O paradoksima društvenih izbora s preferencijalnim glasanjem

Pintar, Sabina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Organization and Informatics / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:211:586481

Rights / Prava: Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported/Imenovanje-Nekomercijalno-Dijeli pod istim uvjetima 3.0

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-04**

Repository / Repozitorij:

Faculty of Organization and Informatics - Digital Repository

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N

Sabina Pintar

O PARADOKSIMA DRUŠTVENIH IZBORA S PREFERENCIJALNIM GLASANJEM

DIPLOMSKI RAD

Varaždin, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Sabina Pintar

Matični broj: 0177050711

Studij: ***Informacijsko i programsko inženjerstvo***

O PARADOKSIMA DRUŠTVENIH IZBORA S PREFERENCIJALNIM GLASANJEM

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Marcel Maretić

Varaždin, rujan 2022.

Sabina Pintar

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristila drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autorica potvrdila prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

U radu su prikazani glavni problemi i paradoksi društvenih izbora s preferencijalnim glasanjem te su opisana neka poželjna svojstva funkcije društvenog blagostanja nakon čega slijedi iskaz i pojašnjenje Arrowljevog teorema nemogućnosti.

Započinje se opisom poznatijih metoda društvenih izbora, nakon čega je opisano što se podrazumijeva pod pojmom preferencijalnog glasanja gdje svaki glas predstavlja jedno rangiranje kandidata. Vezano uz to objašnjena su svojstva relacija individualnih preferencija i na koji se način mogu preslikati u relaciju društvene preferencije. Slijedi navođenje najčešćih problema i paradoksa u metodama preferencijalnog glasanja što je popraćeno prikladnim primjerima. Objašnjeni su poznati paradoksi kao što je Condorcetov paradoks ili paradoks glasanja, paradoks nepojavljivanja, paradoks više distrikata i drugi. Uz to, opisane su neke klasične metode preferencijalnog glasanja poput Bordine i Condorcetove metode, nakon čega je obrađena i jedna novija metoda u kojoj se za određivanje pobjednika trebaju odrediti najjači putevi u grafu, a ime je dobila prema svom kreatoru - Schulzeova metoda. Zatim je naveden Arrowljev teorem nemogućnosti i detaljno su opisani zahtjevi koje je Arrow smatrao bitnima za ostvarenje demokratske i pravedne funkcije društvenog blagostanja. Na samom kraju prikazana je mogućnost strateškog glasanja kao još jednog od problema preferencijalnog glasanja. Rad je popraćen implementacijom metoda preferencijalnog glasanja.

Ključne riječi: paradoksi; preferencijalno glasanje; funkcija društvenog blagostanja; društveni izbor; Arrowljev teorem nemogućnosti.

Sadržaj

1. Uvod

Donošenje grupne odluke na temelju preferencija pojedinaca česta je potreba u društvu. Od najjednostavnijih odluka gdje grupa prijatelja odlučuje o tome kamo će na večeru do vrlo složenih odluka gdje milijuni ljudi odlučuju koji će pojedinac ili koja politička stranka voditi njihovu zemlju. Osnovni problem s kojim se suočava bilo koja skupina ljudi je kako doći do dobre grupne odluke kada se preferencije pojedinaca ne slažu.

Znanstvenici su osmislili različite metode glasanja koje odabiru jednog ili više pobjednika iz niza alternativa uzimajući u obzir mišljenje svakog pojedinca. Međutim, nije teško pronaći primjere u kojima različite metode glasanja za iste preferencije pojedinaca biraju različite pobjednike. Stoga se postavlja pitanje koja metoda najpravednije odražava preferencije glasača, odnosno koji je najbolji način da se individualne preferencije svakog pojedinog glasača preslikaju u jednu preferenciju koja odražava želje cijelog društva. Metoda bi trebala zadovoljavati neke osnovne kriterije kako bi se u što većoj mjeri izbjegla mogućnost pojave paradoksa koji bi izazvali sumnju u integritet izbora. U ovom radu kritički će se razmatrati različite metode glasanja te pokazati koji su mogući paradoksi prilikom njihove primjene.

Prilikom odabira optimalne metode glasanja također treba uzeti u obzir i koja je mogućnost strateškog glasanja u pojedinoj metodi. Naime, postoje situacije kada birači namjerno neiskreno rangiraju kandidate zato jer, s obzirom na informacije koje imaju o tome kako će glasati ostali birači, očekuju da će ih to do dovesti do željenog rezultata. Takvim manipulacijama, kojima pojedinci ne pokazuju svoje prave preferencije, dovodi se do pogrešnih rezultata izbora, stoga je potrebno razumjeti kako do njih dolazi i koje metode su podložnije takvim manipulacijama kako bi se one lakše spriječile.

Slijedom navedenog, možemo zaključiti da je vrlo teško donijeti odluku o tome koji je najbolji i najpravedniji sustav glasanja. Štoviše, važni rezultati u teoriji društvenog izbora dokazuju da ne postoji jedinstvena metoda glasanja koja je najbolja u svim situacijama. Cilj ovog rada je istaknuti paradokse koji se javljaju primjenom različitih metoda i pokazati zašto je nemoguće pronaći metodu koja za više od dvije alternative zadovoljava željene kriterije pravednosti.

2. Metode i tehnike rada

Rad proizlazi iz proučavanja literature na temu glavnih problema i paradoksa društvenih izbora s preferencijalnim glasanjem. Uz teoriju, navedeni su brojni primjeri koji su popraćeni tablicama i grafovima. Za pisanje teksta i kreiranje tablica korišten je *Microsoft Word*, a za prikaz grafova korišten je online program *Graph Online* koji se može naći na poveznici [1]. Za implementaciju metoda društvenih izbora korišten je programski jezik *Python*. Programski kod i popratni rezultati dostupni su kao u obliku *Jupyter Notebook* bilježnica kao dio softverskog repozitorija *socho (Social Choice Modelling in Python)* na *github* platformi [2].

3. Metode glasanja

Najjednostavniji oblik izbora je kada postoji konačan skup kandidata K između kojih se bira samo jedan te postoji dobro definiran skup glasača, tzv. biračko tijelo. Svaki glasač daje samo jedan glas, nakon čega se glasovi broje. Takvi izbori nazivaju se **jednostavni izbori**. Postoji mnoštvo zanimljivih metoda glasanja, a u ovom poglavlju će biti spomenute neke metode koje se najčešće koriste.

3.1. Metoda apsolutne većine

Pretpostavimo da se na izborima kandidiralo dvoje ljudi. Nakon što svaki birač da svoj glas, pobjeđuje kandidat koji dobije više od polovice glasova. To se naziva **metoda većine *(engl. majority)*** ili **apsolutne većine *(engl. absolute majority)***. Ako postoji paran broj birača, tada je moguće izjednačenje, tj. da obje alternative dobiju jednak broj glasova. U praksi je izjednačenje rijedak slučaj, pogotovo ako je broj birača velik. Osim izjednačenja, koje je moguće u bilo kojem izbornom sustavu, metoda apsolutne većine uvijek daje rezultat pod početnom pretpostavkom da se bira između dva kandidata [3].

3.2. Metoda pluraliteta

Ako postoje tri ili više kandidata, metoda apsolutne većine nije dobar izbor zato jer se lako može dogoditi da nema pobjednika. Zbog toga je u situacijama s tri ili više kandidata bolje koristiti **metodu pluraliteta**, tj. **relativne većine *(engl. plurality)*** koja omogućuje da, ako postoji kandidat s apsolutnom većinom glasova, tada on pobjeđuje, a ukoliko ne postoji, tada je pobjednik kandidat koji ima najveći broj glasova na izborima iako je taj broj manji od polovice. Ova jednostavna metoda jako se često koristi unatoč njezinim brojnim nedostacima.

Primjer 3.2.1 Metoda pluraliteta

Osim izbora u kojima se glasači odlučuju samo za jednog od ponuđenih kandidata, postoje i izbori u kojima se traži rangiranje svih kandidata prema preferencijama od najomiljenijeg do najmanje omiljenog. To se zove **preferencijalno glasanje** i bit će tema ovog rada. Prema metodi pluraliteta, kada birači rangiraju sve kandidate, u obzir se uzima samo prvi izbor svakog od birača, a pobjeđuje kandidat kojeg je najviše birača odabralo kao svoj prvi izbor.

Pretpostavimo da u izboru sudjeluje 3 kandidata - A, B i C te 70 birača kao što je prikazano u sljedećoj tablici preferencija.

Tablica 1. Tablica preferencija - metoda pluraliteta

Broj birača	**30**	**20**	**20**
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	B
3. izbor	C	A	A

Kandidat A je dobio 30 glasova, a B i C su dobili po 20 što znači da nema niti jednog kandidata koji ima više od polovice glasova te prema metodi apsolutne većine ne bi bilo pobjednika. No, prema metodi pluraliteta, A bi bio pobjednik zato jer on ima najveći broj glasova.

Međutim, iako su birači rangirali sve kandidate, za određivanje pobjednika uzima se u obzir samo prvi izbor svakog od birača. Na taj način se ograničava mišljenje birača o kandidatima i često dovodi do rezultata s kojim je većina birača nezadovoljna.

3.3. Metoda drugog kruga

Dakle, problem metode pluraliteta je taj što bi pobjednik mogao biti onaj za kojeg većina glasača misli da je loš izbor. Pretpostavimo da svi glasači kandidata B i C misle da su oba ova kandidata kvalificiraniji od A kao što je prikazano *Tablici 1*. Tada metoda pluraliteta rezultira izborom kandidata za kojeg većina misli da je najgori izbor. Ovaj problem se povećava ako ima više kandidata, ali čak i ako ima samo četiri ili pet kandidata, metodom pluraliteta se često bira pogrešna osoba [3]. Ovaj problem može se riješiti na način da se organizira drugi krug izbora na kojem će se birati između dva kandidata koji su dobili najviše glasova u prvom krugu.

Metoda drugog kruga *(engl. runoff election)* dakle započinje prvim krugom koji se provodi korištenjem metode pluraliteta kako bi se odredila dva najbolja kandidata. Ako postoji kandidat kojeg je više od 50% glasača rangiralo na prvo mjesto, tada se taj kandidat proglašava pobjednikom. Ako takav kandidat ne postoji, održava se drugi krug između dva najbolja kandidata. Kandidat s najviše glasova u drugom krugu izbora proglašava se pobjednikom [8].

3.4. Hare metoda

Umjesto koncentracije na prva dva najbolja kandidata kao što je to u metodi drugog druga, može se također iterativno uklanjati kandidate s najmanje glasova za prvo mjesto. Na ovaj način funkcionira **Hare metoda** (***engl. Hare method***). Hare metoda započinje slično kao i metoda drugog kruga, odnosno najprije se provjerava postoji li kandidat kojeg je više od 50% glasača rangiralo na prvo mjesto. Ako postoji, taj kandidat proglašava se pobjednikom. Ako ne postoji, u prvom krugu se izbacuje kandidat kojeg je najmanje birača rangiralo na prvo mjesto. Nakon toga se od preostalih kandidata opet traži kandidat kojeg je najmanje birača rangiralo na prvo mjesto i taj se postupak ponavlja dok se ne dođe do kandidata koji ima više od 50% glasova. Ako se bira pobjednik između samo tri kandidata, ova metoda identična je metodi drugog kruga. Pogledajmo Primjer 3.4.1. u kojem je prikazano kako funkcionira Hare metoda kada ima više od tri kandidata.

Primjer 3.4.1. Hare metoda

Pretpostavimo da u izboru sudjeluje 4 kandidata - A, B, C i D te 19 birača kao što je prikazano u sljedećoj tablici preferencija.

Tablica 2: Tablica preferencija - Hare metoda

Broj birača	7	5	4	3
1. izbor	A	B	D	C
2. izbor	B	C	B	D
3. izbor	C	D	C	A
4. izbor	D	A	A	B

U prvom krugu eliminiran je kandidat C zato jer je najmanje birača njega rangiralo na prvo mjesto (A=7, B=5, C=3, D=4). Glasovi od troje birača koji su rangirali kandidata C na prvo mjesto prebacuju se na kandidata D jer su ti birači njega rangirali na drugo mjesto, pa se sada smatra da je 7 birača kandidata D rangiralo na prvo mjesto.

U drugom krugu eliminiran je kandidat B zato jer je on rangiran na prvo mjesto od strane najmanjeg broja glasača (A=7, B=5, D=7). Glasovi od petero glasača koji su rangirali kandidata B na prvo mjesto prebacuju na kandidata D zato jer je C eliminiran u prvom krugu, stoga je kandidat D sada od strane 12 birača rangiran na prvo mjesto. Prema tome, kandidat D ima apsolutnu većinu (više od 50% glasova) te je proglašen pobjednikom.

Da se glasanje provodilo metodom drugom kruga, pobjednik bi bio kandidat A. Naime, kandidati A i B prošli bi u drugi krug glasanja zato jer je njih najviše glasača stavilo na prvo mjesto (A=7, B=5). U drugom krugu glasovi birača koji su na prvo mjesto stavili kandidate C i D prenijeli bi se na kandidate A i B. Tada bi A imao 10 glasova, a B 9 glasova te bi kandidat A bio pobjednik. Osnovna ideja Hare metode je uzastopno uklanjanje kandidata koji su "loše" prošli na izborima, a to je i osnovna ideja svih metoda koje imaju više faza ***(engl. multi-stage methods)***. Problem ovakvih metoda je da prilikom utvrđivanja kandidata s lošim rezultatima u svakom krugu, može doći do izjednačenosti, tj. može se dogoditi da postoji više od jednog kandidata kojeg bi trebalo izbaciti. Jedan pristup rješavanju tog problema je da se oba kandidata koja su izjednačena uklone, a drugi pristup je da se odredi pravilo koje će vrijediti kod slučaja izjednačenosti ***(engl. tie-breaking rule)*** kako bi se u svakom krugu ipak izabrao samo jedan kandidat koji je najlošiji zbog čega će biti uklonjen [10].

3.5. Kriteriji za usporedbu metoda glasanja

Dosad su, u ovom poglavlju, opisane neke od najjednostavnijih metoda glasanja te se već kod tih nekoliko metoda može primijetiti da za različite metode glasanja, a za iste preferencije glasača dobivamo različite rezultate. U nekoliko idućih poglavlja vidjet će se da se taj problem pojavljuje i u usporedbi prethodno navedenih metoda s ostalim metodama. Zbog toga se postavlja pitanje kako odrediti najbolju metodu glasanja. Postoji nekoliko važnih kriterija koji se mogu koristiti za usporedbu različitih metoda glasanja, a to su sljedeći:

Pragmatičnost pretpostavlja da su zadovoljena neka osnovna svojstva praktičnosti. Postavlja se pitanje je li metoda dovoljno jednostavna za korištenje. Primjerice, metoda pluraliteta je unatoč svojim brojnim nedostacima upravo zbog svoje jednostavnosti korištenja i razumijevanja jedna od najčešće korištenih metoda. Zatim, pragmatičnost podrazumijeva da ako će se metoda koristiti na državnim ili lokalnim izborima, mora biti legalna, odnosno mora poštovati zakone i zadovoljavati neke osnovne demokratske zahtjeve koji su postavljeni da bi se metoda smatrala valjanom.

Također, **informacije o glasovima koje daju birači** također moraju biti definirane za svaku metodu. Za neke metode dovoljno je da glasači kandidate samo poredaju od najboljeg prema najgorem, dok se u nekim metodama može tražiti da glasači uz poredak navedu i intenzitet kojim podržavaju određene kandidate.

Kod usporedbe različitih metoda važno je obratiti pozornost na **paradokse** koji su mogući prilikom korištenja pojedine metode, a koji dovode do neočekivanih i dvosmislenih izbornih rezultata, koji nisu usklađeni s osnovnim demokratskim normama [10].

4. Rangiranje kandidata

Teorija društvenog izbora proučava izborne sustave u kojima se u obzir uzima redoslijed u kojem glasači rangiraju kandidate, a ne samo njihov prvi izbor. Rangiranje kandidata podrazumijeva da svaki glasač uspostavlja **uređaj na skupu kandidata $\boldsymbol{K}$** koji odgovara njegovim preferencijama. Uređaj je binarna relacija na skupu kandidata K koju možemo nazvati **relacija individualne preferencije**. Pritom, iako neki zagovaraju pristup u kojem se u obzir uzima i intenzitet sklonosti određenom kandidatu, uobičajena pretpostavka u literaturi teorije glasanja je da rangiranje kandidata podrazumijeva samo određivanje redoslijeda kandidata od najboljeg prema najlošijem, bez određivanja intenziteta sklonosti, a tako će se podrazumijevati i u ovom radu.

Relacija individualne preferencije treba biti **tranzitivna**: ako birač preferira kandidata A u odnosu na B, te preferira kandidata B u odnosu na C, to znači da birač mora preferirati i A u odnosu na C. U ovom radu promatrat će se preferencije u kojima svaki birač treba napraviti potpuni poredak, odnosno poredati sve ponuđene kandidate te se ne može dogoditi da birač, zbog neodlučnosti ili ravnodušnosti, rangira neka dva kandidata na isto mjesto. Dakle, relacija treba biti **strogo kompletna, irefleksivna i asmetična**. Takvu relaciju označit ćemo s $\prec$, a reći ćemo da je ona **strogi poredak**. Općenito, ako vrijedi $x \prec$ y, smatramo da birač strogo više preferira kandidata x u odnosu na kandidata y, odnosno da je kandidat x bolje rangiran od kandidata y u individualnoj preferenciji određenog birača.

Pretpostavimo da na izbore izlazi n birača te ih identificiramo prirodnim brojevima $1, 2, \dots, n$. Svaki birač zadaje relaciju individualne preferencije na skupu kandidata K. Tako dobivamo uređenu n-torku koju nazivamo **profilom** ili **$\boldsymbol{n}$-torkom individualnih preferencija**. U praksi, profil individualnih preferencija je niz glasačkih listića, po jedan za svakog birača.

Primjer 4.1. Kreiranje profila

Pretpostavimo da treba izabrati pobjednika između alternativa A, B i C. Deset birača treba donijeti odluku o tome koja će od ove tri alternative biti odabrana. Od birača se traži da poredaju sve tri alternative od najboljeg do najgoreg. Pretpostavimo da su to napravili na ovaj način:

- Ana: A $\prec$ B $\prec$ C
- Fran: C $\prec$ B $\prec$ A
- Leona: A $\prec$ B $\prec$ C
- David: C $\prec$ A $\prec$ B

- Gabriel: B ≺ C ≺ A
- Luka: B ≺ C ≺ A
- Ema: B ≺ C ≺ A
- Mia: B ≺ C ≺ A
- Ivan: A ≺ B ≺ C
- Lara: A ≺ C ≺ B

Najprije je potrebno organizirati glasove tako da zbrojimo individualne preferencija birača koje se ponavljaju. Na taj način dobivamo **multiskup.** Multiskup nema standardnu sintaksu, ali najčešće ga zapisujemo tako da nakon svakog elementa multiskupa navodimo i njegov multiplicitet. U našem slučaju multiskup kreiramo tako da navedemo svaku različitu individualnu preferenciju, a nakon nje navodimo i broj birača koji je glasao za takav poredak kandidata. Primjerice ako je troje birača glasalo za poredak $A \prec B \prec C$, to bi zapisali: $(A, B, C): 3$.

Multiskup za ovaj primjer izgledao bi ovako:

$$\{(A, B, C): 3, (A, C, B): 1, (B, C, A): 4, (C, A, B): 1(C, B, A): 1\}.$$

Prema multiskupu određuje se profil individualnih preferencija. Radi preglednosti profil možemo prikazati tablicom na način kao što je to napravljeno u *Tablici 3*.

Tablica 3. Profil individualnih preferencija

Broj birača:	**3**	**1**	**4**	**1**	**1**
1. izbor	A	A	B	C	C
2. izbor	B	C	C	A	B
3. izbor	C	B	A	B	A

4.1. Funkcija društvenog blagostanja i njezina poželjna svojstva

Glavni zadatak teorije društvenog izbora je na temelju profila individualnih preferencija odrediti društvenu preferenciju, odnosno na temelju profila odrediti novu relaciju koja će objedinjavati mišljenja svih pojedinaca u društvu i predstaviti preferencije društva u cjelini. Takvu funkciju koja profil individualnih preferencija preslikava u novu relaciju nazivamo **funkcija društvenog blagostanja *(engl. Social welfare function)*** ili **funkcija društvenog izbora**. Tu novu relaciju koja nastaje primjenom funkcije društvenog blagostanja nazivamo **relacija društvene preferencije**. Nju ćemo označiti s $\prec_D$. Ako vrijedi $x \prec_D y$ smatramo da društvo preferira x u odnosu na y.

Ideja je pronaći funkcije društvenog blagostanja koje će na demokratski i pravedan način preslikavati preferencije pojedinaca u društvenu preferenciju. U procesu pronalaska takve funkcije definirana su svojstva koja omogućavaju da se na racionalan i etički način provedu izbori. Neki od poželjnih zahtjeva i svojstava funkcija društvenog blagostanja bit će objašnjeni u nastavku.

Anonimnost je zahtjev da grupna odluka treba ovisiti samo o broju birača i sve ih tretirati na isti način. To znači da ako su dva profila permutacije jedan drugog, tada metoda glasanja koja je anonimna mora dodijeliti istu grupnu odluku za oba profila.

Monotonost je svojstvo koje govori o tome da je veća podrška birača uvijek bolja za kandidata. Drugim riječima, kada bi birači nekog kandidata rangirali bolje nego ranije ili kada bi neki birač dodatno dao glas tom kandidatu, to ne bi trebalo negativno utjecati na izglede kandidata za pobjedu na izborima.

Nepostojanje diktature je svojstvo koje osigurava da nijedan birač nema moć određivanja rezultata izbora. Kad bi postojao neki birač koji ima tu moć, onda bi on bio **diktator**.

Neovisnost o nebitnim alternativama je svojstvo koje govori o tome da ako društvo više preferira A u odnosu na B, te neki birači promijene individualne preferencije vezane za ostale kandidate, a niti jedan birač ne promijeni relativne pozicije A i B na listi individualnih preferencija, onda bi rezultat izbora, tj. društvena preferencija trebala i dalje biti da je A poželjniji od B.

Slabi Pareto ili jednoglasnost je svojstvo koje govori o tome da ako svaki birač individualno preferira A u odnosu na B, onda metoda ne može biti takva da ispada da je u društvenoj preferenciji B rangiran više nego A, odnosno kandidat A u konačnom poretku mora biti rangiran više od njega.

Svojstva nepostojanje diktature, neovisnost o nebitnim alternativama i slabi Pareto su, prema Arrowu, najvažnija svojstva te su detaljnije pojašnjena u poglavlju 6.

4.2. Preferencijalno glasanje

Preferencijalno glasanje ima brojne prednosti, posebno zbog uzimanja u obzir interesa pojedinaca za svakog pojedinog kandidata, ali isto tako ima i mnogo nedostataka. Kroz sljedećih nekoliko primjera bit će prikazani najčešći problemi i paradoksi takvog glasanja.

U Primjeru 4.2.1. prikazano je da odabir metode glasanja može utjecati na ishode izbora do te mjere da kandidat koji je u jednoj metodi pobjednik, u drugoj može biti na zadnjem mjestu.

Primjer 4.2.1. Odabir pića

Pretpostavimo da se u nekom od odjela fakulteta organizira godišnja proslava, a radi uštede novca, poslužit će se samo jedno piće. Odjel od 15 članova treba se odlučiti za jednu od tri ponuđene alternative - sok, vino ili pivo. Nakon organizacije glasova dobiven je sljedeći profil koji je prikazan u *Tablici 4*.

Tablica 4. Profil individualnih preferencija - odabir pića

Broj birača:	6	5	4
1. izbor	sok	pivo	vino
2. izbor	vino	vino	pivo
3. izbor	pivo	sok	sok

Na prvi pogled čini se da bi sok trebao biti izabran zato jer je najviše ljudi, njih šestero, odabralo sok kao prvi izbor. Petero ljudi odabralo je pivo kao prvi izbor, a četvero ljudi odabralo je vino kao prvi izbor (**6:5:4**), zato je odlučeno da će na proslavi biti poslužen sok.

Pretpostavimo sada da iz nekog razloga sok nije bio dostupan pa je voditelj odjela naručio drugi izbor odjela, a to je pivo. No, većina ljudi ipak nije zadovoljna ponuđenim. Zašto se to dogodilo? Naime, ako preciznije analiziramo, vidjet ćemo da pivo zapravo nije drugi izbor odjela zato jer je **dvije trećine** ljudi iz odjela stavilo vino ispred piva na izborima (**10:5**), što je prikazano u *Tablici 5*.

Tablica 5: Usporedba glasova vino i pivo

Vino	Pivo
6	-
-	5
4	-
10	**5**

Zbog ovakvih ishoda izbora može se javiti sumnja u ispravnost izbora i odabrane metode za analizu glasova.

Nastavimo li analizirati izbore na ovaj način, možemo primijetiti da sok uopće nije bio prvi izbor ljudi iz odjela kao što je određeno metodom pluraliteta, već vino. Naime, **tri petine** ljudi stavilo je da više preferira vino nego li sok (**9:6**) kao što je prikazano u *Tablici 6*, a također **tri petine** ljudi više preferira pivo od soka (**9:6**) što je prikazano u *Tablici 7*.

Tablica 6: Usporedba glasova vino i sok

Vino	Sok
-	6
5	-
4	-
9	**6**

Tablica 7: Usporedba glasova pivo i sok

Pivo	Sok
-	6
5	-
4	-
9	**6**

Dakle, ako rezultatima glasanja pristupimo na način da promatramo međusobne sukobe po parovima između svaka dva pića, najviše ljudi želi da na proslavi bude posluženo vino, zatim pivo, a tek na kraju sok (**vino** $\prec$ **pivo** $\prec$ **sok**), što je suprotno početnom rezultatu gdje je sok bio najviše rangiran [4].

Prema tome, vidimo da rezultati glasanja ne ovise samo o biračima, nego velik utjecaj ima izabrana metoda glasanja. Time smo došli do jednog od problema preferencijalnog glasanja, a to je da odabir metode glasanja može utjecati na ishode izbora do te mjere da alternativa koja je u jednoj metodi pobijedila, u drugoj može biti na zadnjem mjestu.

U primjeru 4.2.2. bit će prikazan **paradoks više distrikata *(engl. Multiple Districts Paradox)*,** odnosno bit će prikazano da se može dogoditi da neki kandidat pobijedi u svakom distriktu posebno, ali izgubi na općim izborima u kojima glasaju birači iz svih distrikata zajedno, iako se očekuje da na općim izborima taj kandidat također pobijedi [15].

Primjer 4.2.2. Odabir studentskog predstavnika fakultetskog vijeća

Pretpostavimo da imamo odjel fakulteta od 26 ljudi koji trebaju odabrati studentskog predstavnika u fakultetskom vijeću. Kako bi izbori bili učinkovitiji, voditelj odjela odluči ga podijeliti na dva pododjela, svaki od po 13 članova. Za predstavnika vijeća natječe se troje studenata - Leona, David i Gabriel.

Voditelj odjela je odlučio da svaki pododjel održi neslužbeno preliminarno glasanje metodom drugog kruga. Pretpostavimo da je Leona pobijedila u oba pododjela. Nakon toga, održali su se službeni izbori, ali ovaj put glasali su svi ljudi iz odjela. Zbog rezultata preliminarnih izbora mislilo se da će službeni izbori biti samo formalnost te da će Leona biti izabrana za predstavnicu studenata. No, rezultati službenih izbora pokazali su da je pobjednik David, i to sa značajnom razlikom. U nastavku će biti objašnjeno zašto se to dogodilo.

13 glasača iz prvog pododjela poredali su kandidate kao što je prikazano u *Tablici 8*.

Tablica 8. Profil individualnih preferencija prvog odjela

Broj birača:	**4**	**3**	**3**	**3**
1. izbor	Leona	David	Gabriel	Gabriel
2. izbor	David	Leona	Leona	David
3. izbor	Gabriel	Gabriel	David	Leona

U prvom pododjelu najviše birača rangiralo je Gabriela kao prvi izbor, Leonu kao drugi izbor, a Davida kao treći izbor (**6:4:3**). Zbog toga su u drugi krug izbora ušli Leona i Gabriel, te je s rezultatom **7:6** pobijedila Leona zato jer je grupi birača koji su Davida stavili na prvo mjesto, Leona bila drugi izbor, te se u drugom krugu glasovi od Davida prebacuju na Leonu. Rezultati su radi preglednosti prikazani u *Tablici 9*.

Tablica 9: Rezultati preliminarnih izbora prvog pododjela

Kandidat	Prvi krug izbora	Drugi krug izbora
Leona	4	**7**
David	3	**-**
Gabriel	6	**6**

13 glasača iz drugog pododjela poredali su kandidate kao što je prikazano u *Tablici 10*.

Tablica 10: Profil individualnih preferencija drugog odjela

Broj birača:	4	3	3	3
1. izbor	Leona	David	Gabriel	David
2. izbor	David	Leona	Leona	Gabriel
3. izbor	Gabriel	Gabriel	David	Leona

U drugom pododjelu je najviše birača rangiralo Davida na prvo mjesto, zatim Leonu, a najmanje birača stavilo je Gabriela na prvo mjesto. **(6:4:3)**. Dakle, u drugi krug izbora ušli su David i Leona, te je s rezultatom **7:6** pobijedila Leona. Rezultati su prikazani u *Tablici 11*.

Tablica 11: Rezultati preliminarnih izbora drugog pododjela

Kandidat	Prvi krug izbora	Drugi krug izbora
Leona	4	**7**
David	6	**6**
Gabriel	3	**-**

Svi glasači na službenim izborima glasali su za isti poredak kandidata kao i na preliminarnim izborima u pododjelima, no rezultat je ispao drugačiji. Rezultat službenih izbora prikazan je u *Tablici 12*.

Tablica 12: Rezultati službenih izbora

Kandidat	Prvi krug izbora	Drugi krug izbora
Leona	8	**-**
David	9	**17**
Gabriel	9	**9**

Na službenim izborima na kojima je glasao cijeli odbor od 26 članova, Leona, koja je pobjednica oba pododbora, bila je najniže pozicionirana na izborima čime dolazimo do paradoksa. Rezultat izbora bio je: **David ≺ Gabriel ≺ Leona (9:9:8).** U drugom krugu David je pobijedio Gabriela s rezultatom **17:9**.

U Primjeru 4.2.3. bit će prikazan **paradoks nepojavljivanja *(engl. No-Show Paradox)*** što znači da se može dogoditi da ako biračkom tijelu dodamo birača B koji je stavio kandidata x na posljednje mjesto, rezultat može biti da pobjednik bude kandidat x, umjesto kandidata koji bi pobijedio da nije bilo birača B. Ovaj paradoks događa se kada nije zadovoljeno svojstvo monotonosti, odnosno kada ne vrijedi da ukoliko ima više birača koji daju podršku nekom kandidatu, da to njemu koristi. Osim paradoksa nepojavljivanja, u Primjeru 4.2.3. bit će pokazan i **paradoks više distrikata** te kako izgleda kršenje svojstva **neovisnosti o nebitnim alternativama**.

Primjer 4.2.3. Odabir gradonačelnika

Provode se izbori s preferencijalnim glasanjem za gradonačelnika i bira se između tri kandidata – Helena, Karlo i Matej. Pretpostavimo sada da su svi birači poredali kandidate, osim dvoje birača koji su bili spriječeni doći na izbore. Ta dva birača, nazovimo ih Ana i Marko, htjeli su poredati kandidate na sljedeći način: **Helena** ≺ **Karlo** ≺ **Matej**. Najviše im se sviđala Helena, no otprilike podjednako im se sviđao i Karlo, dok za Mateja nikako nisu htjeli da pobijedi. Promotrit ćemo razliku u rezultatima izbora s njihovim glasovima i bez njihovih glasova.

Bez njihovih glasova, na izbore je izašlo 1608 birača, a za analizu izbora koristila se metoda u kojoj se u prvom krugu odrede dva najbolje rangirana kandidata na način da se u obzir uzima samo prvi izbor svakog od birača, nakon čega ta dva kandidata idu u drugi krug gdje će se između ta dva kandidata odabrati pobjednik na način da se analiziraju međusobni sukobi između ta dva kandidata.

Rezultati prvog kruga izbora prikazani su u *Tablici 13*.

Tablica 13: Profil individualnih preferencija za izbor gradonačelnika

Broj birača:	**417**	**82**	**143**	**357**	**285**	**324**
1. izbor	Helena	Helena	Karlo	Karlo	Matej	Matej
2. izbor	Karlo	Matej	Helena	Matej	Helena	Karlo
3. izbor	Matej	Karlo	Matej	Helena	Karlo	Helena

U prvom krugu izbora, u kojem su se glasovi zbrajali na način da se prebroji samo prvi izbor svakog od birača, Helena je dobila **499** glasova, Karlo je dobio **500** glasova, a Matej **609** glasova. U drugi krug izbora ušli su Karlo i Matej. Pogledajmo sada sukobe između ta dva kandidata u *Tablici 14*.

Tablica 14: Sukob između Karla i Mateja

Karlo	**Matej**
417	-
-	82
143	-
357	-
-	285
-	324
917	**691**

Pobijedio je Karlo jer je dobio 917 glasova u odnosu na Mateja koji je dobio 691 glas. Pitanje je što bi se dogodilo da su glasali Ana i Marko.

Budući da su oni htjeli glasati na sljedeći način: **Helena** $\prec$ **Karlo** $\prec$ **Matej**, tada bi u prvom krugu Helena imala 501 glas i ušla u drugi krug izbora zajedno s Matejom. Sukobi između Helene i Mateja izgledali bi kao u *Tablici 15*.

Tablica 15: Sukob između Helene i Mateja

Helena	Matej
419	-
82	-
143	-
-	357
-	285
-	324
644	**966**

Dakle, iako je Matej bio njihov zadnji izbor, da su oni sudjelovali u izborima, Matej bi pobijedio. Tu dolazimo do prvog problema preferencijalnog glasanja, a to je **paradoks nepojavljivanja (*engl. No-show paradox*).** Naime, paradoks nepojavljivanja javlja se kada birač treba odlučiti je li za njega bolje da sudjeluje ili ne sudjeluje na izborima. Razlog tome je što postoji šansa da je biraču bolje da ne sudjeluje na izborima, nego da iskreno glasa zato jer će njegovo nepojavljivanje na izborima dovesti do pobjede kandidata kojeg više preferira.

Ako detaljnije proanaliziramo situaciju, vidimo da je sve ovisilo o tome tko će ući u drugi krug. Da se Helena nije natjecala u izborima, pobijedio bi Karlo, a da se Karlo nije natjecao, pobijedilo bi Matej. Tu dolazimo do kršenja svojstva funkcije društvenog blagostanja, a to je neovisnost o nebitnim alternativama.

Promotrimo sada situaciju u kojoj ne bi bila dva kruga izbora, već samo jedan u kojem se gledaju izravni sukobi kandidata. Tada bi Karlo pobijedio i Helenu (**824-784**) i Mateja (**917-691**) kao što je prikazano u tablicama u nastavku. Prema tome, Karlo bi trebao biti pobjednik izbora, a vidjeli smo da postoji mogućnost da Matej bude pobjednik.

Tablica 16: Sukob između Karla i Helene

Karlo	Helena
-	417
-	82
143	-
357	-
-	285
324	-
824	**784**

Tablica 17: Sukob između Karla i Mateja

Karlo	Matej
417	-
-	82
143	-
357	-
-	285
-	324
917	**691**

Dosad je već navedeno dovoljno problema da se ispravnost izbora dovede u pitanje, no analizirat ćemo ove izbore još detaljnije.

Naime, grad u kojem se birao gradonačelnik podijeljen je u dva dijela – „Istok“ i „Zapad“. Od ukupno 1608 birača koji su izašli na izbore, 588 birača bilo je iz dijela Istok, a

1020 birača iz dijela Zapad, a rezultati podijeljeni prema dijelovima grada bili su kao u sljedećim tablicama.

Tablica 18: Profil individualnih preferencija za „Istok“

Broj birača:	**160**	**0**	**143**	**0**	**0**	**285**
1. izbor	Helena	Helena	Karlo	Karlo	Matej	Matej
2. izbor	Karlo	Matej	Helena	Matej	Helena	Karlo
3. izbor	Matej	Karlo	Matej	Helena	Karlo	Helena

Tablica 19: Profil individualnih preferencija za „Zapad“

Broj birača:	**257**	**82**	**0**	**357**	**285**	**39**
1. izbor	Helena	Helena	Karlo	Karlo	Matej	Matej
2. izbor	Karlo	Matej	Helena	Matej	Helena	Karlo
3. izbor	Matej	Karlo	Matej	Helena	Karlo	Helena

Pogledajmo slučaj da su se izbori provodili posebno za pojedini dio grada i da se za analizu izbora koristila ista metoda kao i u skupnim izborima gdje se oba dijela grada gledaju kao jedno. U prvom krugu se odaberu dva najbolja kandidata koja zatim ulaze u drugi krug, a u drugom krugu gledaju se međusobni sukobi ta dva kandidata i određuje pobjednik.

U dijelu grada „Istok“, u prvom krugu izbora, Helena bi imala 160 glasova, Karlo 143, a Matej 285. To znači da bi u drugi krug išli Helena i Matej te bi pobijedila Helena kao što je prikazano u *Tablici 20.*

Tablica 20: Sukob između Helene i Mateja

Helena	Matej
160	-
143	-
-	285
303	**205**

U dijelu grada „Zapad“, u prvom krugu izbora, Helena bi imala 339 glasova, Karlo 357 glasova, a Matej 324 glasa. To znači da bi u drugi krug izbora išli Helena i Karlo te bi pobijedila Helena kao što je prikazano u *Tablici 21*.

Tablica 21: Sukob između Helene i Karla

Helena	Karlo
257	-
82	-
-	357
285	-
-	39
624	**396**

Dakle, Helena bi pobijedila u oba dijela grada, dok u skupnim izborima Helena nije niti ušla u drugi krug. Time se dolazi do **paradoksa više distrikata (engl. Multiple-Districts Paradox)** koji govori o tome da kandidat može pobijediti u svakom distriktu posebno, ali izgubiti na skupnim izborima u kojima glasaju birači iz svih distrikata zajedno [10].

5. Condorcetov paradoks

Marquis de Condorcet, francuski matematičar i politički teoretičar, 1785. godine predložio je metodu glasanja koja podrazumijeva niz međusobnih sukoba između svaka dva kandidata, odnosno glasanje u parovima. To je kao da imamo drugi krug izbora istovremeno za sve kombinacije kandidata. Na primjer: A protiv B, A protiv C, A protiv D, B protiv C, B protiv D i C protiv D. Condorcet tvrdi da bi pobjednikom trebali smatrati onog kandidata koji je pobijedio sve ostale kandidate u sukobima jedan na jedan. Na sličan način Condorcet definira i gubitnika. Dakle, on tvrdi da bi gubitnikom trebali smatrati onog kandidata koji je izgubio od svih ostalih kandidata u sukobima jedan na jedan [3].

Definicija 5.1. Kandidat C_k je **Condorcetov pobjednik** ako pobijedi sve kandidate u njihovim međusobnim sukobima. Kandidat C_j je **Condorcetov gubitnik** ako izgubi od svih kandidata u njihovim međusobnim sukobima [4].

Primjer 5.1.

Pretpostavimo da su rezultati međusobnih sukoba kandidata A, B i C bili sljedeći:

B pobjeđuje A 10 – 9,
A pobjeđuje C 16 – 3,
B pobjeđuje C 12 – 7.

Kandidat **B** je pobijedio oba preostala kandidata, stoga je on **Condorcetov pobjednik**.

Primjer 5.2.

Pretpostavimo da su rezultati međusobnih sukoba kandidata A, B, C i D bili sljedeći:

A i B neriješeno 12 – 12,
A pobjeđuje C 16 – 8,
D pobjeđuje A 15 – 9,
C pobjeđuje B 17 – 7,
D pobjeđuje B 17 – 7,
D pobjeđuje C 16 – 8,

Kandidat **D** je pobijedio sva tri preostala kandidata u sukobima u parovima te je on **Condorcetov pobjednik**.

Condorcetova metoda ne daje uvijek rezultat, tj. može se dogoditi da Condorcetov pobjednik ne postoji. Zapravo, Condorcet ističe da je moguće da društvena preferencija može biti takva da se izrazi sklonost A u odnosu na B, sklonost B u odnosu na C i sklonost C u odnosu na A u istom skupu glasova, odnosno tranzitivnost nije zadovoljena. U nastavku je na jednostavnom primjeru takvih preferencija prikazano što se dogodi u takvom slučaju.

Primjer 5.3.

Pretpostavimo da grupa od 12 ljudi bira pobjednika.

5 ljudi odluči se za poredak: A $\prec$ B $\prec$ C

4 ljudi odluči se za poredak: B $\prec$ C $\prec$ A

3 ljudi odluči se za poredak: C $\prec$ A $\prec$ B.

Profil takvih preferencija prikazan je u *Tablici 22.*

Tablica 22. Primjer Condorcetove metode

Broj birača:	**5**	**4**	**3**
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	A
3. izbor	C	A	B

A pobjeđuje B (8 - 4),

B pobjeđuje C (9 - 3),

C pobjeđuje A (7 - 5).

Ovdje ne postoji niti jedan kandidat koji je u međusobnim sukobima u parovima pobijedio preostala dva kandidata, stoga **ne postoji Condocetov pobjednik**. Ovakve preferencije gdje tranzitivnost nije zadovoljena dovode do **Condorcetovog paradoksa**. Naime, ako većina preferira A u odnosu na B, i većina preferira B u odnosu na C, iz tranzitivnosti bi trebalo slijediti da većina preferira A u odnosu na C, no može se dogoditi da većina preferira C u odnosu na A. Još jedan primjer Condorcetovog paradoksa bit će prikazan u nastavku.

Primjer 5.4. Condorcetov paradoks

Neka je grupa glasača podijeljena u tri grupe jednake veličine $n = 3$. Neka postoji skup kandidata $K = \{A, B, C\}$. Individualne preferencije birača dane su profilom P koji je prikazan u *Tablici 23.*

Tablica 23: Condorcetov paradoks - profil P

	Grupa 1	Grupa 2	Grupa 3
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	A
3. izbor	C	A	B

Grupa 1 preferira A u odnosu na B, B u odnosu na C i A u odnosu na C;
grupa 2 preferira B u odnosu na C, C u odnosu na A i B u odnosu na A;
grupa 3 preferira C u odnosu na A, A u odnosu na B i C u odnosu na B.
Sada bismo se mogli nadati da ćemo nekako doći do jedinstvenog društvenog poretka kandidata koji odražava preferencije sve tri grupe.
Dakle, analizom profila P dobivamo sljedeće rezultate:

A pobjeđuje B (2 - 1),
B pobjeđuje C (2 - 1),
C pobjeđuje A (2 - 1).

Prema Condorcetovoj metodi nekog kandidata smatramo društveno preferiranim u odnosu na drugog kandidata ako ima više birača koji ga preferiraju nego onih koji preferiraju drugog kandidata. Na ovaj način utvrđujemo da je A društveno preferirani u odnosu na B (A pobjeđuje B s rezultatom 2 - 1), odnosno dvije grupe birača (grupe 1 i 3) preferiraju A u odnosu na B, ali samo jedna grupa (grupa 2) preferira B u odnosu na A. Slično tome, postoji društvena preferencija B u odnosu na C (B pobjeđuje C s rezultatom 2 - 1). Stoga bismo mogli očekivati, zbog tranzitivnosti, da ćemo otkriti da je A društveno preferiran u odnosu na C. Međutim, dolazimo do obrnutog zaključka, zato jer C pobjeđuje A s rezultatom 2 - 1, tj. dvije grupe glasača preferiraju C u odnosu na A. Krenuvši od bilo koje alternative, došli bi do analognog zaključka. Međutim, poželjno svojstvo funkcije društvenog blagostanja je da se kandidati uvijek rangiraju od boljeg prema gorem, a ne u **ciklusu** kao što je to u ovom slučaju (A ≺ B ≺ C ≺ A). Zbog toga je to paradoks.

Drugim riječima, budući da je društvena preferencija takva da A pobjeđuje B i da B pobjeđuje C, iz tranzitivnosti bi trebalo slijediti da A pobjeđuje C, tj. $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$, no prema profilu P možemo vidjeti da kandidat C pobjeđuje A, što daje $C \prec A$ čime dolazimo do Condorcetovog paradoksa [5]. Ovaj paradoks još se naziva i **paradoks glasanja *(engl. paradox of voting)***. Otkrio ga je Marquis de Condorcet 1785. godine.

5.1. Condorcetova proširena metoda

Na izborima koji imaju **nekoliko kandidata**, uobičajeno je da Condorcetov **pobjednik ne postoji**, čak niti kad nema **više kandidata** s istim brojem glasova (neriješeno).

Condorcetovo rješenje za taj problem bit će objašnjeno u nastavku, a nazivamo ga **Condorcetova proširena metoda**. Najprije napravimo „uređenu listu" kandidata. Nakon analize glasova, i međusobnih sukoba svih kombinacija kandidata, gleda se u kojem sukobu je kandidat pobijedio s najvećim brojem glasova. Na primjeru 6.1., s najvećim brojem glasova je pobijedio A protiv kandidata C, što zapisujemo: $A \prec C\ (16-3)$. Zatim se sukob u kojem je kandidat s drugim najvećim brojem glasova, a to je u ovom slučaju $B \prec C\ (12-7)$. Zatim tražimo sukob u kojem je kandidat pobijedio s trećim najvećim brojem glasova, u ovom slučaju to je $B \prec A\ (10-9)$. Kada bi bilo još sukoba između kandidata nastavili bi na isti način raditi usporedbu i tražiti sljedeći sukob u kojem je kandidat pobijedio s četvrtim najvećim brojem glasova, i tako dalje. Na taj način se dobije lista:

$$A \prec C\ (16-3),\ \ B \prec C\ (12-7), B \prec A\ (10-9).$$

Nakon toga prolazi se po toj listi i pravi se **lista preferencija**. U svakom koraku gleda se je li $X \prec Y$, i ako je, tada se X stavlja prije Y u toj listi preferencija, osim ako Y već ne prethodi X-u u listi. U našem primjeru, trebali bi imati A prije C, B prije C i B prije A. Dakle, dobivamo listu preferencija, tj. društveni poredak **B ≺ A ≺ C** gdje je **B Condorcetov pobjednik**. U navedenom primjeru Condorcetov pobjednik postojao je i primjenom uobičajene Condorcetove metode, a ukoliko postoji pobjednik u uobičajenoj metodi, tada će taj isti biti pobjednik i u proširenoj Condorcetovoj metodi.

5.2. Condorcetov kriterij pobjednika

Kada u nekom profilu individualnih preferencija određenu alternativu možemo proglasiti Condorcetovim pobjednikom, pretpostavljamo da i prema drugim metodama ta alternativa bude pobjednik, no to nije uvijek tako. Metoda glasanja zadovoljava **Condorcetov kriterij pobjednika** ako se prema toj metodi za pobjednika izabere alternativa koja bi bila izabrana kao Condocetov pobjednik, ukoliko takav postoji. Metode koje zadovoljavaju Condorcetov kriterij nazivaju se **konzistentne Condorcetove *metode (engl. Condorcet consistent methods)***. U primjerima u nastavku na nekoliko će metoda biti prikazano kako odrediti zadovoljavaju li Condorcetov kriterij pobjednika.

Primjer 5.2.1. (Condorcetov kriterij pobjednika na metodi pluraliteta)

U izboru sudjeluje 3 kandidata: A, B, C, te 100 birača od kojih je svaki napravio individualnu preferenciju iz kojih smo dobili sljedeći profil:

Tablica 24: Condorcetov kriterij pobjednika – metoda pluraliteta

Broj birača:	**40**	**21**	**39**
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	B
3. izbor	C	A	A

Analizom profila iz *Tablice 24* dobivamo sljedeće rezultate prema Condorcetovoj metodi:
B pobjeđuje A (60 - 40),
B pobjeđuje C (61 - 39),
C pobjeđuje A (60 - 40).

Kandidat **B** je pobijedio oba preostala kandidata stoga je on **Condorcetov pobjednik.**
Prema metodi pluraliteta gdje bismo uzeli u obzir koliko birača je stavilo pojedinog kandidata kao prvi izbor pobijedio bi **A**, dakle metoda pluraliteta ne zadovoljava Condorcetov kriterij pobjednika.

Primjer 5.2.2. (Condorcetov kriterij pobjednika na metodi apsolutne većine)

Prema metodi apsolutne većine kandidat treba imati više od pola glasova u kojima je postavljen na prvo mjesto da bi bio pobjednik. Iz tog razloga on će imati više od pola glasova u međusobnim sukobima s drugim kandidatima. Dakle, onaj kandidat koji pobijedi prema metodi apsolutne većine bit će i Condorcetov pobjednik. Ali velika je vjerojatnost da pobjednik prema metodi apsolutne većine neće postojati dok će za isti profil individualnih preferencija postojati Condorcetov pobjednik. Zbog toga niti metoda apsolutne većine ne zadovoljava Condorcetov kriterij pobjednika.

Primjer 5.2.4. (Condorcetov kriterij pobjednika na Hare metodi)

U izboru sudjeluje 3 kandidata – A, B, C te 100 birača od kojih je svaki napravio individualnu preferenciju iz kojih smo dobili sljedeći profil:

Tablica 25: Condorcetov kriterij pobjednika na metodi Hare

Broj birača:	40	21	39
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	B
3. izbor	C	A	A

B pobjeđuje A (60 - 40),
A pobjeđuje C (60 - 40),
B pobjeđuje C (61 - 39).

B je pobijedio oba preostala kandidata što znači da je on Condorcetov pobjednik.

Prema metodi Hare, B bi u prvom krugu bio izbačen zato jer je najmanje birača rangiralo njega na prvo mjesto. Dakle, niti metoda Hare ne zadovoljava Condorcetov kriterij pobjednika.

Primjer 5.2.3. (Condorcetov kriterij pobjednika na Bordinoj metodi)

U izboru sudjeluje 3 kandidata: A, B, C, te 11 birača od kojih je svaki napravio individualnu preferenciju iz kojih smo dobili sljedeći profil:

Tablica 26: Profil - Condorcetov kriterij na metodi Borda

Broj birača:	6	4	1
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	A
3. izbor	C	A	B

Analizom profila iz *Tablice 26* dobivamo sljedeće rezultate prema Condorcetovoj metodi:
A pobjeđuje B (7 - 4),
B pobjeđuje C (10 - 1),
A pobjeđuje C (6 - 5).

Kandidat **A** je pobijedio oba preostala kandidata, stoga je on **Condorcetov pobjednik.** Međutim, prema Bordinoj metodi, koja je objašnjena u podpoglavlju 5.4., rezultat bi bio sljedeći:

Tablica 27: Izračun - Condorcetov kriterij na Bordinoj metodi

A	B	C
6*2=12	6*1=6	6*0=0
4*0=0	4*2=8	4*1=4
1*1=1	1*0=0	1*2=2
13	**14**	**6**

Dakle, pobjednik prema Borda metodi je kandidat **B** zato jer on ima najviše bodova.
Stoga, Bordina ne zadovoljava Condorcetov kriterij pobjednika zato jer pobjednik prema Bordinoj metodi nije isti kao što je Condocetov pobjednik.

Ideja Condorcetovog kriterija pobjednika je imati princip prema kojem se uvijek odabire pobjednik koji pobjeđuje svakog protukandidata u sukobima jedan na jedan, ako takav postoji, zato jer takav rezultat najbolje i najstabilnije odražava mišljenje grupe birača. Ipak, nisu svi mišljenja da bi Condorcetov pobjednik trebao biti pobjednik i bilo koje druge metode. Najuvjerljiviji argument za to pokazao je Donald Saari. Pogledajmo primjer 5.2.4. u kojem je prikazan njegov argument protiv Contorcetovog kriterija pobjednika.

Primjer 5.2.5. Condorcetov kriterij pobjednika – Saarijev argument

U izboru sudjeluje 3 kandidata: A, B, C, te 81 birač od kojih je svaki napravio individualnu preferenciju iz kojih smo dobili sljedeći profil:

Tablica 28: Profil individualnih preferencija

Broj birača:	30	1	29	10	10	1
1. izbor	A	A	B	B	C	C
2. izbor	B	C	A	C	A	B
3. izbor	C	B	C	A	B	A

Najprije se provedu međusobni sukobi svih kandidata:

A protiv B (41:40),

A protiv C (60:21),

B protiv C (69:12).

Iz toga dobivamo sljedeći poredak: A ≺ B ≺ C.

Prema Bordinoj metodi, koja je objašnjena u podpoglavlju 5.4., rezultat bi bio sljedeći:

Tablica 29: Bordina metoda

A	B	C
30*2=60	30*1=30	30*0=0
1*2=2	1*0=0	1*1=1
29*1=29	29*2=58	29*0=0
10*0=0	10*2=20	10*1=10
10*1=10	10*0=0	10*2=20
1*0=0	1*1=1	1*2=2
101	**109**	**33**

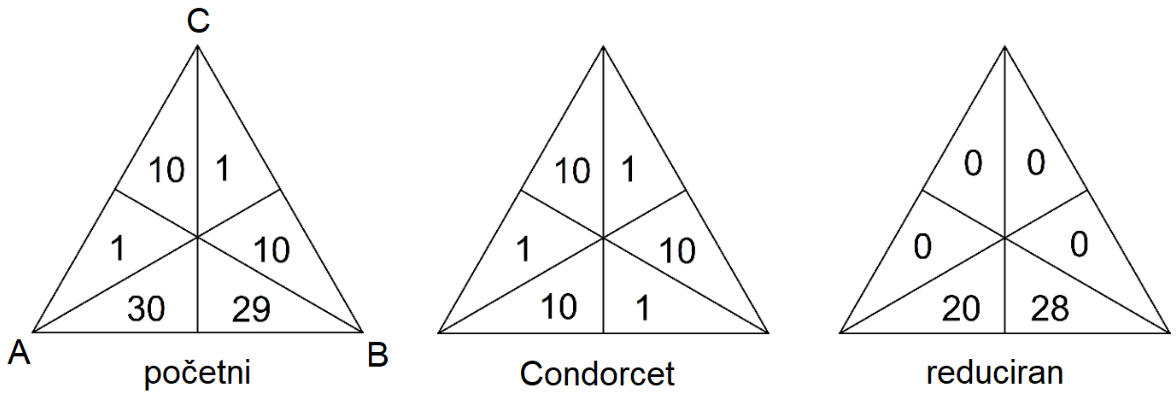
Iz *Tablice 29* dobivamo sljedeći poredak: B ≺ A ≺ C.

Ovo je još jedan primjer koji pokazuje da Bordina metoda ne zadovoljava Condorcetov kriterij pobjednika. Condorcetov pobjednik je kandidat A, a pobjednik prema Bordinoj metodi je kandidat B. Međutim, Saari je dao argument zašto je B bolji izbor od kandidata A. Podijelimo 81 birača u 3 grupe kao što je to napravljeno u *Tablici 30.*

Tablica 30: Podjela birača u 3 skupine

	Grupa 1			Grupa 2			Grupa 3	
Broj birača:	**10**	**10**	**10**	**1**	**1**	**1**	**20**	**28**
1. izbor	A	B	C	A	C	B	A	B
2. izbor	B	C	A	C	B	A	B	A
3. izbor	C	A	B	B	A	C	C	C

U grupama 1 i 2 možemo primijetiti da se javljaju ciklusi u kojima su birači ravnomjerno raspoređeni između tri moguća rangiranja. Ovakvi profili koji stvaraju savršenu simetriju među rangiranim listama kandidata nazivaju se **Condorcetove komponente** ***(engl. Condorcet components)***. Unutar svake od ovih dviju grupa, mišljenja birača se međusobno poništavaju što znači da odluka ovisi samo o grupi 3 u kojoj je kandidat B očiti pobjednik [10]. Reduciranje profila možemo prikazati i na sljedeći način kao što je prikazano na *Slici 1*.



Slika 1: Reduciranje profila

Prvi trokut na slici prikazuje prvi profil iz *Tablice 28*, p=(30,1,10,1,10,29) u kojem rezultat nije očit. Ali, u p su skrivene dvije „Condorcetove trojke".

(10,0,10,0,10,0) prikazuje sljedeću Condorcetovu trojku: $A \prec B \prec C$, $B \prec C \prec A$, $C \prec A \prec B$.

(0,1,0,1,0,1) prikazuje sljedeću Condorcetovu trojku: $A \prec C \prec B$, $C \prec B \prec A$, $B \prec A \prec C$.

Drugi trokut prikazuje da je društvena preferenacija prema Condorcetovoj metodi takva da su sva tri kandidata jednako rangirana.

Ako maknemo navedene trojke dobivamo **reducirani profil** (20,0,0,0,0,28). U reduciranom profilu je prikazan sukob između samo dva kandidata, a kao rezultat dobiva se sljedeći poredak: $B \prec A \prec C$. To je prikazano na trećem trokutu [4].

5.3. Condorcetov kriterij gubitnika

Kandidat se smatra **Condorcetovim gubitnikom** ako izgubi protiv svih kandidata u njihovim međusobnim sukobima. Metoda glasanja zadovoljava **Condorcetov kriterij gubitka** ako ne dopušta da Condorcetov gubitnik pobijedi na izborima. Pritom treba uzeti u obzir da nemaju svi izbori s tri ili više kandidata Condorcetovog gubitnika. Ovaj kriterij koristi se za usporedbu različitih sustava glasanja, a u primjerima u nastavku na nekoliko će metoda biti prikazano kako odrediti zadovoljavaju li Condorcetov kriterij gubitnika.

Primjer 6.4.1. (Condorcetov kriterij gubitnika na metodi pluraliteta)

U izboru sudjeluje 3 kandidata: A, B, C, te 20 birača od kojih je svaki napravio individualnu preferenciju iz kojih smo dobili sljedeći profil:

Tablica 31: Condorcetov kriterij gubitnika – metoda pluraliteta

Broj birača:	2	7	5	6
1. izbor	A	A	B	C
2. izbor	B	C	C	B
3. izbor	C	B	A	A

Analizom profila iz *Tablice 31* dobivamo sljedeće rezultate prema Condorcetovoj metodi:
B pobjeđuje **A** (11 - 9),
C pobjeđuje B (13 - 7),
C pobjeđuje **A** (11 - 9).

Kandidat **A** je izgubio od oba kandidata A i C, stoga je on **Condorcetov gubitnik.** Prema metodi pluraliteta gdje bismo uzeli u obzir koliko birača je stavilo pojedinog kandidata kao prvi izbor pobijedio bi kandidat **A** jer bi on dobio 9 glasova, dok je B dobilo 5 glasova, C 6 glasova. Dakle, metoda pluraliteta ne zadovoljava Condorcetov kriterij gubitnika. Jedno od rješenja za nezadovoljavanje Condorcetovog kriterija gubitnika od strane metode pluraliteta je to da se od metode pluraliteta traži da potencijalni pobjednik mora prijeći određeni prag, odnosno postotak bodova da bi se mogao smatrati pobjednikom.

5.4. Ostale metode preferencijalnog glasanja

U nastavku će biti objašnjena Bordina i Schulzeova metoda.

Bordina metoda

Francuski znanstvenik, matematičar i fizičar Jean-Charles Borda ima jako važnu ulogu u razvoju teorije glasanja. On je jedan od prvih znanstvenika koji je prepoznao da matematička pozadina glasanja nije nimalo trivijalna zbog čega se počeo baviti pronalaženjem najbolje metode glasanja. Predložio je 1770. godine metodu glasanja koja je dobila ime prema njemu **Bordina metoda** ***(engl. Borda count),*** a koja poštuje pravilo bodovanja, odnosno rezultat se izračunava na temelju koeficijenata, tj. bodova koje glasači dodijele svakom kandidatu prema mjestu u individualnom poretku pojedinog glasača. Naime, glasači poredaju sve kandidate od najpoželjnijeg do najmanje poželjnog, nakon čega se kandidatima dodjeljuju bodovi obrnuto proporcionalno njihovom poretku kako bi kandidati koji su rangirani više dobili više bodova [11].

Postoji više varijanti Bordine metode, a razlikuju se prema načinu dodjeljivanja bodova. Ako je n broj kandidata, bodovi se mogu dodjeljivati tako da se najviše rangiranom kandidatu dodijeli n bodova, $n-1$ bod za drugog najviše rangiranog, $n-2$ za trećeg najviše rangiranog i tako dalje dok se ne dođe do zadnjeg kandidata kojem se dodjeljuje 1 bod. Općenito, formula za dodjeljivanje bodova je: $n-i, i=0,\dots,n-1$. Primjerice, za $n=3$ kandidata, dodjeljuju se bodovi $3,2,1$ gdje je 3 maksimalan broj bodova koji kandidat može dobiti, a 1 najmanji. Ovakav način dodjeljivanja bodova bio je izvorni prijedlog Borde.

Sljedeća varijanta Bordine metode je da se bodovi dodjeljuju na način da se najviše rangiranom kandidatu dodjeljuje $n-1$ bodova, drugom najviše rangiranom $n-2$, trećem najviše rangiranom $n-3$ bodova i tako dalje dok se ne dođe do zadnjeg kandidata kojem se dodjeljuje 0 bodova. Općenito, formula za dodjeljivanje bodova je: $n-i, i=1,\dots n$. Primjerice, za $n=5$ kandidata, dodjeljuju se bodovi $4,3,2,1,0$ gdje je 4 maksimalan broj bodova koji kandidat može dobiti, a 0 najmanji.

Još jedna varijanta Bordine metode, poznata i kao Dowdallov sustav, u kojoj je dodjeljivanje bodova, za razliku od ostalih varijanti, neovisno o broju kandidata je sljedeća: bodovi se dodjeljuju na način da se najviše rangiranom kandidatu daje 1 bod, drugom najviše rangiranom $\frac{1}{2}$ boda, trećem najviše rangiranom $\frac{1}{3}$ boda i tako dalje. Općenito, formula za dodjeljivanje bodova je: $\frac{1}{i}, i=1,\dots n$. Ovakav način koristi se na izborima u maloj pacifičkoj otočnoj državi Nauru, a osmislio ga je Nauruov ministar pravosuđa Desmond Dowdall 1971. godine.

U bilo kojoj od varijanta Bordine metode, razlika između bodova prvog, drugog, trećeg itd. kandidata je fiksna, tj. isti broj bodova, primjerice jedan bod. Takva simetrija kod dodjeljivanja bodova je važna značajka Bordine metode. Nakon toga, društvena preferencija biračkog tijela u cjelini dobiva se na način da se zbroje bodovi pojedinih kandidata dobiveni od svih birača, a pobjednik je kandidat s najviše osvojenih bodova.

Pogledajmo sada primjer 4.2.1. (Odabir pića) u kojem odjel fakulteta od 15 članova odlučuje koje će se piće posluživati na godišnjoj proslavi, ali ovaj put neka glasanje bude provedeno prema Bordinoj metodi.

Primjer 5.4.1. (Bordina metoda)

Birači su poredali kandidate na način kako je prikazano u *Tablici 32*.

Tablica 32: Profil individualnih preferencija za izbor pića

Broj birača:	6	5	4
1. izbor	sok	pivo	vino
2. izbor	vino	vino	pivo
3. izbor	pivo	sok	sok

Broj opcija za koje je moguće glasati je $n = 3$, a dodjeljuju se bodovi prema formuli $n - i, i = 1, \dots n$, odnosno 2 boda za prvi izbor, 1 bod za drugi izbor i 0 bodova za treći izbor. U *Tablici 33* je prikazano kako se izračunavaju bodovi.

Tablica 33. Izračun bodova prema Bordinoj metodi

Vino	Pivo	Sok
6*1=6	6*0=0	6*2=12
5*1=5	5*2=10	5*0=0
4*2=8	4*1=4	4*0=0
19	**14**	**12**

Suprotno onome što se činilo na prvi pogled uspoređujući samo rezultate koji su prvi izbor svakog kandidata, kao što se radilo u Primjeru 4.2.1., najviše bodova dobilo je vino, zatim pivo, a na kraju sok. Takav rezultat dobili smo i detaljnijom analizom u primjeru 4.2.1. gdje smo promatrali sukobe u parovima svaka dva pića te brojali tko je pobijedio najviše puta.

Još jedan način izračuna koji je predložio Borda je usporedba kandidata metodom jedan na jedan, a nakon međusobnih sukoba svih kandidata, rezultat koji odražava koliku potporu ima među biračima pojedini kandidat, treba dodijeliti svakom od kandidata, te se kandidat s najvećim brojem bodova smatra pobjednikom. Pogledajmo primjer 5.4.2.

Primjer 5.4.2.

Pretpostavimo da birači trebaju odabrati pobjednika između 4 alternative – A, B, C i D. Rezultat nakon glasanja prikazan je u *Tablici 34*.

Tablica 34: Profil individualnih preferencija - Bordina metoda

Broj birača:	3	5	7	6
1. izbor	A	A	B	C
2. izbor	B	C	D	B
3. izbor	C	B	C	D
4. izbor	D	D	A	A

Najprije se provedu međusobni sukobi svih kandidata:

A protiv B (8 - 13),

A protiv C (8 - 13),

A protiv D (8 - 13),

B protiv C (10 - 11),

B protiv D (21 - 0),

C protiv D (14 - 7).

Nakon toga svakom kandidatu dodjeljuje se broj bodova koji odražava koliku potporu ima među biračima na način da se zbroje svi bodovi koje je dobio u međusobnim sukobima sa svim kandidatima. Zbroj bodova radi se na sljedeći način:

A: 8 + 8 + 8 = **24**,

B: 13 + 10 + 21 = **44**,

C: 13 + 11 + 14 = **38**,

D: 13 + 0 + 7 = **20**.

Kandidat s najvećim brojem bodova, a to je B, pobjeđuje prema Bordinoj metodi.

Dakle, i Condorcet i Borda predložili su usporedbu kandidata jedan na jedan, ali određivanje pobjednika je drugačije. Naime, prema Condorcetovoj metodi zbraja se broj pobjeda pojedinog kandidata protiv svih ostalih kandidata, dok se prema Bordinoj metodi zbrajaju bodovi koje je dobio svaki kandidat, a pobjeđuje kandidat s najvećim brojem bodova. Još uvijek nije riješena rasprava o tome treba li pobjednika birati prema Condorcetu ili Bordi. Postoje zagovornici i jedne i druge strane [10].

Schulzeova metoda

Markus Schulze je 1997. godine razvio metodu za određivanje pobjednika na temelju preferencijalnih glasova u kojoj se prema „najjačim putovima“ u grafu za svaki par kandidata određuje tko je bolji, a pobjednik je onaj kandidat koji je bolji od svih. Metoda je prema svom kreatoru dobila ime **Schulzeova metoda**, a još se, zbog načina određivanja pobjednika, naziva i **Beatpath metoda**. Schulzeova metoda zapravo je vrlo slična Condorcetovoj metodi zato jer se određuju međusobni sukobi između svaka dva kandidata, ali se dodatno zahtjeva izračunavanje najjačih puteva u grafu čime se znatno smanjuje mogućnost izjednačenja dva ili više kandidata što je prednost u odnosu na Condorcetovu metodu u kojoj se radi samo usporedba u parovima [6].

Primjer 5.4.3. Schulzeova metoda

50 birača rangira 5 kandidata – A, B, C, D i E. Pretpostavimo da je svaki birač napravio individualnu preferenciju u kojoj je rangirao sve kandidate te smo dobili profil kao u *Tablici 35*.

Tablica 35: Profil - primjer Schulzeove metode

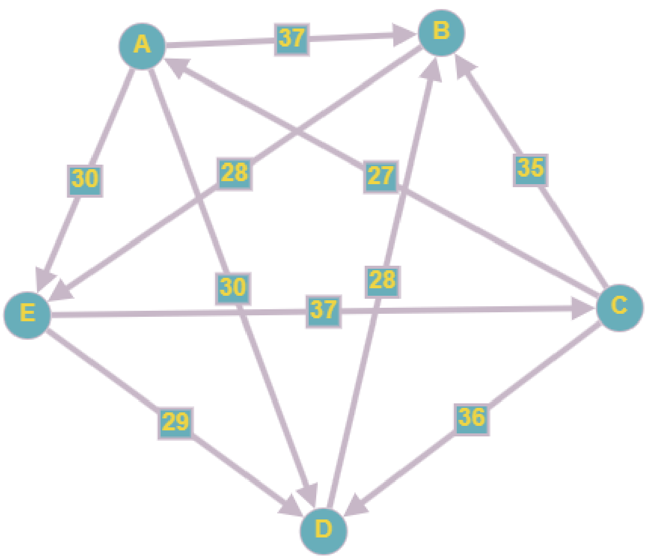
Broj birača:	8	15	7	6	14
1. izbor	A	A	C	D	E
2. izbor	D	B	B	C	C
3. izbor	E	E	A	B	D
4. izbor	C	C	D	E	A
5. izbor	B	D	E	A	B

Pretpostavimo da je $d[A,B]$ broj birača koji preferiraju kandidata A u odnosu na kandidata B. Analizom međusobnih sukoba između svaka dva kandidata dobiva se *Tablica 36*.

Tablica 36: Analiza međusobnih sukoba

$d[A,B] = 8 + 15 + 14 = \mathbf{37}$	$d[B,A] = 7 + 6 = 13$
$d[A,C] = 8 + 15 = 23$	$d[C,A] = 7 + 6 + 14 = \mathbf{27}$
$d[A,D] = 8 + 15 + 7 = \mathbf{30}$	$d[D,A] = 6 + 14 = 20$
$d[A,E] = 8 + 15 + 7 = \mathbf{30}$	$d[E,A] = 6 + 14 = 20$
$d[B,C] = 15$	$d[C,B] = 8 + 7 + 6 + 14 = \mathbf{35}$
$d[B,D] = 15 + 7 = 22$	$d[D,B] = 8 + 6 + 14 = \mathbf{28}$
$d[B,E] = 15 + 7 + 6 = \mathbf{28}$	$d[E,B] = 8 + 14 = 22$
$d[C,D] = 15 + 7 + 14 = \mathbf{36}$	$d[D,C] = 8 + 6 = 14$
$d[C,E] = 7 + 6 = 13$	$d[E,C] = 8 + 15 + 14 = \mathbf{37}$
$d[D,E] = 8 + 7 + 6 = 21$	$d[E,D] = 15 + 14 = \mathbf{29}$

Set uparenih preferencija možemo prikazati **usmjerenim težinskim grafom**. Da bi se izbjeglo pretrpavanje grafa, strelica je povučena od X do Y samo kada je $d[X,Y] > d[Y,X]$, a izostavlja se ona u suprotnom smjeru. Graf je prikazan na Slika *2*.



Slika 2: Usmjereni težinski graf

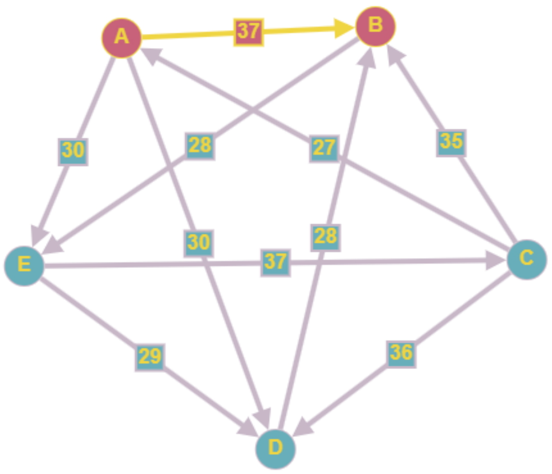
Također, preferencije glasača mogu se prikazati i matricom uparenih preferencija kao što je prikazano u *Tablici 37*. Član matrice koji se nalazi u retku X i stupcu Y, odnosno (X, Y)-ti član matrice je zapravo $d[A, B]$, tj. broj birača koji preferiraju kandidata A u odnosu na kandidata B. Ako je pozadina ćelije zelena znači da je $d[X, Y] > d[Y, X]$, a inače je pozadina žute boje.

Tablica 37: Matrica uparenih preferencija

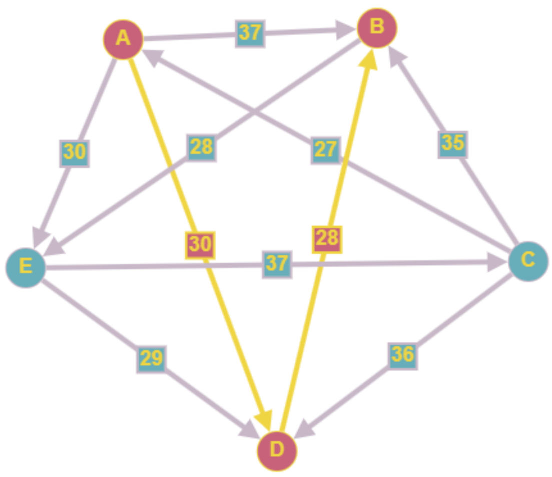
Broj birača:	$d[*, A]$	$d[*, B]$	$d[*, C]$	$d[*, D]$	$d[*, E]$
$d[A,*]$	-	37	23	30	30
$d[B,*]$	13	-	15	22	28
$d[C,*]$	27	35	-	36	13
$d[D,*]$	20	28	14	-	21
$d[E,*]$	20	22	37	29	-

Sada se trebaju utvrditi **najjači putevi** između svaka dva vrha u grafu. U usmjerenom težinskom grafu svaki luk ima svoju težinu. Snagu puta određuje brid s najmanjom težinom u tom putu. Najjači put između dva vrha određuje se tako da se nađu svi putevi između ta dva vrha, odredi se snaga svakog puta, a zatim se odredi put koji ima najveću snagu u usporedbi s ostalim putevima između ta dva luka. Put koji ima najveću snagu je **najjači put** ta dva vrha.

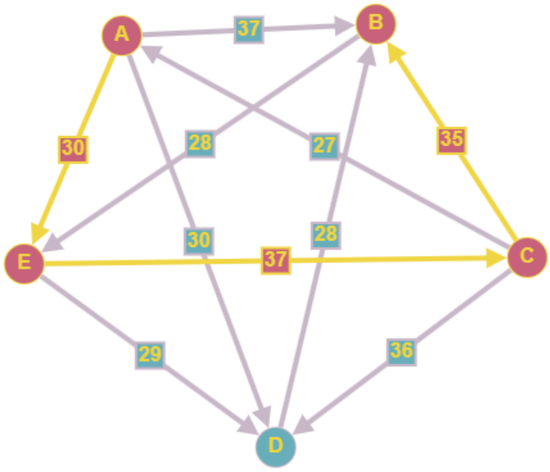
Uzmimo za primjer graf prikazan na Slika *2* te vrhove grafa A i B. Potrebno je pronaći sve puteve između vrhova A i B.



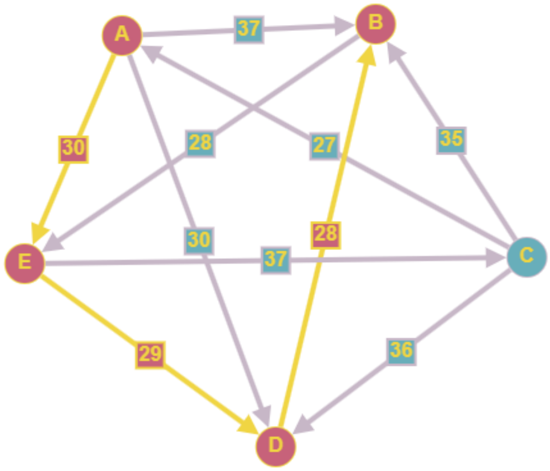
Slika 3: Put 1 između vrhova A i B



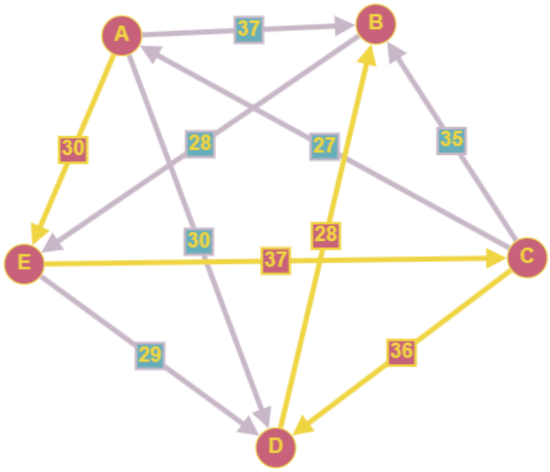
Slika 4: Put 2 između vrhova A i B



Slika 5: Put 3 između vrhova A i B



Slika 6: Put 4 između vrhova A i B



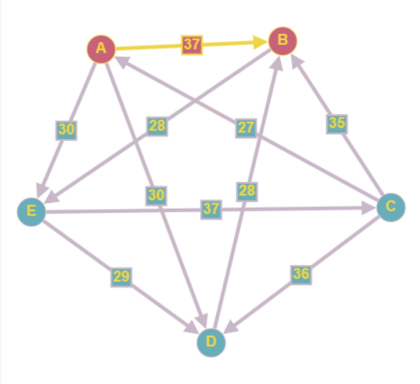
Slika 5: Put 5 između vrhova A i B

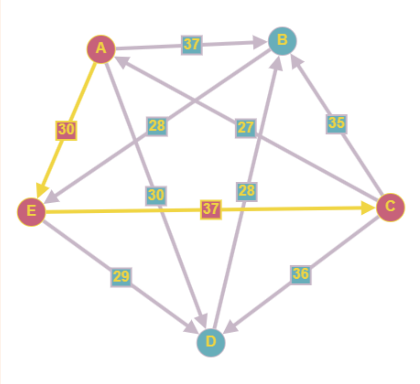
Odredimo snagu puteva:

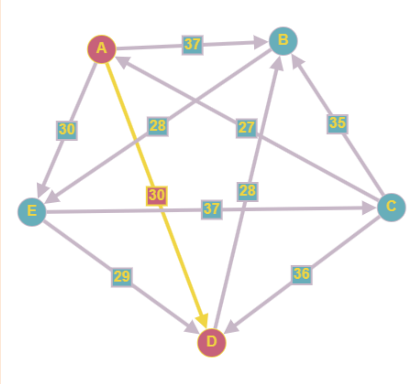
- put 1: **37**
- put 2: 28
- put 3: 30
- put 4: 28
- put 5: 28

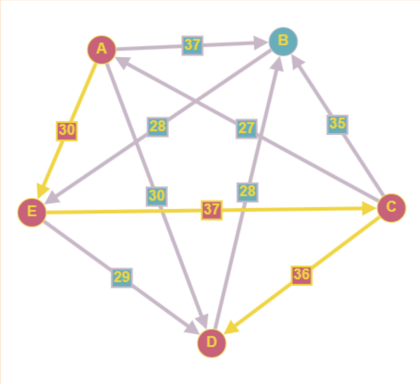
Najjači put između vrhova A i B je put 1 koji ima snagu 37. Na isti način potrebno je pronaći najjači put između svaka dva vrha. Rezultate ćemo zapisati u tablice u nastavku iz kojih će proizaći matrica najjačih puteva koja je prikazana u *Tablici 43*.

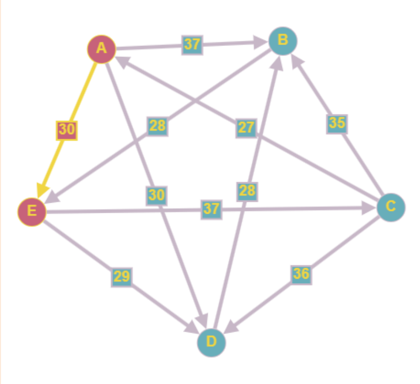
Tablica 38: Najjači putevi između vrha A i svih ostalih vrhova

<table>
<tr><th></th><th>$d[*,A]$</th><th>$d[*,B]$</th><th>$d[*,C]$</th><th>$d[*,D]$</th><th>$d[*,E]$</th></tr>
<tr><td>$d[A,*]$</td><td>-</td>
<td>

A-(<u>**37**</u>)-B</td>
<td>

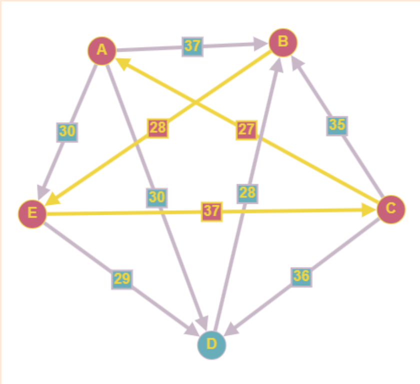
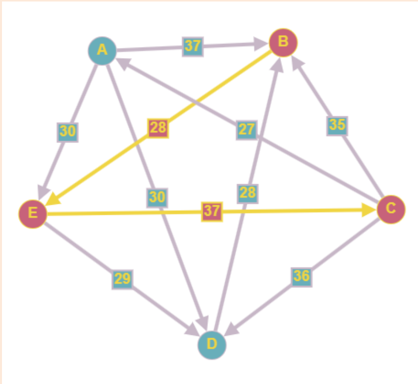
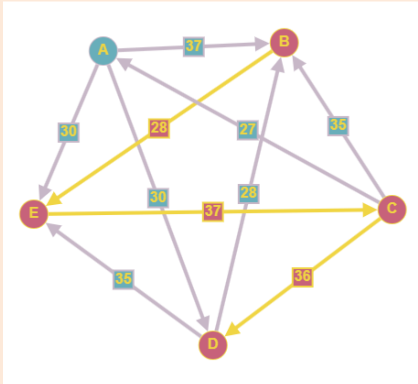
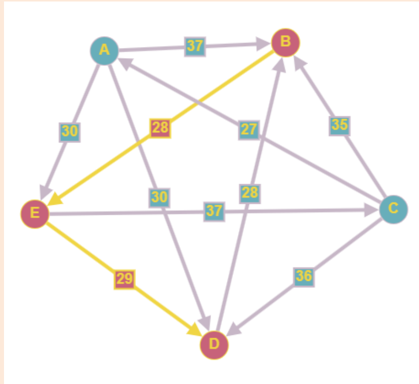
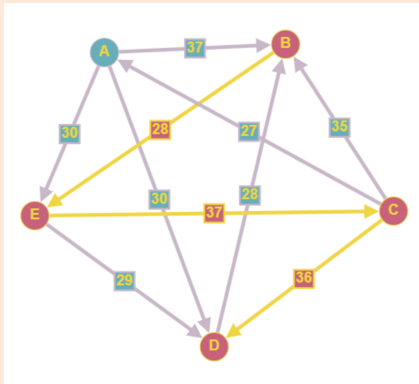
A-(<u>**30**</u>)-E-(37)-C</td>
<td>

A-(<u>**30**</u>)-D


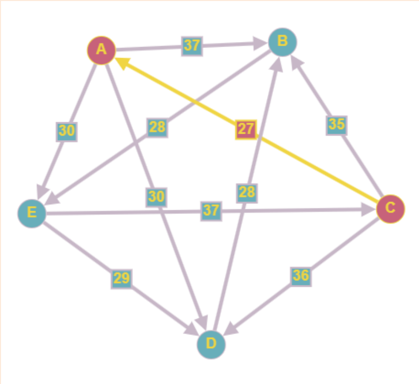
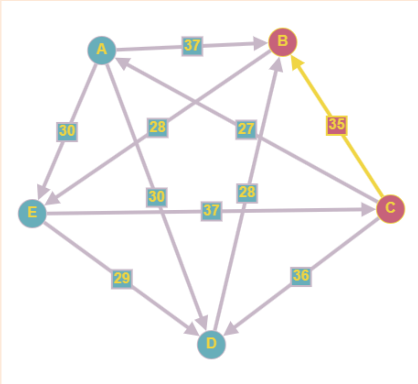
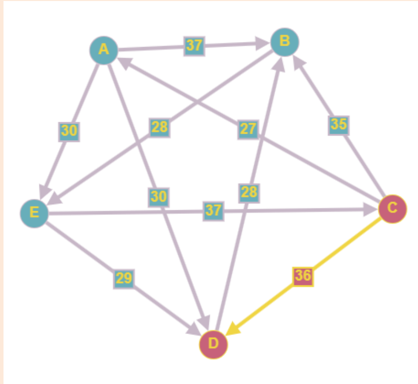
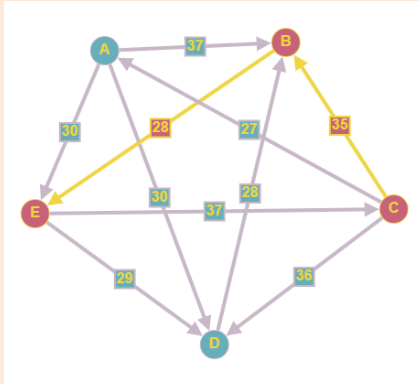
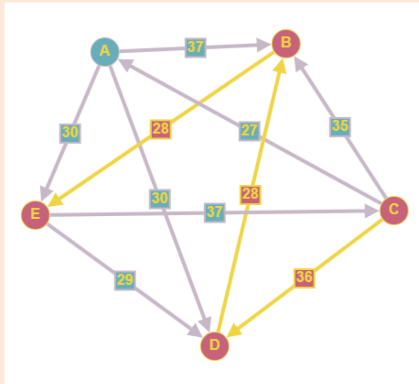
A-(<u>**30**</u>)-E-(37)-C-(36)-D</td>
<td>

A-(<u>**30**</u>)-E</td></tr>
</table>

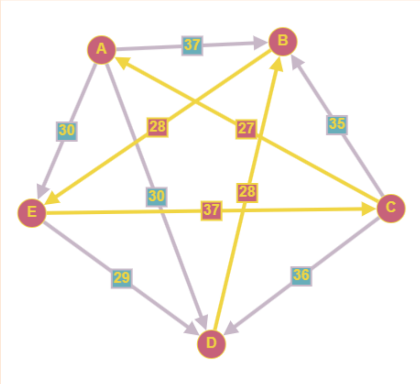
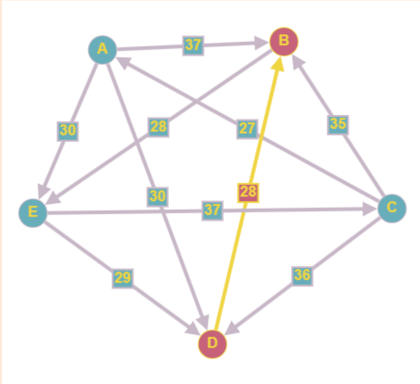
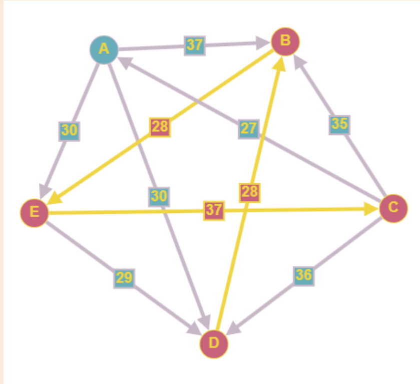
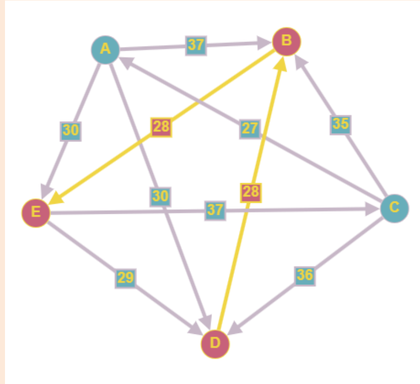
Tablica 39: Najjači putevi između vrha B i svih ostalih vrhova

	$d[*, A]$	$d[*, B]$	$d[*, C]$	$d[*, D]$	$d[*, E]$
$d[B,*]$	 B-(28)-E-(37)-C-(**27**)-A	-	 B-(**28**)-E-(37)-C	 B-(**28**)-E-(35)-C-(36)-D	 B-(**28**)-E-(29)-D  B-(**28**)-E-(37)-C-(36)-D

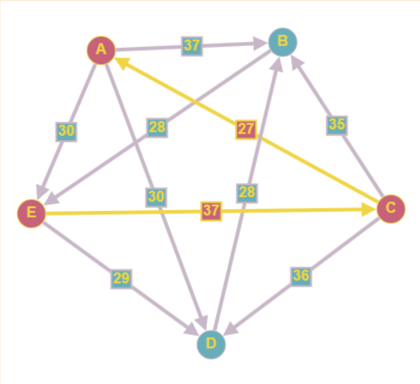
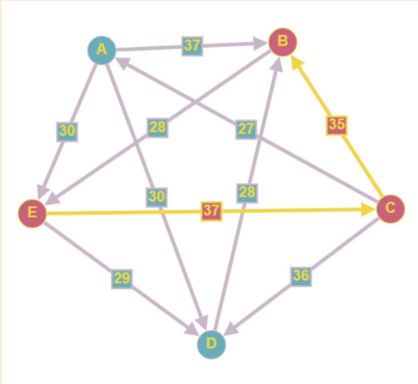
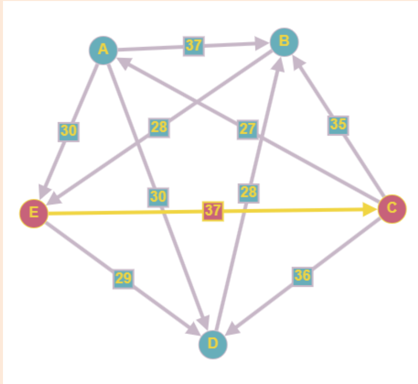
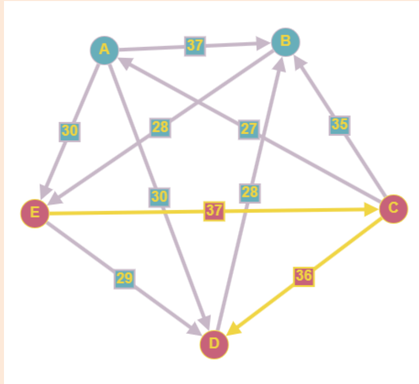
Tablica 40: Najjači putevi između vrha C i svih ostalih vrhova

	$d[*,A]$	$d[*,B]$	$d[*,C]$	$d[*,D]$	$d[*,E]$
$d[C,*]$	 C-(**27**)-A	 C-(**35**)-B	-	 C-(**36**)-D	 C-(35)-B-(**28**)-E  C-(36)-D-(**28**)-B-(**28**)-E

Tablica 41: Najjači putevi između vrha D i svih ostalih vrhova

	$d[*,A]$	$d[*,B]$	$d[*,C]$	$d[*,D]$	$d[*,E]$
$d[D,*]$	 D-(28)-B-(28)-E-(37)-C-(**27**)-A	 D-(**28**)-B	 D-(**28**)-B-(**28**)-E-(37)-C	-	 D-(**28**)-E

Tablica 42: Najjači putevi između vrha E i svih ostalih vrhova

	$d[*, A]$	$d[*, B]$	$d[*, C]$	$d[*, D]$	$d[*, E]$
$d[E, *]$	 E-(37)-C-(**<u>27</u>**)-A	 E-(37)-C-(**<u>35</u>**)-B	 E-(**<u>37</u>**)-C	 E-(37)-C-(**<u>36</u>**)-D	-

Tablica 43: Matrica najjačih puteva

	$p[*,A]$	$p[*,B]$	$p[*,C]$	$p[*,D]$	$p[*,E]$
$p[A,*]$	-	37	30	30	30
$p[B,*]$	27	-	28	28	28
$p[C,*]$	27	35	-	36	28
$p[D,*]$	27	28	28	-	28
$p[E,*]$	27	35	37	36	-

Analizom matrice najjačih puteva uspoređuju se svi kandidati i određuje se pobjednik na sljedeći način.

Najprije napravimo usporedbu između svaka dva kandidata.
A je bolji od B (37-27),
A je bolji od C (30-27),
A je bolji od D (30-27),
A je bolji od E (30-27),
C je bolji od B (35-28),
C je bolji od D (36-28),
D je isto rangiran kao i **B** (28-28),
E je bolji od B (35-28),
E je bolji od C (37-28),
E je bolji od D (36-28)

Zatim prema tome napravimo listu u kojoj su poredani kandidati od najbolje rangiranog do najgore rangiranog. $A \prec E \prec C \prec D = B$. Takvu listu nazivamo **Schulzeov poredak**. Dakle, pobjednik je kandidat A zato jer je $p[E,X] \geq p[E,X]$ za svakog kandidata X [7].

6. Arrowljev teorem nemogućnosti

Prema Condorcetovom paradoksu glasanja možemo zaključiti da ponekad ne postoji mogućnost donošenja racionalne odluke kada se individualne preferencije pokušaju preslikati u društvene preferencije. Također, vidjeli smo u različitim primjerima da i druge metode imaju nedostatke i dovode do raznih paradoksa. Iz tog razloga postavlja se pitanje postoji li ijedna metoda koja na pravedan način pretvara individualne preferencije u kolektivne, tj. u jednu preferenciju koja objedinjava mišljenja svih pojedinaca i predstavlja društvo u cjelini. Metoda bi u praksi trebala biti neovisna o tome tko su kandidati i tko su birači te koliko ih ima.

Traženjem metode koja ne dovodi do paradoksa, osim Condorceta bavio se i njegov suvremenik Borda, a kasnije i brojni drugi znanstvenici, no tek je **Kenneth J. Arrow**, dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju, 1951. godine uspio doći do suvislog zaključka pristupivši tom pitanju iz drugog smjera [12]. On se pitao koja sve svojstva, odnosno koje zahtjeve funkcija društvenog blagostanja treba minimalno ispuniti da bi se mogla smatrati racionalnom i demokratskom, a nakon određivanja tih zahtjeva došao do zaključka da ih je nemoguće sve istovremeno ispuniti.

Prema mišljenju Arrowa, postoji 5 poželjnih zahtjeva koje bi funkcija društvenog blagostanja trebala zadovoljiti da bude demokratska, a to su: neograničena domena, društveni poredak, slabi Pareto, nepostojanje diktature i neovisnost o nebitnim alternativama. U nastavku slijedi objašnjenje ovih zahtjeva.

6.1. Neograničena domena

Prvi zahtjev koji je postavio bio je taj da domena funkcije društvenog blagostanja uključuje bilo koju kombinaciju individualnih preferencija, odnosno bilo koju kombinaciju **slabih poredaka**. Ovo svojstvo naziva se **neograničena domena** ***(engl. Unrestricted Domain*, *U).*** Dosad smo promatrali one relacije u kojima je poredak strogi. Razlika je da se kod slabog poretka može dogoditi da birač, zbog neodlučnosti ili ravnodušnosti, rangira neka dva kandidata na isto mjesto, odnosno relacija slabog poretka je kompletna, tranzitivna i antisimetrična.

Primjer 6.1.1. Neograničena domena

Pretpostavimo da su alternative A, B i C, a birači 1, 2, i 3.
Postoji 13 različitih slabih poredaka koje jedan birač može izabrati ako postoje tri alternative kao što je prikazano u *Tablici 44*.

Tablica 44: 13 slabih poredaka za 3 alternative

Broj birača:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1. izbor	A	A	B	B	C	C	A B	A C	B C	A	B	C	A B C
2. izbor	B	C	A	C	A	B	C	B	A	B C	A C	A B	-
3. izbor	C	B	C	A	B	A	-	-	-	-	-	-	-

Budući da imamo 3 birača, domena funkcije društvenog blagostanja sadrži 2197, odnosno 13^3 kombinacija slabih poredaka alternativa A, B i C. Funkcija društvenog blagostanja, za ove alternative i birače, ako zadovoljava svojstvo neograničene domene, preslikava svaki od ovih logički mogućih individualnih profila preferencija u jednu, društvenu preferenciju.

Dakle, svojstvo neograničene domene zahtijeva da funkcija društvenog blagostanja može podnijeti najširi mogući raspon preferencija među alternativama koje se mogu birati, s time da nije bitno hoće li ih biti mnogo ili samo nekoliko. Problem je što u slučaju neograničene domene uvijek postoji profil preferencija poput onog iz Condorcetovog paradoksa.

Ponekad, s obzirom na prirodu alternativa koje se razmatraju i način na koji se određuju individualne preferencije između njih, nametanje svojstva neograničene domene nije prikladno ili se čak i ne mogu pojaviti sve kombinacije individualnih preferencija. U takvim slučajevima postoji mogućnost pronalaska funkcije društvenog blagostanja koja, osim neograničenosti domene, zadovoljava sve preostale zahtjeve Arrowljevog teorema. Za takve se domene kaže da su **konzistentne Arrowljeve domene** [9].

Primjer 6.1.2. Konzistentna Arrowljeva domena

Pretpostavimo da su birači poredali kandidate kao što je prikazano u *Tablici 45*.

Tablica 45: Profil individualnih preferencija - konzistentna Arrowljeva domena

Broj birača:	2	1
1. izbor	A	C
2. izbor	B	B
3. izbor	C	A

U ovom primjeru dva od tri birača imaju isti poredak preferencija. Ako kolektivnu preferenciju određujemo Condorcetovom metodom, rezultat je sljedeći:

A pobjeđuje B (2-1)
A pobjeđuje C (2-1)
B pobjeđuje C (2-1)

Relacija društvene preferencije je: A $\prec$ B $\prec$ C.

Zamislimo sada bilo koji profil u kojem dvoje od troje birača dijeli iste preferencije. Na takvoj domeni, prema Condorcetovoj metodi, nikad ne dolazi do ciklusa, već je uvijek zadovoljeno svojstvo društvenog poretka (SO). Također, funkcija društvenog blagostanja nije diktatorska (ND) pod uvjetom da domena, iako ograničena, još uvijek zadržava određenu raznolikost. Svojstva slabi Pareto (WP) i neovisnost o nebitnim alternativama (IIA) su zadovoljene. Dakle, sva svojstva osim neograničene domene su zadovoljena, stoga je domena iz ovog primjera konzistentna Arrowljeva domena.

6.2. Društveni poredak

Drugi zahtjev koji je postavio bio je taj da funkcija društvenog blagostanja preslikava relacije individualnih preferencija u društvenu preferenciju na način da poredak kandidata uvijek bude od boljeg prema gorem, a nikako u ciklusu kao što je to primjerice u Condorcetovom paradoksu. Dakle, relacija društvene preferencije treba biti tranzitivna, odnosno, ako je relacija društvene preferencije takva da više preferira kandidata x nego kandidata y, a isto tako više preferira kandidata y nego kandidata z, to znači da mora vrijediti da više preferira kandidata x nego kandidata z. Dodatno, podrazumijeva da je relacija društvene preferencije bude slabi poredak, odnosno dopušta da kandidati budu jednako rangirani. Ovo svojstvo naziva se **društveni poredak *(engl. Social Ordering, SO)***.

Doduše, Arrow društveni poredak nije naveo kao zasebno svojstvo već je taj zahtjev ugradio u sam pojam funkcije društvenog blagostanja. Naime, tvrdio je da društvena preferencija mora biti poredak, a ne ciklus, ako se želi postići racionalno donošenje odluka. Arrowljeva definicija funkcije društvenog blagostanja slijedi u nastavku.

Definicija 6.2.1. Funkcija društvenog blagostanja je pravilo koje za svaki skup individualnih preferencija određuje odgovarajući **društveni poredak** danih alternativa.

6.3. Slabi Pareto

Treći zahtjev koji je postavio bio je taj da bi društvo trebalo preferirati jednog kandidata u odnosu na drugog ako to čini svaki pojedinac tog društva. Drugim riječima, ako je kandidat x strogo rangiran iznad kandidata y od strane svih birača, tada kandidat y ne bi trebao pobijediti na izborima, odnosno društvena preferencija tada mora biti da je x rangiran iznad kandidata y. Dakle, ako su individualne preferencije jednoglasne, funkcija društvene preferencije ih mora poštovati. Ovo svojstvo naziva se **slabi Pareto** ***(engl. Weak Pareto, WP)***. Klasične metode poput Condorcetove, Bordine i mnoge druge, zadovoljavaju ovo svojstvo. Ovaj uvjet je dobio ime po Vilfredu Paretu (1848–1923), talijanskom inženjeru, sociologu, ekonomistu, politologu i filozofu.

Arrow je smatrao da, osim u slučaju filozofije sustavnog uskraćivanja ljudima onoga što žele, uopće nije sporno inzistirati na ovom svojstvu. Naime, prema njegovom mišljenu, osnovni uvjet blagostanja je izvođenje društvene preferencije prema redoslijedu individualnih preferencija, a svojstvo slabi Pareto postavlja zahtjeve blagostanja u posebnom slučaju u kojem se striktne preferencije svih birača podudaraju [9].

6.4. Nepostojanje diktature

Četvrti zahtjev koji je postavio osigurava da nijedan birač nema moć određivanja rezultata izbora. Kad bi postojao neki birač koji ima tu moć, onda bi on bio **diktator**. Konkretno, birač je diktator ako vrijedi da kad god on striktno preferira alternativu x u odnosu na alternativu y, tada i društvo mora preferirati alternativu x u odnosu na y. Samo u slučaju kada je diktator ravnodušan između neke dvije alternative, odnosno kad njegova preferencija između te dvije alternative nije striktna niti za jednu od te dvije alternative, nego ih smatra jednako dobrima, tek tada preferencije drugih birača mogu učiniti razliku u poretku društvene preferencije. Ovo svojstvo naziva se **nepostojanje diktature** ***(engl. Non-Dictatorship, ND).***

Bez zadovoljavanja ovog uvjeta, glasanje ne bi imalo smisla. Primjer za takvu moć odlučivanja o ishodu izbora je predsjednik uprave koji ima konačnu riječ u svim njenim aktivnostima te bi imalo smisla glasati samo u slučajevima kada on odbije glasati. Također, kada bi postojalo pravilo da je broj glasova koje birač može dati jednak broju dionica, tada birača s dovoljnim brojem dionica možemo nazvati diktatorom zato jer glasovi ostalih birača nemaju utjecaj na odluke.

Dakle, nepostojanje diktature je važno svojstvo koje isključuje mogućnost nedemokratskih izbora u smislu nedopuštanja da se u svakom slučaju primjenjuje identificiranje društvenih preferencija s individualnim preferencijama jednog birača. Ipak, ne mora uvijek značiti da ako se individualne preferencije jednog birača u bilo kojem slučaju podudaraju s društvenom preferencijom, da je proces izbora nedemokratski. Može se dogoditi da uvjet nepostojanje diktature ide predaleko zbog čega neke metode koje se smatraju izuzetno demokratskim, ispadaju diktatorske. Pogledajmo primjer 6.4.1.

Primjer 6.4.1.

Pretpostavimo da postoji birač, nazovimo ga Ivan, koji nema vlastite vrijednosti ili sklonosti prema nekom od kandidata, ali privremeno preuzima vrijednosti onoga tko mu je trenutno najbliži. Odbor od troje ljudi, među kojima je i Ivan, treba odlučiti između nekoliko opcija koristeći se metodom većinskog glasanja po parovima.

Budući da glasaju 3 osobe, a Ivan će glasati za isti poredak kao i birač koji će mu u tom trenutku biti najbliže, minimalno dvije od tri individualne preferencije će biti iste, Ivanova i od njemu najbližeg birača. Dakle, ako njih dvoje striktno preferiraju opciju A u odnosu na opciju B, društvena preferencija će sigurno isto biti A iznad B. Stoga, ova metoda odlučivanja je prema definiciji diktatorska, a Ivan je diktator. To nema smisla zato jer Ivan uopće nema svoje striktne preferencije, već slijedi bilo koga tko sjedi pored njega. Osim toga, metoda većinskog glasanja po parovima se smatra demokratskom. Ivan je samo smislio način da uvijek završi na pobjedničkoj strani.

Iz primjera možemo zaključiti da ponekad možemo imati diktatora, a da nema ništa nedemokratskog u tome te bi ovisno o kontekstu trebalo na logičan način zaključiti treba li funkciju društvenog blagostanja smatrati demokratskom.

6.5. Neovisnost o nebitnim alternativama

Peti zahtjev koji je postavio kaže da društvena preferencija za bilo koje dvije alternative ovisi o individualnim preferencijama između isključivo te dvije alternative, dok ostale alternative ne smiju imati utjecaja na poredak te dvije alternative u društvenoj preferenciji. Ovo svojstvo naziva se **neovisnost o nebitnim alternativama** ***(engl. Independence of Irrelevant Alternatives, IIA).***

Kada ovo svojstvo ne bi vrijedilo, bilo bi moguća sljedeća situacija:
Ako je pobjednik kandidat A i neki glasači promijene svoje preferencije na način da kandidata A pomaknu na više mjesto, a ostale preferencije ostave nepromijenjene, može se dogoditi da kandidat A više nije pobjednik.

Dakle, prema svojstvu neovisnosti o nebitnim alternativama, ako društvo više preferira x u odnosu na y, te neki birači promijene individualne preferencije vezane za ostale kandidate, a niti jedan birač ne promijeni relativne pozicije x i y na listi individualnih preferencija, onda bi rezultat izbora, tj. društvena preferencija trebala i dalje biti da je x poželjniji od y. Drugim riječima, odluka o relativnom poretku alternativa x i y je neovisna o njihovom poretku u odnosu na druge alternative. To znači da se svaki par alternativa mora promatrati zasebno, ne obraćajući pozornost na preferencije za druge alternative. Možemo reći da neovisnost o nebitnim alternativama zahtijeva da usporedba između bilo kojeg para alternativa ovisi samo o individualnim preferencijama za taj par.

Bordina metoda je primjer metode glasanja koja ne zadovoljava ovo svojstvo.

Primjer 6.5.1.

Pogledajmo dva profila individualnih preferencija koja su prikazana u nastavku.

Tablica 46: Profil individualnih preferencija 1

Broj birača:	3	2	2
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	A
3. izbor	C	A	B
4. izbor	**X**	**X**	**X**

Tablica 47: Profil individualnih preferencija 2

Broj birača:	3	2	2
1. izbor	A	B	C
2. izbor	B	C	**X**
3. izbor	C	**X**	A
4. izbor	**X**	A	B

Relativni poredak kandidata u oba profila je isti. U drugom profilu mijenja se samo poredak kandidata X.

Prema Bordinoj metodi, nakon dodjeljivanja bodova dobiva se sljedeći rezultat za prvi profil: A=15, B=14, C=13, X=0, a društveni poredak je: $A \prec B \prec C \prec X$.

Za drugi profil, nakon dodjeljivanja bodova dobiva se sljedeći rezultat: A=11, B=12, C=13, X=6, a društveni poredak je: $C \prec B \prec A \prec X$.

Dakle, iako je relativni poredak kandidata A, B i C u oba profila isti, to što su neki kandidati promijenili poredak kandidata X u svojim preferencijama dovelo do relativne promjene društvenog poretka za kandidate A, B i C [10].

Pogledajmo još jedan primjer u kojem je prikazano da mišljenje da su individualne preferencije jedina osnova za usporedbu može biti problematična.

Primjer 6.5.2. Problem svojstva neovisnosti o nebitnim alternativama

Zamislimo stanje S u kojem je Petar iznimno bogat, a Luka krajnje siromašan. Pitanje je bi li bilo bolje da se Petrova imovina da Luki. Neka je T stanje nakon prijenosa Petrove imovine na Luku.

Luka iz očitih razloga preferira stanje T u odnosu na S, a Petar smatra da nije njegov problem što je Luka siromašan te preferira stanje S u odnosu na T.

Zamislimo sada stanje S* u kojem je Petar taj koji je siromašan, a Luka bogat. Stanje T* dakle proizlazi iz stanja S*, a to je prijenos Petrove imovine na Luku. No, u ovom slučaju, Petar je siromašan što znači da se radi o uzimanju od siromašnih da bi se dalo bogatima.

No i sada su preferencije takve da svatko želi više za sebe, tako da Luka i dalje preferira stanje T* u odnosu na S*, a Petar preferira stanje S* u odnosu na T*.

Dakle, u oba slučaja preferencije su iste. No, prema definiciji blagostanja, u slučaju istih preferencija očekuje se i da je relativna društvena dobrobit ista. Ipak, što god mislili o uzimanju bogatima da bi dali siromašnima, to nikako ne može biti isto kao uzimanje od siromašnih da bi dali bogatima. Konkretno, prema definiciji blagostanja T je bolje od S zato jer se radi o povećanju jednakosti, ali je T* lošije od S zato jer se radi o smanjenju jednakosti.

6.6. Iskaz teorema

Gledajući svako od prethodno opisanih svojstva zasebno, ne čini se da su ona previše strogo postavljena. Neograničena domena i društveni poredak zahtijevaju da se omogući preslikavanje individualnih preferencija u društveni poredak bez obzira na to kakve su preferencije individualnih birača. Slabi Pareto, neovisnost o nebitnim alternativama i nepostojanje diktature zahtijevaju da budu zadovoljena osnovna demokratska načela [13]. Međutim, Arrow je otkrio da, osim u najjednostavnijim slučajevima u kojima sudjeluje manje od 3 kandidata, funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svih pet navedenih svojstva ne postoji. Izvorno, Arrow je naveo tih pet svojstva koje bi pravedan sustav glasanja minimalno trebao zadovoljiti. No, naknadno je radio modifikacije iz kojih su proizašla tri glavna uvjeta koje funkcija društvenog blagostanja mora zadovoljiti kako bi se smatrala demokratskom – slabi Pareto, neovisnost o nebitnim alternativama i nepostojanje diktature.

Teorem 6.6.1. (Arrowljev teorem nemogućnosti) Za rangiranje tri ili više kandidata ne postoji funkcija društvenog blagostanja koja bi zadovoljavala neovisnost o nebitnim alternativama, slabi Pareto, a da pritom nema diktature.

Drugim riječima, Arowljev teorem nemogućnosti ukazuje na to da kada se rangiraju tri ili više kandidata, svaka funkcija koja zadovoljava svojstva neovisnost o nebitnim alternativama i slabi Pareto, je diktatura [9].

Stoga bismo mogli zaključiti da se ne može donijeti jednoznačna pravedna kolektivna odluka koja bi se mogla poistovjetiti s odlukama, ukusima i vrijednostima svih pojedinaca koji čine društvo te da ne možemo očekivati da će demokratsko društvo donositi odluke koje pravedno odražavaju preferencije birača. Međutim, i sam Arrow je prepoznao da ponekad nije ni poželjno da funkcije društvenog blagostanja zadovoljavaju sve uvjete teorema nemogućnosti.

Ipak, uvijek treba preispitivati koliko će biti smisleno koristiti određenu funkciju ako više od ovih najvažnijih svojstava nije zadovoljeno.

7. Strateško glasanje

Prilikom održavanja izbora u kojima svaki pojedinac rangira sve alternative te se prema tim preferencijama definira funkcija društvenog izbora koja će predstavljati preferenciju cjelokupnog društva, pretpostavlja se da će pojedinci alternative poredati iskreno, ali to ne mora uvijek biti tako. Postoje slučajevi u kojima pojedini birači ili skupine birača namjerno alternative rangiraju drugačije od svojih stvarnih preferencija, primjerice na više mjesto postavljaju alternativu koja im je manje prihvatljiva i na taj način utječu na to da preferencija cjelokupnog društva ispadne u njihovu korist.

Sustav glasanja je **manipulativan** ako postoji profil individualnih preferencija takav da individualac ili skup individualaca rangiranjem alternativa različitim od njihove iskrene preferencije može utjecati na to da preferencija cjelokupnog društva bude njima prihvatljivija opcija, nego da su rangirali prema svojim iskrenim preferencijama. Ako to nije moguće, sustav glasanja bi bio **nemanipulativan** [14].

Dakle, **strateško glasanje** je iskorištavanje osobitosti neke metode, tj. sustava glasanja kako bi se izbornom tijelu nametnuo neželjeni ishod. Stoga, razotkrivanjem strukture metode glasanja, postaje moguće odrediti sve moguće načine na koje se paradoksi događaju i kako se rezultatima može manipulirati. Svim se izbornim sustavima može manipulirati, no nekima više nego drugima. Unatoč tome, nema smisla birati sustav isključivo na temelju njegovih manipulativnih svojstava. Kao analogiju možemo uzeti primjer da želimo spriječiti krađu automobila na način da vozimo auto koji je zahrđao, izlupan i neudoban, a ipak to gotovo nitko ne čini. Na sličan način, iako je sustav relativno imun na manipulativne strategije, rezultati izbora mogu vrlo različiti stvarnoj želji birača [3]. Zbog toga treba odlučiti za određenu situaciju koji je najbolji sustav glasanja.

Primjer 7.1. Strateško glasanje

Pretpostavimo da je dekan na fakultetu raspisao izbore za novog voditelja odjela iz razloga jer se trenutni voditelj više nikome ne sviđa. Odlučeno je da će se izbori provesti i analizirati prema Bordinoj metodi. Shodno tome, glasači su poredali sve kandidate, i prema tome su se kandidatima dodijelili bodovi. Natjecala su se tri kandidata: Ana, Fran i Luka – dosadašnji voditelj odjela za kojeg se svi slažu da nije dobar i žele promjenu. Dakle, broj kandidata $n = 3$, pa su prema formuli $n - i,\ i = 1, \dots n$, kandidatima dodijeljeni bodovi $2, 1, 0$, gdje je 2 boda dodijeljeno kandidatu koji je prvi na listi nekog glasača, a 0 onom koji je zadnji na listi. Ti bodovi onda se množe s brojem ljudi koji je glasao za takav poredak kao što je prikazano u *Tablici 49*.

Profil individualnih preferencija nakon što su svi glasali izgledao je kao u *Tablici 48*.

Tablica 48: Profil individualnih preferencija

Broj birača:	**7**	**7**	**1**
1. izbor	Ana	Fran	Luka
2. izbor	Fran	Ana	Ana
3. izbor	Luka	Luka	Fran

Tablica 49: Rezultati glasanja za voditelja odjela prema Bordinoj metodi

Ana	**Fran**	**Luka**
7*2=14	7*1=7	7*0=0
7*1=7	7*2=14	7*0=0
1*1=1	1*0=0	1*2=2
22	**21**	**2**

Dakle, pobijedila bi Ana s rezultatom 22:21:2. U prvom retku u *Tablici 48* prikazani su bodovi od 7 glasača koji preferiraju Anu i nju su stavili na prvo mjesto (2 boda), Frana na drugo mjesto (1 bod), a Luku na treće mjesto (0 bodova). U drugom retku prikazani su bodovi od 7 glasača koji preferiraju Frana i njega su stavili na prvo mjesto (2 boda), Anu na drugo mjesto (1 bod) i Luku na treće mjesto (0 bodova). U trećem retku prikazani su bodovi od 1 glasača koji je stavio Luku na prvo mjesto (2 boda), Anu na drugo mjesto (1 bod) i Frana na treće mjesto (0 bodova). Dakle, ako nitko od glasača ne želi da trenutni voditelj odjela (Luka) pobijedi te se njega stavi na zadnje mjesto, a glasači za Anu i Frana su podijeljeni svaki po 7 ljudi, pobjeđuje Ana zato jer je jedan glasač (Luka) nju stavio na drugo mjesto, a Frana na treće mjesto. Ovakav rezultat dobili bi kada bi svi birači glasali iskreno, što ne mora uvijek biti slučaj zato jer neka skupina birača može vidjeti mogućnost pobjede u slučaju strateškog glasanja. U nastavku će biti prikazan takav slučaj.

Pretpostavimo sada da su birači koji preferiraju Frana odlučili igrati strateški i glasati na način da svatko od njih glasa za ovakav poredak: **Fran** $\prec$ **Luka** $\prec$ **Ana**, kako bi Ana dobila najmanji broj bodova, odnosno da razlika između bodova Ane i Frana bude 2 boda, a ne jedan kao što bi bilo da svi stave Luku na zadnje mjesto. Na ovaj način pobijedio bi Fran s rezultatom 21:15:9, kao što je prikazano u *Tablici 50*.

Tablica 50: Strateško glasanje prema Bordinoj metodi

Ana	Fran	Luka
7*2=14	7*1=7	7*0=0
7*0=0	7*2=14	7*1=7
1*1=1	1*0=0	1*2=2
15	**21**	**9**

No, pretpostavimo da su birači koji preferiraju Anu očekivali da će birači koji preferiraju Frana igrati strateški, te su glasali za sljedeći poredak: **Ana** $\prec$ **Luka** $\prec$ **Fran**, kako bi i oni napravili veću razliku u bodovima između Ane i Frana, a ono što se dogodilo prikazano je u *Tablici 51.*

Tablica 51: Nedostatak strateškog glasanja u Bordinoj metodi

Ana	Fran	Luka
7*2=14	7*0=0	7*1=7
7*0=0	7*2=14	7*1=7
1*1=1	1*0=0	1*2=2
15	**14**	**16**

Odabran je Luka za kojeg zapravo nitko nije htio da pobijedi.

8. Zaključak

U izbornim scenarijima koji imaju više od dva kandidata često ne postoji jedan očiti kandidat koji odražava cjelokupno mišljenje grupe. Stoga su se razvile različite metode glasanja ne bi li se pronašla metoda kojom se, kombinacijom pojedinačnih mišljenja, odražava sveobuhvatno mišljenje grupe, odnosno metoda koja najbolje određuje grupnu odluku. Grupna odluka može biti jedan kandidat, skup kandidata ili redoslijed kandidata.

Pokušaj određivanja takve metode povlači niz različitih pitanja od onih vezanih uz prirodu demokracije i ispunjavanja tzv. volje naroda, pa sve do psihologije donošenja odluka. Naime, treba imati na umu da metoda glasanja može biti definirana na najrazličitije načine od kojih mnogi mogu biti nelogični. Primjerice mogu se osmisliti metode u kojima se grupna odluka donosi samo na temelju nekog podskupa glasača, a zanemaruje glasove svih ostalih glasača. Primjer toga je postojanje diktatora kada samo jedan birač ima moć određivanja rezultata izbora. U takvom slučaju drugim glasačima ne bi imalo smisla sudjelovati na izborima jer će pobijediti onaj kandidat za kojeg diktator smatra da je najbolji. Da bi se izbjegle takve situacije, u postupku određivanja najbolje metode predložena su neka poželjna svojstva koja bi metoda trebala zadovoljavati. Ipak, Arrow je pokazao da je nemoguće istovremeno zadovoljiti sve zahtjeve koje je on smatrao osnovnim za postizanje demokracije, ako se radi o izborima u kojima sudjeluje više od dvoje kandidata.

Popis literature i referenci

[1] *Graph Online*. Dostupno: https://graphonline.ru/en/ [Pristupano: 25.8.2022.]

[2] *Social choice modelling with Python*. Dostupno: https://github.com/hatzivelkos/socho [Pristupano: 12.9.2022.]

[3] W. D. Wallis, *The mathematics of elections and voting*. Cham: Springer. 2014.

[4] D. G. Saari, *Basic geometry of voting*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1995.

[5] A. D. Taylor, *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*. Cambridge: Cambridge University Press. 2005.

[6] C. Börgers, *Mathematics of social choice*. Philadelphia, Pa.: SIAM, Society for industrial and applied mathematics. 2010.

[7] M. Schulze, *Social Coice and Welfare*, Springer, sve. 51, izd 4, 2003. [Na internetu]. Dostupno: https://link.springer.com/journal/355/volumes-and-issues/36-2 [Pristupano 25.8.2022.]

[8] P. Fishburn, S. Brams, *Paradoxes of Preferential Voting*, Mathematics Magazine, sve. 56 izd 4, str. 207-214, ruj. 1983. [Na internetu]. Dostupno: http://www.jstor.org/stable/2689808 [pristupano 5.9.2022.]

[9] M. Morreau, *Arrow's Theorem*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Metaphysics Research Lab, Stanford University. 2019., Dostupno: https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/arrows-theorem [pristupano 7.9.2022.]

[10] E. Pacuit, *Condorcet's Paradox*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Metaphysics Research Lab, Stanford University. 2019., Dostupno: https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/voting-methods/ [pristupano: 8.9.2022.]

[11] C. List, *Social Choice Theory,* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Metaphysics Research Lab, Stanford University. 2022., Dostupno: https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/social-choice

[12] J.S. Kelly, *Arrow impossibility theorems*, New York: Academic Press. 1978.

[13] S. Brams, *Mathematics and Democracy*, Princeton: Princeton University Press. 2008.

[14] K. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, New Haven: Yale University Press., 1963.

[15] H. Nurmi, Voting paradoxes and how to deal with them, Springer Science & Business Media. 1999.

Popis slika

Popis tablica