \, 14 = 1 \text{ i } 11/14 \text{ ostatak}$$

$$x_2 = \frac{23}{7} = 23 \, mod \, 7 = 3 \text{ i } 2/7 \text{ ostatak.}$$

Iz tih decimalnih dijelova potrebno je izvući najveći, a u ovom slučaju vrijedi

$$max\left(\frac{11}{14}, \frac{2}{7}\right) = \frac{11}{14}.$$

Ako su oba ista kao u ovom slučaju potpuno je svejedno po kojoj varijabli će se generirati odsijecajuća ravnina. U ovom primjeru ravnina će biti generirana preko vektora x_1 i ima slijedeće parametre $i = 2$ je se radi o drugom retku, $m = 2$ jer imamo dvije bazične varijable, $n = 4$ jer se u problemu nalazi četiri varijable. Uvrštavanjem dobivamo

$$-f_a = -\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}\, x_j + g_i$$

$$-\frac{11}{14} = -\sum_{j=3}^{4} f_{ij}\, x_j + g_2$$

$$-\frac{11}{14} = -f_{13}x_3 - f_{14}x_4 + g_2$$

$$-\frac{11}{14} = -\frac{11}{14}x_3 - \frac{5}{14}x_4 + g_2.$$

Definiranu ravninu potrebno je staviti u relaksirani problem kao ograničenje i zatim primijeniti korak dualne simpleks metode.

Tablica 10. Simpleks tablica sa dodatnim ograničenjem

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	g_2
1	x_2	23/7	0	1	-2/7	1/7	2/7	-1/7	0
3/5	x_1	25/14	1	0	3/14	-5/15	-3/14	5/14	0
0	g_2	-11/14	0	0	11/14	5/14	-11/14	-5/14	1
$Z_j - C_j$		-71/14	0	0	1/14	3/14	-1/14	-3/14	

Izvor: samo izrada

Slijedi primjene koraka dualne simpleks metode kod koje treba definirati koji vektor izlazi, a koji ulazi u bazično rješenje prema gore spomenutoj formuli.

Prema formuli slijedi

$$max\left(\frac{1/14}{11/14},\frac{3/14}{5/14},\frac{-1/14}{-11/14},\frac{-3/14}{-5/14}\right) = \max\left(\frac{1}{11},\frac{3}{5},\frac{1}{11},\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{11}$$

iz čega se vidi da u bazu ulazi vektor w_1 pošto se radi o artificijalnoj varijabli.

Tablica 11. Simpleks tablica sa stožernim elementom

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	g_2
1	x_2	23/7	0	1	-2/7	1/7	2/7	-1/7	0
3/5	x_1	25/14	1	0	3/14	-5/15	-3/14	5/14	0
0	g_2	-11/14	0	0	11/14	5/14	-11/14	-5/14	1
$Z_j - C_j$		-71/14	0	0	1/14	3/14	-1/14	-3/14	

Izvor: samo izrada

Sljedeće što slijedi jest podjela retka sa stožernim elementom i izračun ostalih koeficijenta i prikaz konačnog rješenja.

Tablica 12. Simpleks tablica sa konačnim rješenjem

C_j	Var	Kol	x_1	x_2	u_1	u_2	w_1	w_2	g_2
1	x_2	3	0	1	0	3/11	0	-3/11	4/11
3/5	x_1	2	1	2	0	-5/11	0	5/11	-3/11
1/14	w_1	1	0	0	-1	-5/11	1	5/11	-14/11
$Z_j - C_j$		-5	0	0	0	0	0	2/11	

Izvor: samo izrada

Iz konačnog rješenja je vidljivo da je $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $Z = -5$.

4.1.5. Prikaz algoritma i rješenja zadatka u MS Excelu

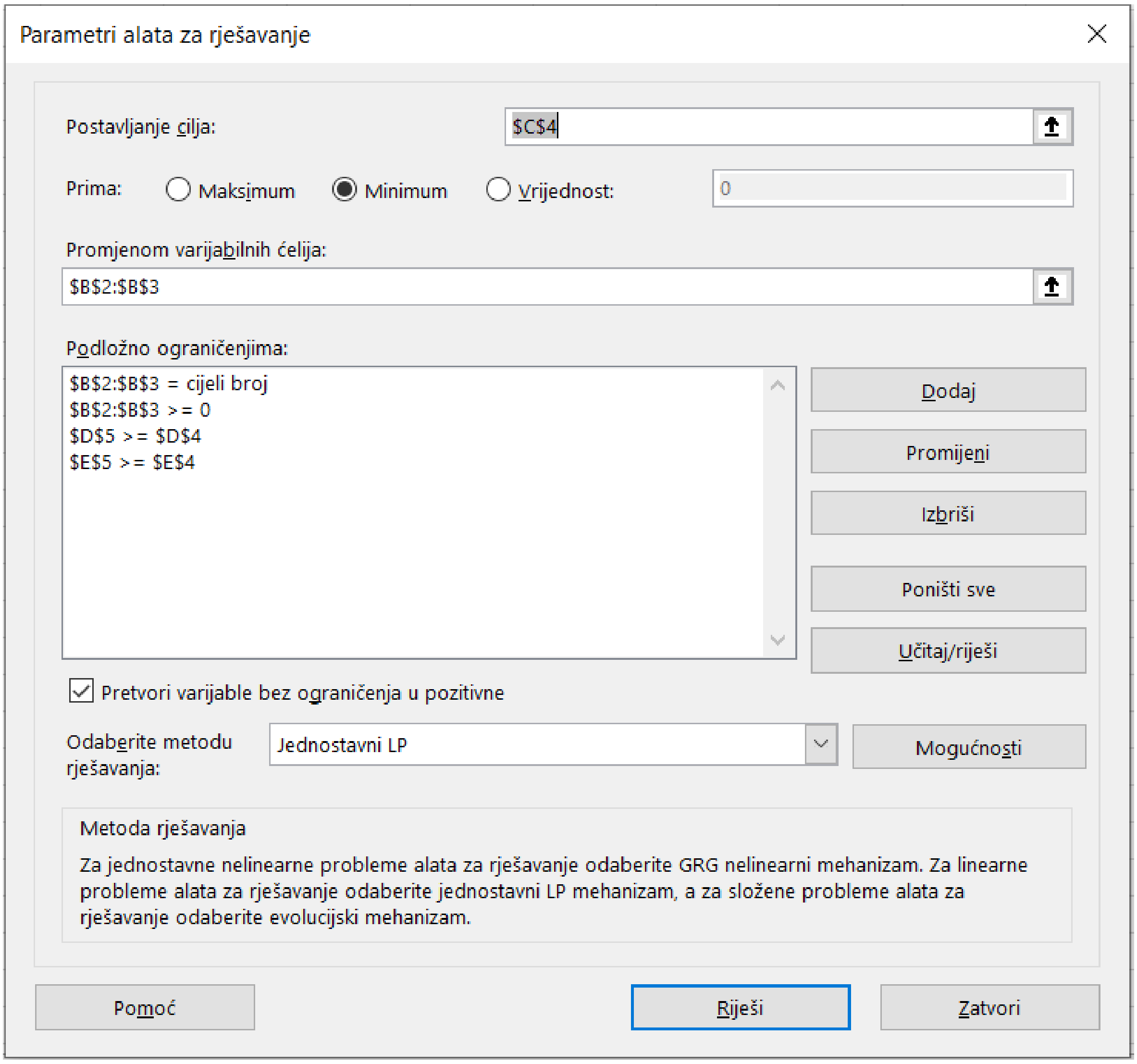
Opet je potrebno postaviti početni problem u alatu sa funkcijom cilja i ograničenjima.

	A	B	C	D	E
1		Varijabla	Funkcija cilja	Ograničenje 1	Ograničenje 2
2	X1		-1	2	4
3	X2		-1	5	3
4					
5			Min	20	17

Slika 9. Izgled problema u MS Excelu

(Izvor: samo izrada)

U nastavku slijedi unos ograničenja i promjena varijabli vezano za problem.



Slika 10. Parametri sukladno zadanim problemom

(Izvor: samo izrada)

Klikom na Riješi program rješava problem i na žuta polja postavlja rješenja i po potrebi se generira izvješće sa rezultatom rješavanja.

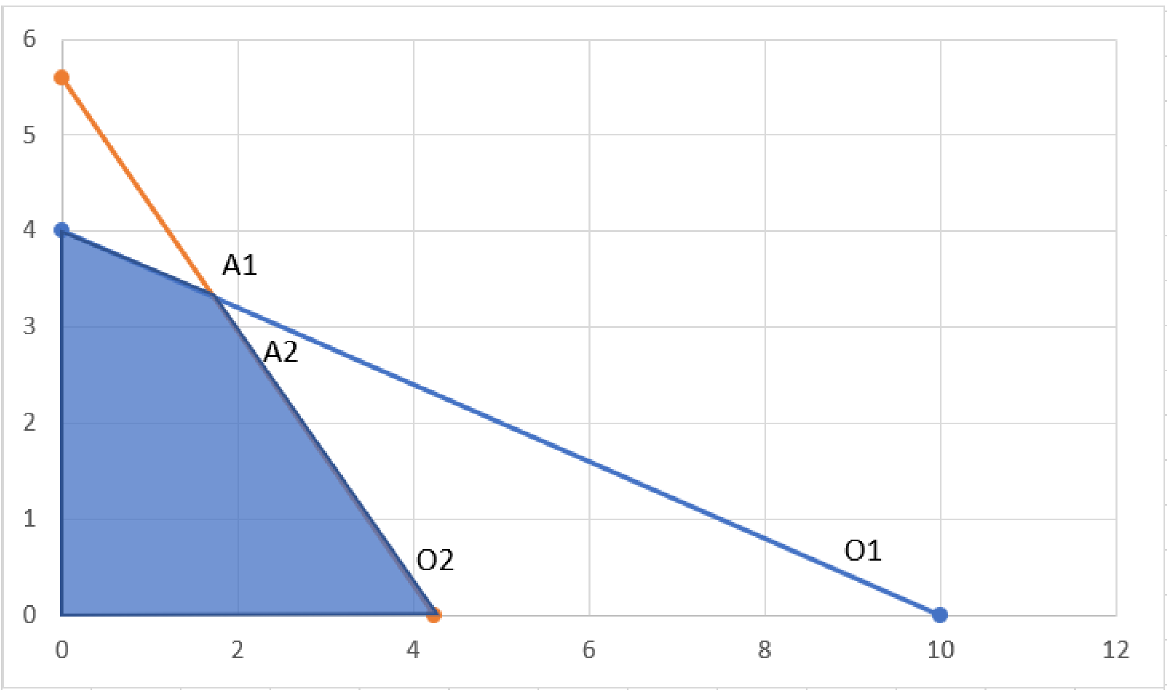
	A	B	C	D	E
1		Varijabla	Funkcija cilja	Ograničenje 1	Ograničenje 2
2	X1	2	-1	2	4
3	X2	3	-1	5	3
4			-5	19	17
5			Min	20	17

Slika 11. Konačno rješenje problema

(Izvor: samo izrada)

4.1.6. Grafička ilustracija rješenja zadatka

I u ovom primjeru se radi s dvije pri čemu je moguće i grafički riješiti problem. U ovom slučaju točka A1 je je optimalna za relaksirani problem, dok je A2 optimalna za cjelobrojni problem.



Slika 12. Grafički prikaz rješenja relaksiranog problema

(Izvor: samo izrada)

Da bi došli do konačnog rješenja potrebno je je dopunske varijable izraziti pomoću baznih varijabli x_1 i x_2 pri čemu dobivamo

$$x_3 = 20 - 2x_1 - 5x_2$$
$$x_4 = 17 - 4x_1 - 3x_2.$$

Kod generiranja odsječaka imamo dva odsječka, prvi generiran oblika

$$\frac{11}{14}x_3 + \frac{5}{14}x_4 \leq \frac{11}{14}$$

i drugi koji se očita iz prvog rješenja relaksiranog rješenja

$$\frac{2}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 \leq \frac{2}{7}.$$

Slijedeće što je potrebno je prikazati ravnine pomoću varijabli x_4 i x_5 pri čemu slijedi

$$\frac{11}{14} * (20 - 2x_1 - 5x_2) + \frac{5}{14} * (17 - 4x_1 - 3x_2) \leq \frac{11}{14}$$

$$\frac{110}{7} - \frac{11}{7}x_1 - \frac{55}{14}x_2 + \frac{85}{14} - \frac{10}{7}x_1 - \frac{15}{7}x_2 \leq \frac{11}{14}$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 21$$

i

$$\frac{2}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 \leq \frac{2}{7} \quad /* 7$$

$$2x_3 + 6x_4 \leq 2 \quad /\div 2$$

$$x_3 + 3x_4 \leq 1$$

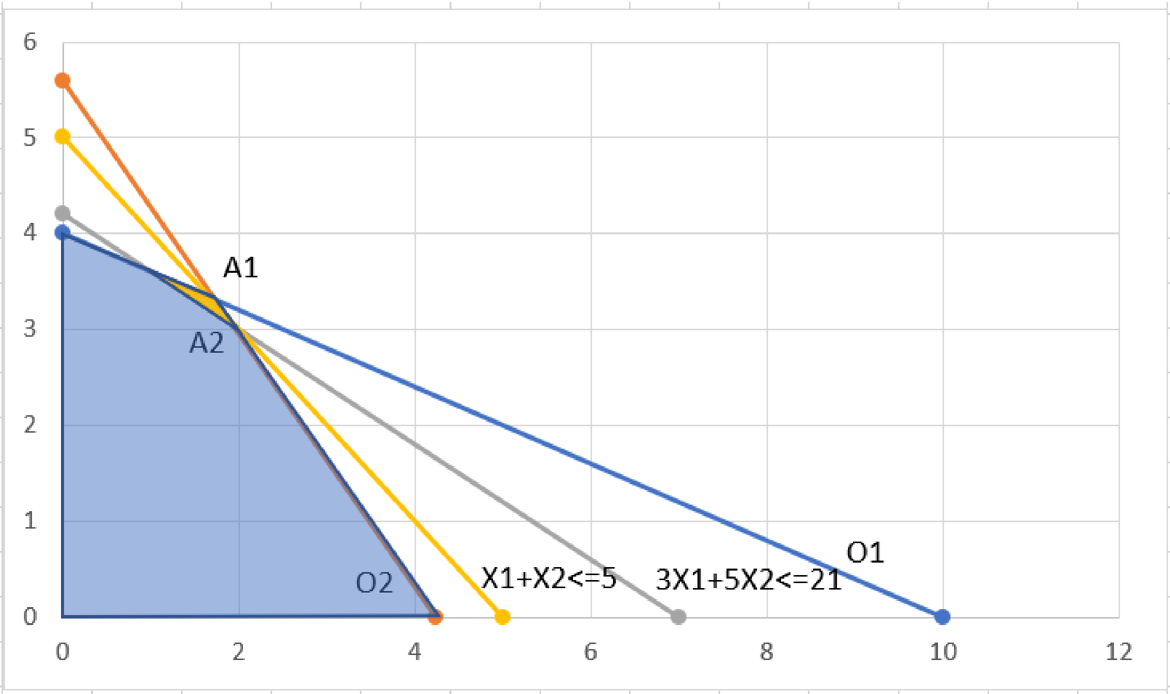
$$20 - 2x_1 - 5x_2 + 3 * (17 - 4x_1 - 3x_2) \leq 1$$

$$20 - 2x_1 - 5x_2 + 51 - 12x_1 - 9x_2 \leq 1$$

$$-14x_1 - 14x_2 \leq 70 \quad /\div 14$$

$$x_1 + x_2 \leq 5.$$

Ukoliko se te ravnine dodaju na relaksirano rješenje vidimo da je nova optimalna točka A2 sa koordinatama (2,3). Isto tako žuto područje označuje odsječeni dio rješenje, dok plavi dio označuje područje mogućih rješenja.



Slika 13. Grafički prikaz konačnog rješenja problema

(Izvor: samo izrada)

I za kraj su još izračunate optimalne točke relaksiranog i cjelobrojnog problema pute MMULT i MINVERSE funkcija.

U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
Točka A1						X1	1,79
O1	2	5	<=	20		X2	3,29
O2	4	3	<=	17		Z	-5,07
Točka A2						X1	2
O2	4	3	<=	17		X2	3
X1+X2<=5	1	1	<=	5		Z	-5

Slika 14. Prikaz optimalnih rješenja problema

(Izvor: samo izrada)

4.2. Metoda grananja i ograđivanja

Druga metoda započela se razvijati 60-ih godina pri čemu su je uveli Land i Doig. Kod ove metode također je potrebno riješiti relaksirani problem koji će dati rješenje. Ukoliko rješenje nije cjelobrojno potrebno je izvršiti grananje i generirati dva nova ograničenja koja se smještaju u binarno stablo kao čvor. Ono što je bitno je da prvi čvor predstavlja ograničenje koje poprima vrijednost manje ili jednako prvom cijelom broju manjem od početnog rješenja, dok desni čvor predstavlja ograničenje za vrijednost veće ili jednaku prvom većem cijelom broju. (D. Kalpić, V. Mornar, 1996.)

Prema (Z. Lukač, L. Neralić, 2012., str. 142-143) algoritam metoda grananja i ograđivanja sastoji se od slijedećih koraka:

1. korak (Početak algoritma): potrebno je nakon relaksiranog rješenja odrediti donju granicu za maksimalnu vrijednost funkcije cilja. Ako nema mogućeg rješenja može se staviti da vrijedi $z_d = -\infty$.

2. korak (Grananje): izvršiti separaciju skupa mogućih rješenja na dva ili više podskupova. Jedan dio neka je podskup za koji vrijedi $x_k \leq c$, a za drugi $x_k \geq c + 1$ pri čemu je k varijabla i c neka cjelobrojna konstanta.

3. korak (Izračunavanje ograda): za svaki podskup je potrebno izračunati gornju ogradu na maksimalnu vrijednost funkcije cilja u tom podskupu.

4. korak (Isključivanje): ukoliko podskup nema rješenja ili se desi da je donja granica veća od gornje ili je postignuto cjelobrojno rješenje on se isključuje iz daljnjeg razmatranja.

5. korak (Završetak algoritma): ako su svi podskupovi isključeni, algoritam je gotov i postignuto je konačno rješenje. U protivnom potrebno je ići na 2. korak.

4.2.1. Primjer algoritma i ilustracija rješenja u MS Excelu

Zadan je slijedeći problem

$$max\, z = 8x_1 + 5x_2$$

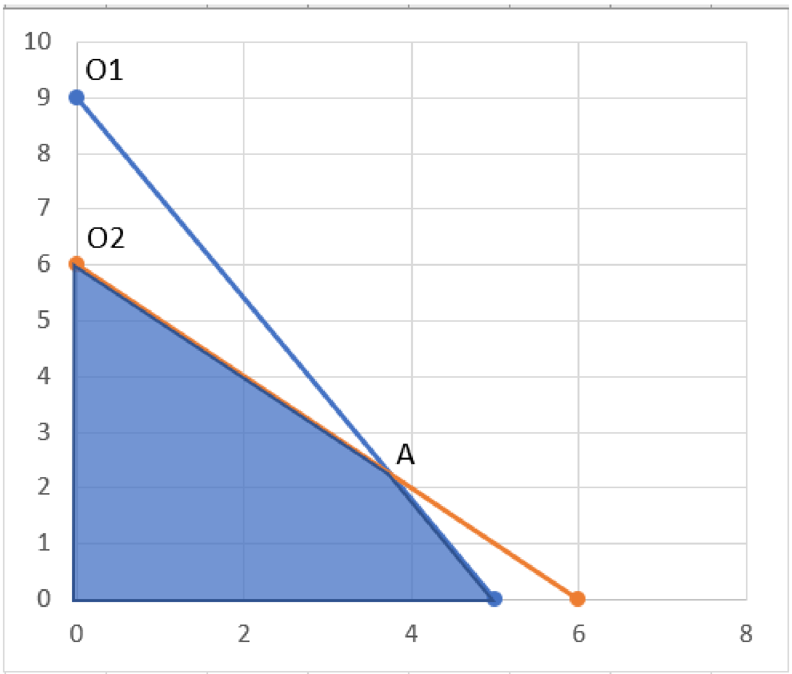
sa ograničenjima

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \;\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ovaj će primjer biti riješen pomoću grafičke metode pa je za početak potrebno ucrtati ograničenja u koordinatni sustav.



Slika 15. Izgled problema i izraženo relaksirano rješenje u MS Excelu
(Izvor: samo izrada)

Nakon ucrtanih ograničenja možemo naći vrijednost točke A koja je rješenje relaksiranog rješenja. Točka se dobi kao sjecište dvaju pravaca pa vrijedi

$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$x_1 + x_2 = 6 \ \ /*\,9$$

$$-\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 = 45 \\ 9x_1 + 9x_2 = 54 \end{cases}$$

$$-4x_2 = -9/:(-4)$$
$$x_2 = 2.25$$

Uvrštavanjem x_2 u drugu jednadžbu dobivamo da je x_1 jednak

$$x_1 + 2.25 = 6$$
$$x_1 = 6 - 2.25$$
$$x_1 = 3.75.$$

Rješenje relaksiranog problema je $x_1 = 3.75$, $x_2 = 2.25$, $Z = 41.25$.

Točka A						X1	3,75
O1	9	5	<=	45		X2	2,25
O2	1	1	<=	6		Z	41,25

Slika 16. Optimalno rješenje u MS Excelu

(Izvor: samo izrada)

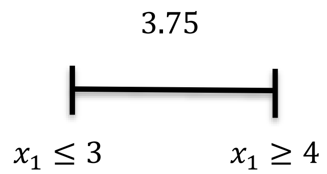
Završetkom relaksiranog problema potrebno je ga je staviti u korijen stabla.

$$\boxed{\begin{array}{c} Z = 41.25 \\ x_1 = 3.75, x_2 = 2.25 \end{array}}$$

Slika 17. Korijen stabla rješenja

(Izvor: samo izrada)

Definiranjem korijena stabla rješenja potrebno je rješenju sa najvećim decimalnim dijelom dodati gornju i donji granicu i prema tome sastaviti podskupove ili podprobleme sukladno granicama. U ovom slučaju najveći decimalni dio iznosi 0.75 što znači da se prema cijelom broju 3 određuju ograde.



Slika 18. Prikaz određivanja gornje i donje granice

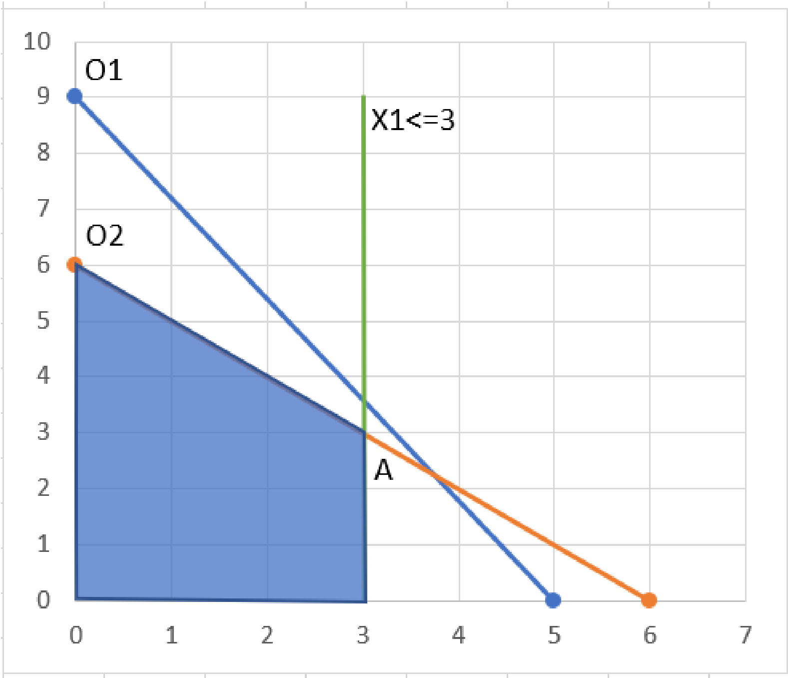
(Izvor: samo izrada)

Kada smo definirali granice potrebno ih je dodati u početni problem pa se tako formiraju podproblemi koji su slijedećih oblika

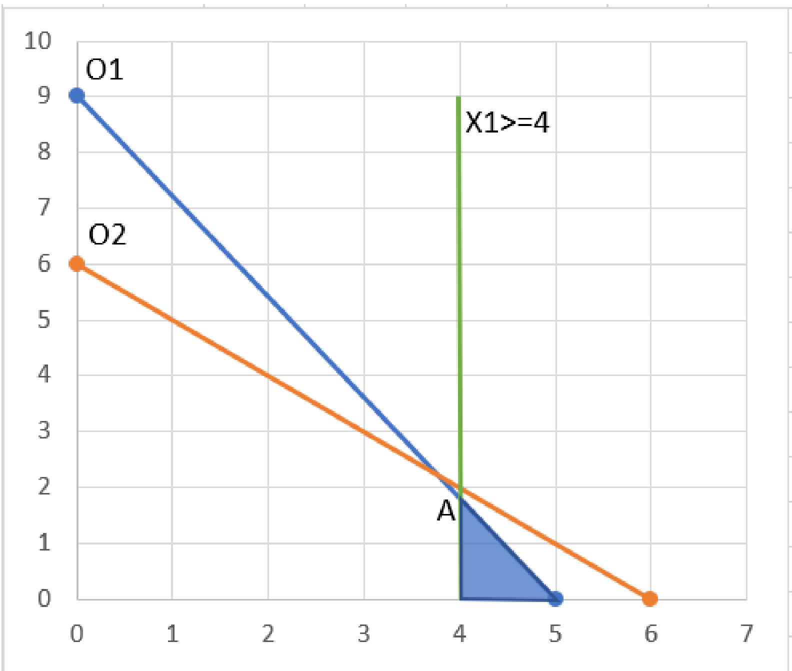
$$\begin{array}{cc} \max z = 8x_1 + 5x_2 & \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 6 & x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 & x_1 \geq 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Za svaki podproblem je potrebno grafički odrediti područje rješenje i optimalnu točku.



Slika 19. Grafički prikaz rješenja prvog podproblema
(Izvor: samo izrada)



Slika 20. Grafički prikaz rješenja drugog podproblema
(Izvor: samo izrada)

Kod prvog podproblema dobivamo da je $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $Z = 39$, dok kod drugog treba opet pomoću sjecišta odrediti rješenja pa prema tome dobivamo

$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$x_1 = 4 \quad /* 9$$

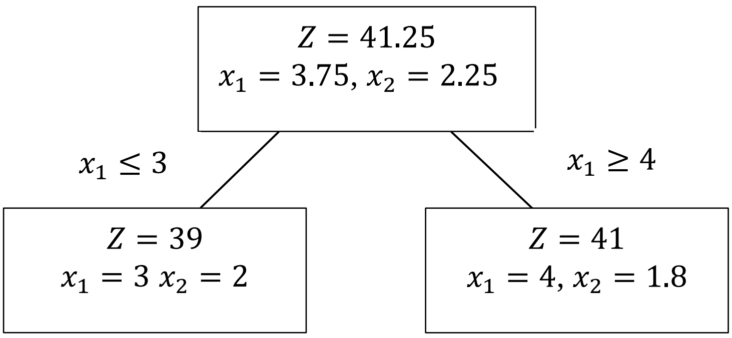
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9x_1 = 36$$

$$x_1 = 4.$$

Dobivena vrijednost se uvrsti u prvu jednadžbu i dobi se slijedeće rješenje

$$9 * 4 + 5x_2 = 45$$
$$36 + 5x_2 = 45$$
$$5x_2 = 9 \quad /: 5$$
$$x_2 = 1.8.$$

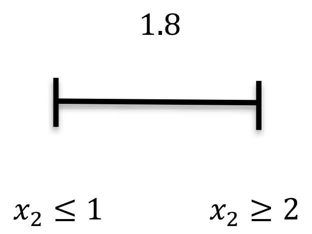
Iz tih problema možemo zaključiti da prvi podproblem otpada jer je postignuto cjelobrojno rješenje, dok drugi ide na daljnju raščlambu. Isto tako trebamo ažurirat stablo i dodati mu čvorove.



Slika 21. Ažurirano stablo sa prvim i drugim potproblemom

(Izvor: samo izrada)

Prvi podproblem otpada, dok je drugi moguće dalje dekomponirat na dva potproblema. Kod ovog koraka traženje najvećeg decimalnog dijela otpada jer je samo jedna vrijednost u igri. Kod drugog podproblema je potrebno odrediti gornju i donju ogradu za $x_2 = 1.8$ i prema tome generirati dodatna ograničenja koja treba nadodati na prijašnja i opet grafički riješiti.



Slika 22. Prikaz određivanja gornje i donje granice

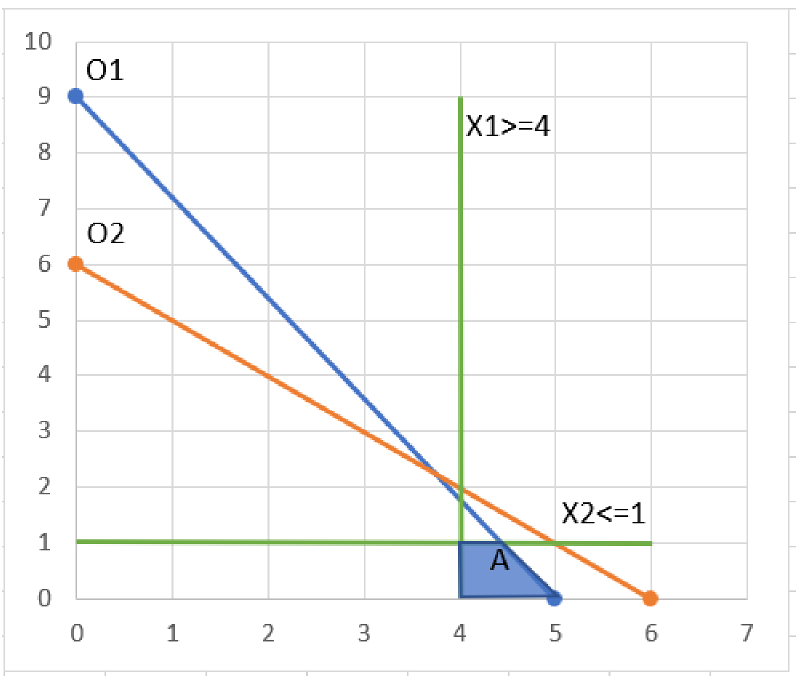
(Izvor: samo izrada)

Kad su granice definirane potrebno je ažurirati prethodni problem pri čemu slijedi

$$\begin{array}{cc} \max z = 8x_1 + 5x_2 & \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 6 & x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 4 & x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 1 & x_2 \geq 2 \end{array}$$

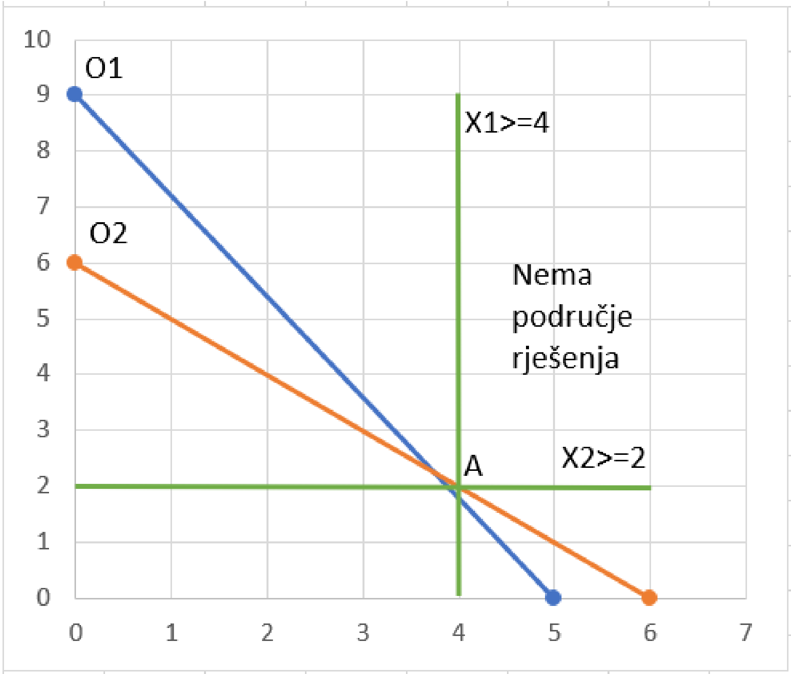
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Isto kao i prije potrebno je ucrtat ograničenja i odrediti rješenje.



Slika 23. Grafički prikaz rješenja trećeg potproblema

(Izvor: samo izrada)



Slika 24. Grafički prikaz rješenja četvrtog podproblema
(Izvor: samo izrada)

Rješenje trećeg podproblema glasi kao sjecište ograničenja $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ i $x_2 \geq 2$ pa vrijedi slijedeće

$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$x_2 = 1 \;\; /*5$$

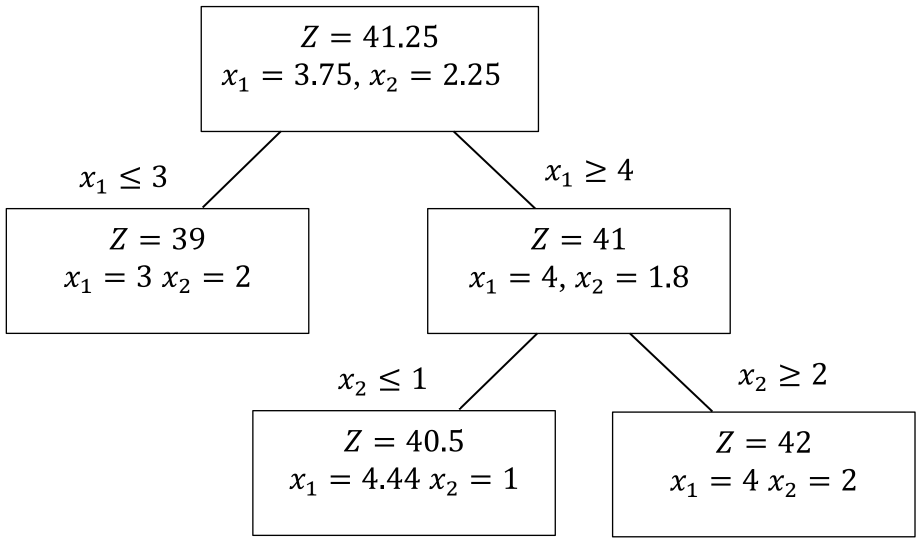
$$- \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 = 45 \\ \qquad\; 5x_2 = 5 \end{cases}$$

$$9x_1 = 40 \;\; /:9$$
$$x_1 = 4.44.$$

Ako se dobiveni x_1 uvrsti u prvu jednadžbu dobivamo

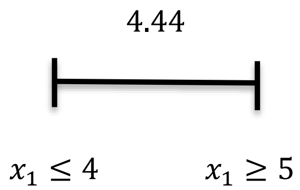
$$9 * 4.44 + 5x_2 = 45$$
$$39.96 + 5x_2 = 45$$
$$5x_2 = 5.05 \;\; /:5$$
$$x_2 = 5.04 \approx 5.$$

Kod grafičkog prikaza četvrtog podproblema se vidi da vrijedi $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ Z = 42.$ To rješenje se dalje ne razmatra, te se mogu oba rješenja dodati u stablo.



Slika 25. Ažurirano stablo sa trećim i četvrtim potproblemom
(Izvor: samo izrada)

Isto imamo situaciju kao i prije da se javlja jedno decimalno rješenje koje je opet potrebno dekomponirati na dva potproblema. Potrebno je odrediti gornju i donju ogradu za $x_1 = 4.44$, uvesti u prijašnji problem kao ograničenje i grafički riješiti.



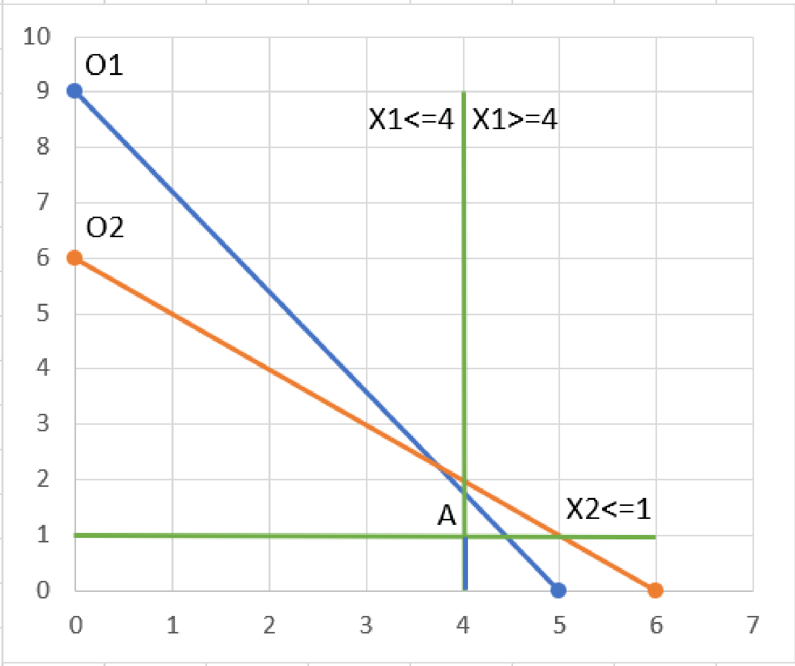
Slika 26. Prikaz određivanje gornje i donje granice
(Izvor: samo izrada)

Nakon definiranja granica treba uvesti ograničenja u prijašnji problem pri čemu slijedi

$$\begin{array}{cc}
max\ z = 8x_1 + 5x_2 & max\ z = 8x_1 + 5x_2 \\
9x_1 + 5x_2 \leq 45 & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\
x_1 + x_2 \leq 6 & x_1 + x_2 \leq 6 \\
x_1 \geq 4 & x_1 \geq 4 \\
x_2 \leq 1 & x_2 \geq 2 \\
x_1 \leq 4 & x_1 \geq 5
\end{array}$$

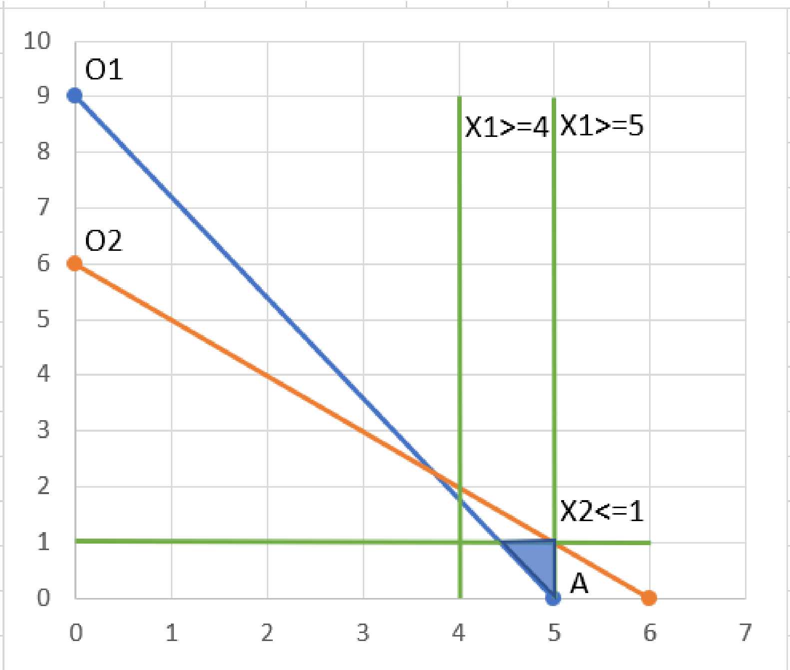
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ono što slijedi jest ucrtavanje problema u koordinatni sustav.



Slika 27. Grafički prikaz rješenja petog potproblema

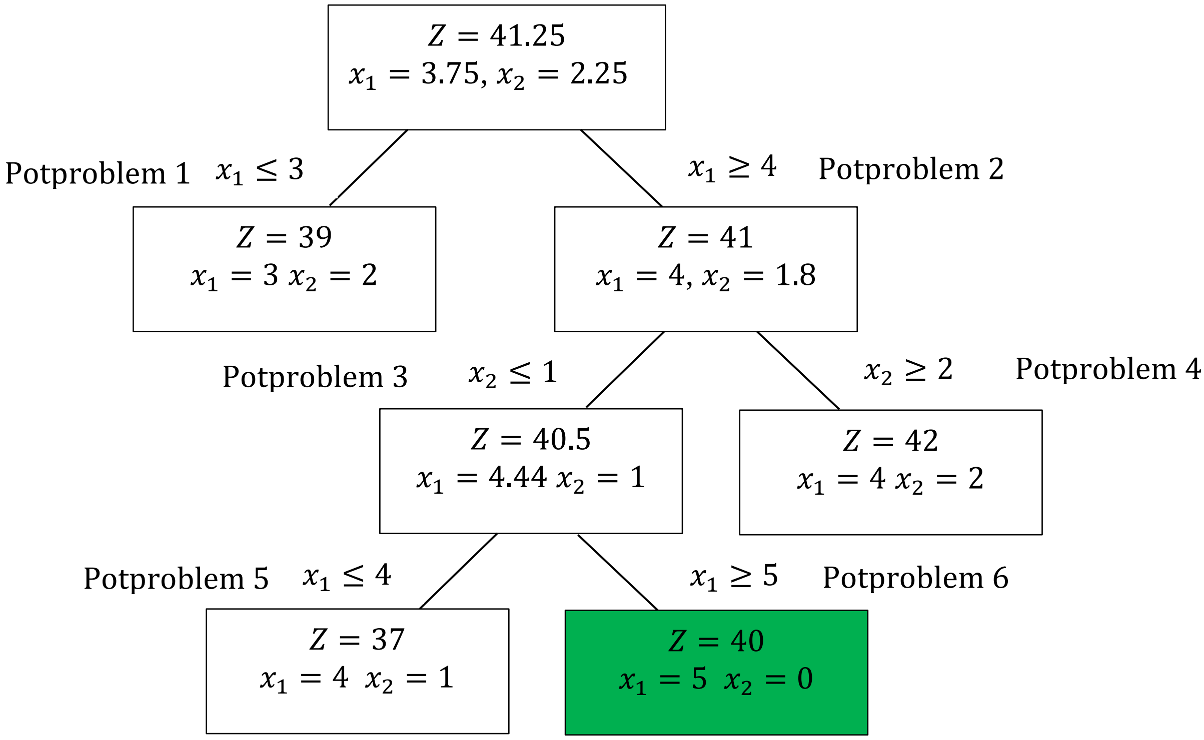
(Izvor: samo izrada)



Slika 28. Grafički prikaz rješenja šestog podproblema

(Izvor: samo izrada)

Oba rješenja je moguće grafički očitat i iznose $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $Z = 37$ za peti potproblem, dok za šesti podproblem iznosi $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $Z = 40$. Iz tih podproblema se može zaključiti da su rješenja cjelobrojna, te da je algoritam gotov. Konačno rješenje je ono koje ima najveću vrijednost funkcije cilja; u ovom slučaju najveću vrijednost ima šesti podproblem. S tim je moguće dovršiti stablo i prikazati sve rješenja dobiveno kroz algoritam.



Slika 29. Konačno stablo rješenja problema
(Izvor: samo izrada)

Iz stabla se može zaključiti da neki potproblemi imaju veću vrijednost funkcije cilja u odnosu na druge. Kod odabira rješenja potrebno je paziti na cjelobrojnost varijabli i na čim veću vrijednost funkcije cilja; u ovim slučaju u razmatranje idu potproblem 1, podproblem 5 i potproblem 6. Potproblem 4 ne ide u razmatranje jer nema područje rješenja. Od tih podproblema najveću vrijednost funkciju cilja ima potproblem 6 pa je ona rješenje problema.

5. Zaključak

Cjelobrojno programiranje kao podvrsta linearnog programiranja nudi rješenje problema u cjelobrojnom obliku. Ukoliko je potrebno uvjet cjelobrojnosti može se primijeniti na određene varijable pri čemu govorimo o djelomičnom cjelobrojnom programiranja.

U realnom svijetu postoje tri problema koja zahtijevaju cjelobrojno programiranje, a to su: problem s fiksnim troškovima, problem optimalne investicijske odluke i problem ranca. Kod problema s fiksnim troškovima ideja je da se čim više smanje pošto oni ne ovise o obujmu proizvodnje poduzeća. Problem ranca i optimalne investicijske odluke jest funkcija cilja koja teži u maksimum pri čemu je kod problem ranca odabrati pomno odabrati koji ćemo predmet unutra stavit, dok kod optimalne investicijske odluke obratiti pozornost neto sadašnje vrijednost kod pojedinih projekta i imati na umu da bude čim veća.

Kod samog rješavanje problema postoje dva algoritma, a to su: metoda cjelobrojnih formi i metoda grananja i ograđivanja. Te dvije metoda imaju potpuno različite pristupe pa je i samim time i složenost različita. Metoda cjelobrojnih ima čisti matematički pristup pri čemu se može putem jednadžbe generirat ograničenje koje odsijeca skup rješenja. Naknadno se putem te jednadžbe može generirat ravnina putem bazičnih varijabli i prikazati je u koordinatnim sustavu sa ostalim ograničenjima i područjem rješenja. Kod metode grananja i ograđivanja pristup je drugačiji pa se kod njega glavni problem raščlanjuje na manje dijelove te tako rješava. Nakon formiranja i rješavanja tih dijelova, odnosno podproblema odabire se jedno, optimalno rješenje.

Kod ručnog rađenog rješenja programsku podršku vršio je MS Excel sa svojim vanjskim dodatkom „Rješavatelj zadatka“ i matematičkim funkcijama koje nude mogućnost rješavanja linearnog programiranja sa uvjetom cjelobrojnosti. Isto tako MS Excel nudi mogućnost generiranja izvješća iz kojeg se vidi rješenje i ključni postupci u rješavanju problema.

Popis literature

[1] Lukač Z., Neralić L. (2012.) *Operacijska istraživanja*. (udžbenik Sveučilišta u Zagrebu). Zagreb: Element d.o.o.

[2] Barković D. (2001.) *Operacijska istraživanja*. Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera – Ekonomski fakultet u Osijeku

[3] Kalpić D., Mornar V. (1996.) *Operacijska istraživanja*. Zagreb: Društvo za razvoj informacijske pismenosti

[4] Martić Lj. (1979.) *Matematičke metode za ekonomske analize, II. svezak*. (udžbenik Sveučilišta u Zagrebu). Zagreb: Narodne novine

[5] Jordanović M. *Algoritmi.* Matematički fakultet, Beograd. Preuzeto sa http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml07199/algoritmi-final/Problem_ranca.html na dan 25.07.2019.

Popis slika

Popis slika treba biti izrađen po uzoru na indeksirani sadržaj, te upućivati na broj stranice na kojoj se slika može pronaći.

Slika 1. Primjer rada algoritma kod problema ranca 5
Slika 2. Kartica Mogućnosti sa uključenim dodatkom „Rješavatelj“ u MS Excelu 12
Slika 3. Izgled problema u MS Excelu 13
Slika 4. Parametri sukladno zadanim problemom 13
Slika 5. Konačno rješenje problema 14
Slika 6. Grafički prikaz rješenja relaksiranog problema 14
Slika 7. Grafički prikaz konačnog rješenja problema 15
Slika 8. Prikaz optimalnih rješenja problema 16
Slika 9. Izgled problema u MS Excelu 21
Slika 10. Parametri sukladno zadanim problemom 21
Slika 11. Konačno rješenje problema 22
Slika 12. Grafički prikaz rješenja relaksiranog problema 22
Slika 13. Grafički prikaz konačnog rješenja problema 24
Slika 14. Prikaz optimalnih rješenja problema 24
Slika 15. Izgled problema i izraženo relaksirano rješenje u MS Excelu 26
Slika 16. Optimalno rješenje u MS Excelu 27
Slika 17. Korijen stabla rješenja 27
Slika 18. Prikaz određivanja gornje i donje granice 27
Slika 19. Grafički prikaz rješenja prvog podproblema 28
Slika 20. Grafički prikaz rješenja drugog podproblema 28
Slika 21. Ažurirano stablo sa prvim i drugim potproblemom 29
Slika 22. Prikaz određivanja gornje i donje granice 30
Slika 23. Grafički prikaz rješenja trećeg potproblema 30
Slika 24. Grafički prikaz rješenja četvrtog podproblema. 31
Slika 25. Ažurirano stablo sa trećim i četvrtim potproblemom 32
Slika 26. Prikaz određivanje gornje i donje granice 32
Slika 27. Grafički prikaz rješenja petog potproblema 33
Slika 28. Grafički prikaz rješenja šestog podproblema 33
Slika 29. Konačno stablo rješenja problema 34

Popis tablica

Popis tablica treba biti izrađen po uzoru na indeksirani sadržaj, te upućivati na broj stranice na kojoj se tablica može pronaći.

Tablica 1. Početna simpleks tablica 8
Tablica 2. Prva iteracija 9
Tablica 3. Druga iteracija sa rješenjem 9
Tablica 4. Simpleks tablica sa dodatnim ograničenjem 10
Tablica 5. Simpleks tablica sa stožernim elementom 11
Tablica 6. Simpleks tablica sa konačnim rješenjem 12
Tablica 7. Početna simpleks tablica 17
Tablica 8. Prva iteracija 17
Tablica 9. Druga iteracija sa rješenjem 17
Tablica 10. Simpleks tablica sa dodatnim ograničenjem 19
Tablica 11. Simpleks tablica sa stožernim elementom 19
Tablica 12. Simpleks tablica sa konačnim rješenjem 20