# Modeliranje pojma kompromisa u teoriji društvenog izbora

**Hatzivelkos, Aleksandar**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Organization and Informatics / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:211:047821

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-05-13**

*Repository / Repozitorij:*

Faculty of Organization and Informatics - Digital Repository

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet organizacije i informatike

Aleksandar Hatzivelkos

# MODELIRANJE POJMA KOMPROMISA U TEORIJI DRUŠTVENOG IZBORA

DOKTORSKI RAD

Mentori: Prof. dr. sc. Tihomir Hunjak

Doc. dr. sc. Marcel Maretić

Zagreb, 2023.

University of Zagreb

Faculty of Organization and Informatics

Aleksandar Hatzivelkos

# COMPROMISE MODELLING IN SOCIAL CHOICE THEORY

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors: Prof. dr. sc. Tihomir Hunjak

Doc. dr. sc. Marcel Maretić

Zagreb, 2023.

# PODACI O DOKTORSKOM RADU

## I. AUTOR

| | |
|---|---|
| Ime i prezime | Aleksandar Hatzivelkos |
| Datum i mjesto rođenja | 17. 02. 1974., Zagreb |
| Naziv fakulteta i datum diplomiranja | PMF-matematički odjel, 01.07. 2002. |
| Sadašnje zaposlenje | Viši predavač |

## II. DOKTORSKI RAD

| | |
|---|---|
| Naslov | Modeliranje pojma kompromisa u teoriji društvenog izbora |
| Broj stranica, slika, tabela, priloga, bibliografskih podataka | Broj stranica: 155<br>Broj slika: 0<br>Broj tablica: 12 |
| Znanstveno područje i polje iz kojeg je postignut akademski stupanj | Društvene znanosti<br>Informacijske i komunikacijske znanosti |
| Mentor i voditelj rada | Prof. dr. sc. Tihomir Hunjak,<br>Doc. dr. sc. Marcel Maretić |
| Fakultet na kojem je rad obranjen | Fakultet organizacije i informatike |
| Oznaka i redni broj rada | 168 |

## III. OCJENA I OBRANA

| | |
|---|---|
| Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je prihvaćena tema | 19. 09. 2019. |
| Datum predaje rada | 06. 10. 2022. |
| Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je prihvaćena pozitivna ocjena rada | 17. 11. 2022. |
| Sastav Povjerenstva koje je rad ocijenilo | Dr. sc. Nina Begičević Ređep,<br>Dr. sc. Diana Šimić,<br>Dr. sc. Zvonimir Šikić. |
| Datum obrane | 13. 06. 2023. |
| Sastav Povjerenstva pred kojim je rad obranjen | Dr. sc. Nina Begičević Ređep,<br>Dr. sc. Diana Šimić,<br>Dr. sc. Zvonimir Šikić. |
| Datum promocije | |

# Mentori

- prof. dr. sc. Tihomir Hunjak

  Tihomir Hunjak rođen je 1949. godine u Varaždinu, Republika Hrvatska. Osnovnu školu završio je u Prelogu, a 1967. godine gimnaziju u Čakovcu. Diplomirao je 1974. godine na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu, a magistrirao je 1981. godine na Ekonomskom fakultetu-Zagreb na poslijediplomskom studiju "Teorija i politika privrednog razvoja". Doktorirao je 1991. godine na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu. Na Fakultetu organizacije i informatike u Varaždinu bio je u stalnom radnom odnosu od 1974. godine do 2002. godine, u zvanju asistenta, docenta i izvanrednog profesora, a nakon toga radi kao vanjski suradnik sve do ponovnog zaključivanja o radu na neodređeno vrijeme 2007. godine. U razdoblju 1998.-2000. bio je prodekan Fakulteta organizacije i informatike u Varaždinu. U razdoblju 2000.-2002. i 2009.-2011. bio je dekan Fakulteta organizacije i informatike u Varaždinu. U razdoblju 2002-2006. obavljao je dužnost prorektora za poslovanje i financije Sveučilišta u Zagrebu. Područje znanstvenog interesa: višekriterijska teorija odlučivanja.

  Popis radova:

  **1.** Poslovno odlučivanje. // Sikavica, Pere; Hunjak, Tihomir; Begičević Ređep, Nina; Hernaus, Tomislav, Zagreb: Školska knjiga (2014)

  **2.** Gregov, Zrinka; Hunjak, Tihomir // Višekriterijski model za vrednovanje visokoškolskih nastavnika po AHP metodi // Menadžment : znanstveno-stručni skup s međunarodnim sudjelovanjem, zbornik radova = Management : scientific and professional conference with international participation, conference proceedings / Barilović, Z.; Jurina, M,; Morović, V.; Popović, G. ; Šimurina, M. (ur.)., Zaprešić: Visoka škola za poslovanje i upravljanje, s pravom janosti, str. 935-946 (2014)

  **3.** Hunjak, Tihomir; Žugec, Bojan // Bids evaluation in public procurement by Promethee method, Promethee Days Split (2019)

- doc. dr. sc. Marcel Maretić

  Rođen u Čakovcu 1977. godine. Osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju pohađao u Varaždinu. Srednju školu završio u Denveru, Colorado, S.A.D. Diplomirao teorijsku matematiku u Zagrebu 2002. Od 2002. do 2011. radi kao asistent na katedri za matematiku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Od 2011. zaposlen kao asistent na katedri za kvantitativne metode Fakulteta organizacije i informatike1u Varaždinu. Područje znanstvenog interesa: matematička logika s primjenom u teoriji društvenog izbora.

  Popis radova:

  **1.** Maretić, Marcel // On multiple conclusion deductions in classical logic. // Mathematical communications, 23 (2018), 1; 79-95

  **2.** Maretić, Marcel // On Satisfiability Trees. // International Journal of Applied Mathematics, 29 (2016), 5; 569-582 doi:10.12732/ijam.v29i5.5

  **3.** Hatzivelkos, Aleksandar i Maretić, Marcel // Evaluating Compromise in Social Choice Functions, Journal of Information and Organizational Sciences, Vol. 46, 2 (2022); 377-389, doi:10.31341/jios.46.2.7

# Sažetak

Teorija društvenog odabira interdisciplinarno je područje na presjeku informacijskih, ekonomskih i matematičkih znanosti. U radu proučavamo modele definirane na profilima strogih linearnih preferencija (poredaka) nekog broja kandidata (ili opcija). U okviru tako definirane teorije, proučavamo načine modeliranja pojma „kompromisa“ kroz definiciju mjere odmaka od kompromisa odabira pojedinog kandidata na dano mjesto u strogom linearnom poretku. Kompromis se kao cilj realizira kroz minimizaciju tako definirane mjere. Prateći formalnu metodologiju matematičkog dokaza, dokazujemo da tako definirana mjera odmaka od kompromisa djelomično potvrđuje neformalna očekivanja od pojma kompromisa u okviru funkcija društvenog izbora: Borda metoda društvenog izbora uvijek bira kao pobjednika kandidata koji ima manju mjeru odmaka od kompromisa od većinske metode – u slučaju izbora između tri kandidata. U slučaju četiri ili više kandidata, pokazujemo kako postoje profili društvenih preferencija u kojima većinska metoda može izabrati kandidata s manjom mjerom odmaka od kompromisa. Na minimizaciji mjere odmaka od kompromisa temeljimo definiciju novih funkcija društvenog izbora. SdM metoda definirana je kroz minimizaciju odmaka od kompromisa oko izbora pobjedničkog kandidata. Formalno dokazujemo kako SdM metoda ispunjava Youngovu karakterizaciju, te pripada klasi pozicijskih bodovnih funkcija društvenog izbora. GdM metoda je definirana kao pohlepna metoda koja redom minimizira odmake od kompromisa oko izbora kandidata na sva mjesta u linearnom poretku. Pokazujemo kako GdM posjeduje neželjena svojstva poput ne ispunjavanja Paretovog aksioma. Konačno, definiramo TdM metodu koja minimizira zbroj odmaka od kompromisa oko izbora na sva mjesta u linearnom poretku, na skupu svih permutacija (mogućih poredaka) kandidata. Dokazujemo kako TdM metoda zadovoljava Paretov aksiom, te da u posebnom slučaju (za tri kandidata) ispunjava Miharinu karakterizaciju, te je ekvivalentna Bordinoj metodi.

**Ključne riječi:** teorija društvenog izbora, funkcije društvenog izbora, kompromis, minimizacija, Borda izračun, većinska metoda, bodovne pozicijske funkcije društvenog izbora

# Abstract

Social choice theory is an interdisciplinary theory that connects information sciences, mathematics and economics. In this paper, we study models defined on profiles of strict linear preferences of a number of candidates (or options). Within the framework of the theory defined in this way, we study the ways of modeling the concept of ”compromise” through the definition of a measure of divergence from the compromise of selecting an individual candidate to a given position in a strict linear ordering. The main idea is that for some candidate, that greater distance between a position in a preference, and a certain position in strict linear ordering (or resulting preference) should have more than linear contribution to the measure of divergence. Therefore, we introduce the measure of divergence as an sum of distances (between position in the given preference and selected position in linear ordering) raised to the power of $d > 1$.

In such model, value of $d > 1$ represents the level of compromise that society finds acceptable. Since the core phenomenon of the compromise is the concept of vagueness, selection of the value for $d$ allows us to analyze the compromise as a version of a Sorites paradox. Through selection of $d$ society has to decide where to ”draw the line” on the subject of compromise winner. Compromise as a version of the Sorites paradox is analyzed in Section 2.2. This model also enables a never-top-ranked candidate to have the least measure of divergence from the compromise about first position, which is consistent with the notion of Compromise axiom (see [14]).

Definition of the d-measure of divergence from compromise allows us to compare some standard social choice function. In Chapeter 2, three standard social choice functions are compared with regard to the d-measure of divergence from the winning position: Borda count, plurality count and Condorcet method. Plurality count is usually considered as ”the least compromise” function since it selects winners using just number of winning preferences for a candidate. On the other hand, Borda count is often considered as a social choice function which fairly represents compromise, since it utilizes the information about all positions of candidates in all preferences. Our main result in Section 2.5. justifies in part such colloquial expectations. We proved that winner of the Borda count (if different from the winner of Plurality count) always has lesser d-measure of divergence from the compromise about first position than the Plurality count winner, in the three-candidate

scenario. Proof of this claim is combinatorial. To reduce number of profiles which should be analyzed, we used the property both Borda and Plurality count are satisfying: both of those SCF are invariant to the removal of Condorcet triplets (just as a d-measure of divergence itself), that is, removal of maximal symmetrical sub profiles. However, we also showed that in case of four or more candidates, there are profiles of preferences on which Plurality count winner has lesser d-measure of divergence from the compromise about first position than Borda winner.

In Chapter 2 we also compared winners of Borda count and Condorcet method, with regard to d-measure of compromise. Since Borda count does not always elects as a winner a candidate with the least d-measure of divergence from compromise about first position, there is a possibility that some other SCF elects such candidate on a given profile. Since Condorcet method is not invariant to the removal of maximal symmetrical sub profiles, this allows the construction of profiles on which Condorcet method elects a winner with smaller d-measure of divergence than Borda count. This result is shown in Section 2.6.

In Chapter 3 we analyzed possibilites for construction of new social choice function, based around minimization of the d-measure of divergence from the compromise. In first approach we took, main goal eas to minimize d-measure of divergence from the compromise about first position. This approach resulted with SdM (Simple d-Measure) social choice (welfare) function that ranks candidates with regard to their d-measure of divergence from compromise about winner, i.e., it elects winning candidate with the least d-measure of divergence from compromise about winner.

In Section 3.1 we analyzed properties of SdM. We proved that such social choice function satisfies number of desirable axioms of the social choice theory, namely anonymity, neutrality, monotonicity and Pareto efficiency. Furthermore, we proved that SdM satisfies axioms of reinforcement and continuity, thus fulfilling Young characterization of point scoring social choice functions.

In Section 3.2 we wish to utilize complete information produced by the d-measure of divergence, not just information of the d-measure of divergence from the compromise about winner. Therefore we define a greedy approach to minimization of d-measure of divergence, where candidate is electer to some position in the linear ordering if s/he minimizes d-measure of divergence from the compromise about that position. Although sounds reasonable, we prove that greedy approach to minimization has unwanted properties, such

as lack of Pareto efficiency which is usually considered as one of the most important axioms of the social choice theory. In same section we propose an improvement of the greedy method, though so-called ”cumulative greedy” approach to the minimization. We do not pursue this line of reasoning.

Finaly, in Section 3.3 we define social choice (welfare) function TdM (Total d-Measure) which utilizes the complete information about d-measures of divergence. This method compares the sum of d-measures for all candidates over the set of all possible orderings (permutations). In this section we prove that TdM also satisfies number of axioms of the social choice theory: anonymity, neutrality, continuity and Pareto efficiency. We also prove that in three candidates scenario, for $d = 2$, TdM satisfies monotonicity and intensity of independence of irrelevant alternatives (IIIA). Those properties allows us to use Mihara characterization of the Borda count, proving that TdM is equivalent to Borda count for $d = 2$ at three candidates scenario.

**Keywords:** social choice theory, compromise, minimization, Borda count, Plurality count, point scoring social choice function

# Sadržaj

# Popis tablica

# Oznake i simboli

| | |
|---|---|
| $\mathcal{M}$ | skup kandidata nad kojima se formira profil preferencija birača |
| $m$ | ukupan broj kandidata u promatranom profilu preferencija |
| $M_i$ | $i$-ti kandidat iz skupa kandidata $\mathcal{M}$ |
| $A$, $B$, $C$... | kandidat iz skupa kandidata $\mathcal{M}$ |
| $\mathcal{N}$ | skup birača koji se formiraju profil preferencija birača |
| $n$ | ukupan broj birača u promatranom profilu preferencija |
| $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ | skup svih strogih linearnih poredaka kandidata iz skupa $\mathcal{M}$ |
| $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ | skup svih ne strogih linearnih poredaka kandidata iz skupa $\mathcal{M}$ |
| $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ | skup svih profila preferencija $n$ birača nad skupom kandidata $\mathcal{M}$ |
| $\alpha$, $\beta$, $\gamma$... | profili preferencija birača, elementi skupa $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ |
| $\alpha_{ij}$ | $j$-ti kandidat u poretku $i$-tog birača na profilu preferencija $\alpha$ |
| $\alpha_i(M_k)$ | pozicija na kojoj se u preferenciji $i$-tog birača na profilu preferencija $\alpha$ nalazi kandidat $M_k$ |
| BC | oznaka za funkciju društvenog izbora Borda izračun (eng. *Borda Count*) |
| PC | oznaka za funkciju društvenog izbora većinski izračun (eng. *Plurality Count*) |
| CC | oznaka za funkciju društvenog izbora Condorcetov izračun (eng. *Condorcet Count*) |
| $F$ | funkcija društvenog izbora |
| $F(\alpha)$ | poredak kandidata koji je rezultat primjene funkcije društvenog izbora $F$ na profil preferencija $\alpha$ |
| $\beta_j^d(M_k)$ | $d$-mjera odmaka kandidata $M_k$ od $j$-te pozicije u poretku kandidata |

| | |
|---|---|
| $\beta^d_{sum}(\alpha, \xi)$ | zbroj $d$-mjera odmaka induciranih permutacijom $\xi$ na profilu preferencija $\alpha$ |
| $M^d(\alpha)$ | matrica $d$-mjere odmaka nad profilom preferencija $\alpha$ |
| $\xi$ | permutacija nad skupom kandidata $\mathcal{M}$ |
| SdM | oznaka za funkciju društvenog izbora *Simple d-Measure* |
| GdM | oznaka za funkciju društvenog izbora *Greedy d-Measure* |
| CGdM | oznaka za funkciju društvenog izbora *Cumulative Greedy d-Measure* |
| TdM | oznaka za funkciju društvenog izbora *Total d-Measure* |
| $\Delta^d$ | matrica razlike između matrica $d$-mjera odmaka $M^d(\alpha')$ i $M^d(\alpha)$ |

# Poglavlje 1

# Uvod

Prvo poglavlje ovog rada sažima prethodne rezultate koji se mogu naći u [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 38, 40].

## 1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja

Kako biramo? Iako se pojam izbora često veže uz politiku i izbore za parlament ili predsjednika države, izbori su zapravo puno češći. Po školama u razredima učenici biraju svoje predsjednike ili predsjednice, u raznim neformalnim društvima se često glasanjem odlučuje što će se napraviti i tko će nešto raditi, a i svaka udruga statutom u pravilu ima propisan način odlučivanja glasanjem. Svaki izborni proces zapravo se može promatrati kao funkcija, koja svakoj kombinaciji izbornih preferencija (nad skupom kandidata) svih birača (agenata) pridružuje rezultat društvenog izbora – jednog pobjednika ili redoslijed kandidata koji su sudjelovali u izbornom procesu. Takve funkcije nazivamo *funkcijama društvenog izbora*, a teoriju koja proučava funkcije društvenog izbora, *teorijom društvenog izbora.*

Začetkom teorije društvenog izbora smatra se javna rasprava i sučeljavanje argumenata francuskog filozofa i ekonomista Marie Jean Antoine Nicolas de Caritata, markiza od Condorceta i francuskog matematičara Jean-Charlesa de Borda u drugoj polovici 18. stoljeća. Svaki je prezentirao svoj model društvenog izbora, koje danas poznajemo kao (klasične) funkcije društvenog izbora - Condorcetov i Borda izračun.[3, 10] U toj raspravi (koja je otvorena još i danas), Borda je isticao prednosti modela u kojemu se svako mjesto u linearnom poretku kandidata boduje. Konačan poredak kandidata, odnosno rezultat društvenog izbora, u konačnici mora vrednovati postignute bodovne vrijednosti svakog kandidata. Ta osnova Borda izračuna kasnije je poopćena do klase funkcija društvenog izbora nazvane *pozicijske bodovne funkcije društvenog izbora*, čiju je karakterizaciju dao H.P. Young.[38] S druge strane, Condorcet je u svojem pristupu agregaciji društvenog izbora nad profilom linearnih preferencija naglasak stavljao na međusobne odnose kandidata, tzv. *duele*. Prema Condorcetovoj metodi, rezultat funkcije društvenog izbora mora poštivati sve međusobne odnose kandidata. Ukoliko postoji kandidat koji u međusobnim duelima pobjeđuje sve ostale kandidate, tada se takav naziva *Condorcetovim pobjednikom*. Prema Condorcetu, funkcija društvenog izbora bi morala za pobjednika birati Condorcetovog pobjednika, ukoliko takav postoji. Formalne definicije obaju metoda dati ćemo u sljedećem poglavlju.

Početkom moderne teorije društvenog izbora smatra se, pak knjiga "Social choice and individual values" američkog ekonomista Kennetha J. Arrowa, dobitnika Nobelove nagrade za ekonomske znanosti iz 1972. godine.[1] U teoriji funkcija društvenog izbora definirani su i izučeni aksiomi koji se očekuju od demokratskih funkcija društvenog izbora: Paretov aksiom (koji se u raznim radovima koristi u jačoj ili slabijoj varijanti), aksiom monotonosti (koji se također formulira u jačoj ili slabijoj varijanti), aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa (eng. *independence of irrelevant alternatives*), aksiom univerzalne domene, aksiom anonimnosti i aksiom neutralnosti.[25] Najpoznatiji Arrowljev rezultat pokazuje kako ne-diktatorska funkcija društvenog izbora ne može u isto vrijeme zadovoljavati Paretov aksiom i aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa.

Taj intrigantan rezultat Kennetha J. Arrowa bio je tema mnogih istraživanja i interpretacija. Posebno, istaknuti ćemo radove Donalda G. Saarija objavljenih krajem prošlog i početkom ovog stoljeća, koji u pitanje dovodi utemeljenost aksioma nezavisnosti od nevažnih alternativa (IIA). Saari ističe kako "*prihvaćanje privlačnog svojstva poput IIA … dolazi sa skrivenom cijenom gubitka tranzitivnosti, čineći tako* (funkcije društvenog izbora) *nerealističnima i nestabilnima*".[29] Nadalje, Saari je pokazao je da postoji funkcija društvenog izbora (Borda izračun) koja zadovoljava sve uvjete Arrowljevog teorema uz prilagođenu verziju aksioma nezavisnosti od nevažnih alternativa. Tu prilagođenu verziju Saari naziva aksiomom nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (eng. *intensity independence of irrelevant alternatives*, IIIA), i njome se uvodi mjera nezavisnosti od nevažnih alternativa.[28, 29] Kasniji radovi pokazuju kako se upravo IIIA može iskoristiti za karakterizaciju Borda izračuna.[23]

U ovom radu nećemo ulaziti u opravdanost Saarijeve kritike Condorcetovog izračuna (i posljedično aksioma nezavisnosti od nevažnih alternativa), no argumenti koje Saari koristi u svojim radovima pokazuju se kao korisne *tehnike* u procesu dokazivanja pojedinih tvrdnji. Tako Saari u svojoj argumentaciji ističe kako bi funkcija društvenog izbora trebala biti invarijantna na uklanjanje maksimalnog simetričnog pod profila iz profila preferencija (tzv. „*Condorcetovog šuma*“), čime se čuva tranzitivnost. No ukoliko, funkcija društvenog izbora već jest invarijantna na takvo uklanjanje, tada se taj proces može iskoristiti kao tehnika za značajno pojednostavljenje kombinatornih dokaza.

U teoriji društvenog izbora, a posebno u okviru analize ordinalnih preferencija agenata, pojam kompromisa tretiran je usputno kako bi se naglasili neželjeni rezultati pojedinih funkcija društvenog izbora, u prvom redu većinskog izračuna. Kritike većinskog izračuna sežu do samih početaka teorije društvenog izbora i radova Condorceta i Borde. Najčešća kritika većinskog izračuna upravo je ignoriranje načela kompromisa, unatoč tomu što sam pojam kompromisa u pravilu ostaje nedefiniran. Tako primjerice, u izboru između pet kandidata (opcija), većinskim izračunom pobjedu može odnijeti kandidat sa tek 21% podrške, iako tog kandidata ostalih 79% birača (agenata) smatraju najlošijim izborom. Upravo se takav ishod smatra nepoželjnim, pri čemu je često eksplicitno istaknuto kako se time *"ne izabire kompromisno rješenje"*.[4]

Kroz razvoj teorije društvenog izbora bilježimo nekoliko modela i metoda koji su adresirali taj problem, koristeći pri tome i u samoj formulaciji metode pojam kompromisa. Tako Sertel u krajem 20. stoljeća definira i analizira metodu *Većinskog Kompromisa* (eng. *Majoritarian Compromise*, MC) [35, 36]. Brams i Kilgour 2001. godine definiraju metodu *Povratnog Pregovaranja* (eng. *Fallback Bargaining*) [5], dok u radu Özkal-Sanvera iz 2004. godine nalazimo definiciju i analizu metode *Efikasnog Kompromisa* (eng. *Efficient Compromise*, EC) [34]. U istom periodu Bassett i Persky definiraju metodu *Izbora putem Medijana* (eng. *Median Voting Rule*) [2], dok u knjizi *"Voting Paradoxes and How to Deal with Them"* H. Nurmi nalazimo *Praktičnu Condorcetovu metodu* (eng. *Condorcet Practical Method*, CPM) [24]. Zajednička značajka tih metoda je da u pokušaju obuhvaćanja pojma kompromisa izlaze iz područja analize ordinalnih preferencija, kako u iterativne metode tako u kardinalne preferencije (ocjenjivanje kandidata / opcija) i područje *izbora odobravanjem* (eng. *approval voting*).

U novije vrijeme analiza pojma kompromisa u okviru teorije ordinalnih preferencija opet dolazi u fokus. Merlin i Özkal-Sanver u radu iz 2019. godine pokazuju kako se sve te metode mogu okupiti u jednu klasu funkcija društvenog izbora (koju nazivaju *klasom kompromisnih pravila*) [22], te da su karakterizirane pravilima bodovanja (eng. *scoring rules*) koje je u svojim radovima detaljno analizirao Saari. Chatterji, Sen i Zeng u članku iz 2016. godine uvode novi aksiom koji nazivaju *"svojstvom kompromisnosti"*. Njihov rad se bavi analizom *slučajnih funkcija društvenog izbora* (eng. *random social choice functions*), a svojstvo kompromisnosti uvode zbog izdvajanja slučajne diktatorske funkcije društvenog izbora iz klase slučajnih funkcija društvenog izbora koje zadovoljavaju klasične aksiome proučavane u tom području teorije društvenog izbora [9]. Prateći osnovnu ideju svojstva kompromisnosti u radu Chatterjija i ostalih, Hatzivelkos 2021. godine uvodi jaku i slabu verziju Aksioma kompromisnosti [14]. Kombinacija jake i slabe verzije aksioma funkcije društvenog izbora klasificira u tri klase, potvrđujući i klasifikaciju Merlina i Özkal-Sanvera.

Tablica 1.1: Motivacijski profil za uvođenje svojstva kompromisnosti

| $n_1$ | $n_2$ |
|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ |
| $M_3$ | $M_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_2$ | $M_1$ |

Za ovaj rad posebno je važan motivacijski profil preferencija na osnovu kojega se uvodi svojstvo kompromisnosti (vidi Tablicu 1.1). U tom profilu neki broj birača (njih $n_1$) kao kandidata $M_1$ rangiraju kao prvi izbor, a kandidata $M_2$ kao posljednji izbor u svojoj preferenciji. Nasuprot tome, preostalih $n_2$ birača ima potpuno obrnutu preferenciju glede ta dva kandidata. Njima je kandidat $M_2$ najviše, a kandidat $M_1$ najniže rangirani kandidat. Zajedničko je za obje preferencije da na drugom mjestu imaju rangiranog kandidata $M_3$.

Slučajna diktatorska funkcija društvenog izbora svakome od glasača dodaje težinski index, te na temelju tog indeksa nasumično izbore jednog birača. Njegov prvi izbor je ujedno i rezultat slučajne diktatorske funkcije društvenog izbora. Ukoliko je razdioba težina po biračima uniformna (tj. ukoliko se svakom biraču pridruži jednak težinski indeks $1/n$, gdje je $n$ ukupan broj birača), tada je slučajna diktatorska funkcija društvenog izbora i *anonimna* (tj. njezin rezultat ne ovisi o imenima birača), dok se u članku može vidjeti kako zadovoljava druge poželjne aksiome. No, ono što je karakteristično za slučajnu diktatorsku funkciju društvenog izbora jest to da ne omogućava izbor kompromisnog kandidata $M_3$. Točnije vjerojatnost izbora kandidata $M_3$ pomoću slučajne diktatorske funkcije društvenog izbora jednaka je nula.

S tom motivacijom, Chatterji i dr. uvode *aksiom svojstva kompromisnosti.* Za slučajnu funkciju društvenog izbora se kaže da zadovoljava svojstvo kompromisnosti, ukoliko na profilu oblika iskazanog u Tablici 1.1, gdje je $n_1 = \lceil n/2 \rceil$, ima pozitivnu vrijednost vjerojatnosti izbora kompromisnog kandidata (tj. kandidata različitog od $M_1$ i $M_2$).

Slično motiviran pristup moguće je izvesti i unutar analize ordinalnih preferencija klasičnih (a ne slučajnih) funkcija društvenog izbora. Štoviše, treba istaknuti kako je iskazani koncept moguće poopćiti kako bi se potpunije obuhvatilo značenje pojma kompromisa. Chatterji i dr. u svojoj definiciji aksioma svojstva kompromisnosti biračku potporu prvoj, odnosno drugoj preferenciji, postavljaju na polovinu (ili ”skoro polovinu”, u slučaju neparnog broja birača).[1] No otvoreno je pitanje *neodređenosti* pojma kompromisa, čemu ćemo posebnu pažnju posvetiti u Poglavlju 2.2. Pregled dosadašnjih rezultata pokazuje kako postoji prostor i potreba za preciznom formalnom definicijom tog pojma unutar analize ordinalnih preferencija. Stoga, pojam ”kompromisa” u teoriji odlučivanja zaslužuje dodatnu formalnu pažnju [12, 13, 15].

Konačno, istaknimo položaj ovog istraživanja i u širem kontekstu teorije odlučivanja. U istraživanjima Sustava potpore odlučivanju (Decision support systems - DSS), u posljednjih je dvadeset godina prepoznat fenomen „neodređenosti“ (ili „neizrazitosti“), te je u radovima brojnih autora pojam kompromisa modeliran i analiziran kroz sustave neizrazite logike (eng. *fuzzy logic*), odnosno neizrazitih skupova. [8, 21, 37, 40] Definicijom i analizom pojma kompromisa u okviru ordinalnih preferencija agenata otvaraju se nove mogućnosti upotrebe i unutar Sustava potpore odlučivanju.

[1] Treba istaknuti kako dokazi u [9] ne ovise o vrijednostima $n_1$ i $n_2$ iz profila u Tablici 1.1 no kako su pri definiranju aksioma odabrali upravo (skoro) polovične vrijednosti kako bi uvedeni aksiom bio dovoljno *slab*, odnosno kako bi ga moga zadovoljiti što šira klasa funkcija društvenog izbora.

## 1.2 Osnovni pojmovi

Prije nego li krenemo sa opisivanjem raznih izbornih sustava, ili točnije definiranje pripadnih funkcija društvenog izbora, definirati ćemo osnovne pojmove. Skup $\mathcal{N} = \{N_1, \cdots, N_n\}$ obilježavati će skup svih $n$ glasača, a $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \cdots, M_m\}$ skup svih $m$ kandidata na izborima. Skupovi $\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}$ su neprazni, diskretni i konačni. U slučaju kada $\mathcal{M}$ sadrži manji poznati broj kandidata, primjerice tri kandidata, elemente skupa ćemo obilježavati velikim štampanim slovima, npr. $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$.

Prvi pojam koji nam je potreban jest vrijednosni sud (preferencija) birača. Različite funkcije društvenog izbora definirane su na različito iskazanim vrijednostima. Primjerice, preferencije dovoljne za korištenje većinskog izračuna sadrže samo informaciju o prvom kandidatu (u poretku kandidata) za svakog birača, dok je za Borda izračun potrebna informacija o punom (strogom) linearnom poretku nad svim kandidatima za svakog birača. U ovom ćemo radu koristiti proširene verzije strogih ordinalnih preferencija za sve funkcije društvenog izbora, tj. sve će funkcije društvenog izbora biti definirane nad skupom strogih linearnih poredaka svih birača. Sa $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ obilježiti ćemo skup svih *strogih linearnih poredaka* kandidata iz skupa $\mathcal{M}$. Primjerice, za skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, jedan element skupa $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ je $B \succ A \succ D \succ C$. U tom poretku, birač kao prvi izbor postavlja kandidata $B$, potom kandidata $A$, zatim kandidata $D$ i na kraju kandidata $C$. Svaki od $n$ birača generira jedan takav poredak, a skup poredaka svih birača obilježavamo s $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$. Elemente skupa $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ nazivamo *profilom* (nad danim skupom kandidata), te ih standardno obilježavamo malim grčkim slovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ itd.

Skup linearnih poredaka bez zahtjeva strogosti označavati ćemo s $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ i zvati ćemo skupom *slabih linearnih poredaka*. Prethodni primjer, poredak $B \succ A \succ D \succ C$ također predstavlja jedan element iz skupa $\mathcal{O}(\mathcal{M})$. No u skupu $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ nalazimo poretke kojih nema u skupu $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, primjerice poredak $B \succ A \approx D \succ C$. U ovom poretku birač kao prvi izbor postavlja kandidata $B$, potom slijede kandidati $A$ i $D$ koje birač jednako vrednuje, te na kraju kandidat $C$ kojeg birač vrednuje najmanje. Jasno je da vrijedi $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{M})$. Analogno strogim linearnim porecima, skup svih slabih linearnih poredaka $n$ birača označavamo s $\mathcal{O}(\mathcal{M})^n$.

Postoje i funkcije društvenog izbora definirane nad drugačijim vrstama preferencija birača poput kardinalnih preferencija nad kandidatima, ili pak odobravanjem (eng. *approval preference*) određenog podskupa skupa kandidata. No te funkcije društvenog izbora neće biti u fokusu ovog rada. Napomenimo svejedno, da je koncepte iskazane u ovom radu moguće proširiti i na te klase funkcija društvenog izbora, što ostavlja prostor za proširivanje analize i izvan okvira definiranih u ovom radu.

Funkcije društvenog izbora međusobno se ne razlikuju samo po domeni (obliku iskazanih preferencija), već često i po slici; različite funkcije mogu kao rezultat davati različite objekte. U pravilu se kod funkcija koje su definirane nad profilom (slabih ili strogih) poredaka, kao rezultat funkcije društvenog izbora dobiva slabi poredak, dakle element skupa $\mathcal{O}(\mathcal{M})$. To je rezultat činjenice da je za većinu funkcija društvenog izbora, pa čak i onih definiranih nad skupom strogih poredaka $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$, moguće dobiti rezultat u kojemu su dva (ili više kandidata) jednako vrednovani. Ponekad se i kod funkcija definiranih nad strogim linearnim porecima, formira suženje, na način da je rezultat funkcije samo pobjednik ili pobjednici izborne metode, odnosno prvoplasirani kandidat (ili više njih) u (slabom) linearnom poretku koji je rezultat funkcije društvenog izbora. Tada slika funkcija društvenog izbora predstavlja element podskupa partitivnog skupa $\mathcal{P}(M)\backslash\emptyset$.

U ovom radu prvenstveno ćemo proučavati funkcije društvenog izbora koje profilima strogih linearnih poredaka iz skupa $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ pridružuju strogi linearni poredak iz skupa $\mathcal{L}(\mathcal{M})$. U analizi ćemo vršiti restrikciju domene funkcija društvenog izbora na način da će iz nje biti izuzeti oni profili za koje funkcija društvenog izbora ne daje strogi linearni poredak kao rješenje. Na taj ćemo način izbjeći tehničko kompliciranje iskaza i dokaza koje ne pridonosi razumijevanju novih pojmova.

Slijedi definicija klasičnih funkcija društvenog izbora. Krenimo sa *Borda izračunom* (eng. *Borda count*, BC). Radi se o funkciji društvenog izbora koju je u 18. stoljeću definirao francuski matematičar Jean-Charles de Borda.

**Definicija 1.1** (Borda izračun). *Funkciju $BC : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ nazivamo* Borda izračun *i definiramo na sljedeći način: neka je $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ dani profil $n$ birača nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$, te neka su $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ preferencije (strogi linearni poreci) svakog od $n$ birača. Tada s $\alpha_{ij}$ obilježavamo $j$-tog kandidata u poretku $i$-tog birača* *danog profila $\alpha$. Za svakog kandidata $M_k \in \mathcal{M}, k = 1, ..., m$ definiramo vrijednost:*

$$(M_k)_{BC} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}(M_k) \cdot (m - j) \tag{1.1}$$

*gdje je*

$$\delta_{ij}(M_k) = \begin{cases} 1 & : \alpha_{ij} = M_k \\ 0 & : inače \end{cases}$$

*Rezultat funkcije društvenog izbora Borda izračuna $BC(\alpha)$ dan je poretkom kandidata $M_{k_1} \succeq M_{k_2} \succeq ... \succeq M_{k_m}$, takvim da za pripadne Borda izračune vrijedi $(M_{k_1})_{BC} \geq (M_{k_2})_{BC} \geq ... \geq (M_{k_m})_{BC}$.*

Neformalni opis metode znatno je jednostavniji, a ilustrirati ćemo ga sljedećim primjerom:

**Primjer 1.1.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, te neka dvadeset i jedna preferencija formira profil dan u sljedećoj tablici, u kojoj broj iznad svakog stupca predstavlja broj preferencija opisanih poretkom u tom stupcu:*

| 3 | 5 | 7 | 6 |
|---|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $D$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $D$ | $D$ | $A$ | $A$ |

*Svaka prva pozicija kandidatu donosi 3 boda, svaka druga 2 boda, a treća jedan bod, a četvrta nula bodova. Sada su Borda rezultati za kandidate jednaki $A_{BC} = 8 \cdot 3 + 13 \cdot 0 = 24$, $B_{BC} = 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 44$, $C_{BC} = 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 38$ i $D_{BC} = 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 20$. Kako je $44 > 38 > 24 > 20$, tako je pripadni rezultat Borda izračuna poredak $B \succ C \succ A \succ D$.*

**Napomena** Jednadžba (1.1) možemo promatrati kao matrični umnožak oblika $\Delta^T \cdot \vec{b}_{BC}$, gdje je matrica $\Delta_k \in \mathcal{M}_{m,n}, \Delta_k = [\delta_{ij}]$ matrica položaja kandidata $M_k$ u profilu $n$ birača pomoću vrijednosti $\delta_{ij}$ iz definicije 1.1. Vektor $\vec{b}_{BC}$ je bodovni vektor kojim definiramo broj bodova koje u izračunu donosi svako mjesto u linearnom poretku $\alpha_i$. Kod Borda izračuna vrijednost bodovnog vektora jednaka je $\vec{b}_{BC} = [m-1 \ m-2 \ ... \ 1 \ 0]^T$. Promjenom vektora $\vec{b}_{BC}$, Definicija 1.1 postaje proširenje kojim su definirani svi *pozicijski bodovni izračuni* (eng. *position score counts*).[2]

[2] *Pozicijske bodovne izračune* (*position scoring counts*) treba razlikovati od *bodovnih izračuna* (*scoring*

Drugi način da se formulira izračun je konstrukcija vektora $\vec{M_i} = [m_{i,1} \ldots m_{i,n}]^T$, $i \in \{1, ..., m\}$ pridruženih svakom kandidatu $M_i$, gdje svaka od koordinata $m_{i,j}$ označava broj osvojenih $j$-tih mjesta $i$-tog kandidata u profilu $\alpha$. Tada je Borda izračun za $k$-tog kandidata $(M_k)_{BC}$ jednak skalarnom produktu vektora $\vec{M_i}$ i $\vec{b}_{BC}$, tj. $(M_k)_{BC} = \vec{M_i} \cdot \vec{b}_{BC}$.

Sljedeća funkcija društvenog izbora koju ćemo definirati je većinski izračun (eng. *plurality count*, u oznaci PC). Većinski izračun je jedna od najviše korištenih izbornih metoda, u prvom redu zbog toga što se ulazni podaci, tj. preferencije birača, mogu reducirati s potpunog strogog linearnog poretka na izbor samo jednog kandidata, onog koji u preferenciji birača zauzima prvo mjesto. Ta je redukcija moguća zbog toga što većinski izračun prebrojava upravo broj osvojenih prvih mjesta. U praksi većinski izračun se koristi kako bi se odredio pobjednik funkcije društvenog izbora, no pobjednik izbora putem većinskog izračuna je zapravo kandidat (ili više njih) koji je plasiran na prvo mjesto u ne-strogom poretku odgovarajuće funkcije društvenog izbora, čija formalna definicija slijedi.

**Definicija 1.2** (Većinski izračun). *Funkciju* $PC : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *nazivamo* većinski izračun *i definiramo na sljedeći način: neka je* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil* $n$ *birača nad skupom kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$, *te neka su* $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ *stroge linearne preferencije svakog od* $n$ *birača. Tada s* $\alpha_{ij}$ *obilježavamo* $j$*-tog kandidata u poretku* $i$*-tog birača danog profila* $\alpha$. *Za svakog kandidata* $M_k \in \mathcal{M}, k = 1, ..., m$ *definiramo vrijednost:*

$$(M_k)_{PC} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}(M_k) \tag{1.2}$$

*gdje je*

$$\delta_{ij}(M_k) = \begin{cases} 1 & : j = 1, \alpha_{i1} = M_k \\ 0 & : \textit{inače} \end{cases}$$

*Rezultat funkcije društvenog izbora većinskog izračuna* $PC(\alpha)$ *dan je poretkom kandidata* $M_{k_1} \succeq M_{k_2} \succeq \ldots \succeq M_{k_m}$, *takvim da za pripadne većinske izračune vrijedi* $(M_{k_1})_{PC} \geq (M_{k_2})_{PC} \geq \ldots \geq (M_{k_m})_{PC}$.

*counts*). Dok je kod prvih bodovna vrijednost vezana uz poziciju, tj. kandidat u svakoj preferenciji dobiva isti broj bodova za pozicioniranje na isto mjesto u poretku preferencije, kod bodovnih izračuna birač sam određuje koliko će bodova dodijeliti određenom kandidatu u svojoj preferenciji. Ta dodjela bodova u različitim je sustavima ograničena određenim pravilima, no ključna je razlika da pozicijski bodovni izračuni spadaju u ordinalne, a bodovni izračuni u kardinalne preferencije.

**Napomena** Kao što sugerira sličnost definicija Borda i većinskog izračuna, i većinski se izračun može prikazati na drugi način: kao i kod Borda izračuna vektor $\vec{M_i} = [m_{i,1} \ ... \ m_{i,n}]^T, i \in \{1, ..., m\}$ pridružimo svakom kandidatu $M_i$, gdje svaka od koordinata $m_{i,j}$ označava broj osvojenih $j$-tih mjesta $i$-tog kandidata u profilu $\alpha$. Tada je većinski izračun za $k$-tog kandidata $(M_k)_{PC}$ jednak skalarnom produktu vektora $\vec{M_i}$ i $\vec{b}_{PC} = [1 \ 0 \ ... \ 0 \ 0]^T$, tj. $(M_k)_{PC} = \vec{M_i} \cdot \vec{b}_{PC}$. Jasno je da stoga i većinski izračun spada u klasu pozicijskih bodovnih sustava kod kojeg bodovni vektor na prvoj koordinati ima vrijednost jedan, a na svim ostalim koordinatama vrijednost nula.

Ukoliko većinski izračun primijenimo na profil iskazan u Primjeru 1.1 dobiti ćemo vrijednosti $A_{PC} = 8$, $B_{PC} = 7$, $C_{PC} = 6$ i $D_{PC} = 0$. Stoga je rezultat većinskog izračuna na tom profilu ne-strogi poredak $A \succ B \succ C \succ D$.

U istom periodu kada je Borda predstavio svoj izračun, Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat poznat i kao Nicolas de Condorcet je razvio svoj način određivanja društvene preferencije na temelju preferencija birača. Kao i kod Borda izračuna, njegova je funkcija društvenog izbora bazirana na profilu preferencija formiranih u obliku strogog linearnog poretka kandidata. No za razliku od Borda izračuna, koji "globalno" određuje međuodnose svih kandidata, Condorcetov pristup je "lokalan", tj. prvo se bavi odnosnom između (svaka) dva kandidata. Potom na temelju tih međuodnosa generira ukupni poredak kandidata, tj. rezultat funkcije društvenog izbora.

Međusoban odnos svaka dva kandidata određuje se njihovim *duelima* na danom profilu. Za svaka dva kandidata, $M_i$ i $M_j$ određuje se broj birača koji $M_i$ u svojoj preferenciji postavljaju ispred kandidata $M_j$, i obrnuto. Ukoliko je veći broj birača kandidata $M_i$ u svojoj preferenciji postavljaju ispred kandidata $M_j$, nego li broj birača koji kandidata $M_j$ u svojoj preferenciji postavljaju ispred kandidata $M_i$, tada na danom profilu vrijedi $M_i \succ M_j$, i obrnuto. Ukoliko su ti brojevi birača jednaki, vrijedi $M_i \approx M_j$. Rezultat Condorcetovog izračuna je tada ne-strogi linearni poredak kandidata koji zadovoljava međuodnose svih parova kandidata – ukoliko takav postoji. Prije nego li pređemo na primjere, navedimo formalnu definiciju Condorcetovog izračuna:

**Definicija 1.3** (Condorcetov izračun)**.** *Funkciju* $CC : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *nazivamo* Condorcetov izračun *(eng.* Condorcet count*) i definiramo na sljedeći način: neka je* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil* $n$ *glasača nad skupom kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$*, te neka su*

*$\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ preferencije svakog od $n$ birača. Tada s $\alpha_{ij}$ obilježavamo $j$-tog kandidata u poretku $i$-tog birača danog profila $\alpha$. Za kombinaciju svaka dva različita kandidata $M_{j_1}$ i $M_{j_2}$, $j_1, j_2 \in 1, ..., m$ definiramo njihov odnos na sljedeći način: ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_1,j_2} > \sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_2,j_1} \qquad \textit{tada je} \qquad M_{j_1} \succ M_{j_2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_2,j_1} > \sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_1,j_2} \qquad \textit{tada je} \qquad M_{j_2} \succ M_{j_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_2,j_1} = \sum_{i=1}^{n} \delta^i_{j_1,j_2} \qquad \textit{tada je} \qquad M_{j_2} \approx M_{j_1},$$

*gdje je*

$$\delta^i_{j_1,j_2} = \begin{cases} 1 & : M_{j_1} \succ M_{j_2} \ \textit{u preferenciji i-tog birača, } \alpha_i \\ 0 & : \textit{inače} \end{cases}$$

*Ako postoji ne-strogi linearni poredak kandidata koji zadovoljava međuodnose svih parova kandidata, tada kažemo da je taj ne-strogi linearni poredak rezultat funkcije društvenog izbora po Condorcetovoj metodi.*

Lako se može pokazati da je rezultat Condorcetovog izračuna, ukoliko isti postoji, jedinstven. Naime, za svaka dva različita ne-stroga poretka moraju postojati barem dva kandidata čiji su međusobni odnosi u tim porecima različiti. No kako su međuodnosi svaka dva kandidata definirani duelima danim u Definiciji 1.3, tako Condorcetovim izračunom ne mogu biti zadovoljena oba (različita) međuodnosa tih kandidata, te je stoga samo jedan od tih ne-strogih linearnih poredaka može biti rezultat Condorcetovog izračuna.

Primijenimo li Condorcetov postupak na profil biračkih preferencija iskazan u Primjeru 1.1, vidimo da u duelima kandidata imamo sljedeće rezultate: $A : B = 8 : 13$, $A : C = 8 : 13$, $A : D = 8 : 13$ (dakle, kandidat $A$ u duelima gubi od svih ostalih kandidata; takav kandidat se u literaturi naziva *Condorcetovim gubitnikom*), $B : C = 10 : 11$, $B : D = 21 : 0$, $C : D = 14 : 7$. Odavde vidimo da kandidat $C$ u duelima pobjeđuje sve ostale kandidate, da kandidat $B$ pobjeđuje sve kandidate osim kandidata $C$, te da kandidat $D$ pobjeđuje kandidata $A$, što inducira linearni poredak $C \succ B \succ D \succ A$.

Na Primjeru 1.1 vidjeli smo kako sve tri funkcije društvenog izbora generiraju različitog pobjednika: Po Borda izračunu pobjednik izbora na danom profilu je kandidat $B$, po Condorcetovom izračunu kandidat $C$, a po većinskom izračunu kandidat $A$. U opisivanju razlika između spomenutih metoda, u literaturi se upravo Borda izračun opisuje kao metoda koja za pobjednika generira *kompromisnog* kandidata.[39] No pri tome se ne definira jasno što bi kompromis trebao biti, već se opis zaustavlja na neodređenoj tezi, koja se tek ponekad dodatno pojašnjava na način da se kandidat kojega veliki broj birača smješta na dno svoje preferencije ističe kao kandidat koji ne može predstavljati društveni kompromis (a to su u Primjeru 1.1 kandidatu $A$ i $D$).

U Definicijama 1.1, 1.2 i 1.3 dali smo formalnu definiciju tri funkcije društvenog izbora koje će biti od posebne važnosti za ovaj rad. No tu se lista funkcija društvenog izbora ne iscrpljuje. Od značajnijih metoda istaknimo još sljedeće:

**Dvokružni većinski izračun** je metoda koja nadopunjuje većinski izračun, na način da u prvom krugu eliminira sve osim dva kandidata sa najvećim brojem prvih mjesta u preferencijama birača. Nakon toga se u drugom krugu (na istom profilu) formira duel između dva prvoplasirana kandidata. Pobjednik metode je kandidat koji postigne bolji rezultat u tom duelu.

Treba istaknuti da ovako definirana metoda ne producira (ne-strogi) linearni poredak kao rezultat društvenog izbora, već samo pobjednika. Metoda je formulirana kao odgovor na neke od najčešćih kritika koje su upućivane većinskom izračunu, poput one da se u obzir prilikom izračuna ne uzima nikakva dodatna informacija osim one o prvom mjestu u preferenciji. Dok su kod većinske metode preferencije koje na prvom mjestu nemaju jednog od najbolja dva kandidata u potpunosti ignorirane, kod dvokružnog većinskog izračuna, te preferencije utječu na konačan rezultat. U Primjeru 1.1, nakon većinskog izračuna ostaju dva kandidata sa najvećim brojem prvim mjesta: kandidat $A$ (s 8 prvih pozicija) i kandidat $B$ (sa 7 prvih pozicija). Potom u duelu ta dva kandidata pobjeđuje kandidat $B$ s omjerom 13:8.

Jedna od nepoželjnih karakteristika Condorcetovog izračuna je ta da na mnogim profilima ne daje rezultat. Naime, relativno je lako konstruirati profil preferencija koji generira rezultate duela između kandidata koji nisu tranzitivni. Stoga i ne čudi kako je vremenom formirano dosta metoda koje izabiru Condorcetovog pobjednika ukoliko on postoji, no isto tako odlučuju o pobjedniku i na mnogim profilima koji ne generiraju Condorcetovog pobjednika (u tzv. Condorcetovim paradoksima). Ovdje ćemo navesti tri takva najistaknutija modela.[11]

**Kemenyjeva metoda** se, za ovaj rad, ističe kao najznačajnija od Condorcetovih metoda. [18, 19] Važnost ove metode se nalazi u tome da je upravo Kemenyjeva metoda isticana kao metoda čiji je rezultat preferencija koja najbolje predstavlja kompromis [11]. Metoda se provodi tako da se prvo odrede vrijednosti svih međusobnih duela kandidata, koji se uobičajeno pohrane u tablicu (vidi Primjer 1.2). Potom se za svaki mogući poredak kandidata računa zbroj svih vrijednosti duela kandidata u duelima koje taj poredak generira. Rezultat Kemenyjeve metode je ona preferencija čiji je izračun najveći.

**Primjer 1.2.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E\}$, te neka petnaest preferencija formira sljedeći profil:*

| 4 | 5 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $E$ | $E$ |
| $B$ | $D$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $D$ | $C$ |
| $D$ | $E$ | $B$ | $D$ |
| $E$ | $A$ | $C$ | $A$ |

*Duele kandidata možemo prikazati u obliku sljedeće tablice:*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | – | 9 | 9 | 9 | 4 |
| $B$ | 6 | – | 10 | 5 | 9 |
| $C$ | 6 | 5 | – | 10 | 9 |
| $D$ | 6 | 10 | 5 | – | 9 |
| $E$ | 11 | 6 | 6 | 6 | – |

*Promotrimo sada preferenciju $A \succ B \succ C \succ D \succ E$. Ona generira deset odnosa između kandidata: $A \succ B$ (9 birača), $A \succ C$ (9), $A \succ D$ (9), $A \succ E$ (4), potom $B \succ C$ (10), $B \succ D$ (5), $B \succ E$ (9), te $C \succ D$ (10), $C \succ E$ (9) i $D \succ E$ (9). Tako je Kemenyjev zbroj za preferenciju $A \succ B \succ C \succ D \succ E$ (zbroj birača koji podržavaju međuodnose kandidata generiranih tom preferencijom) jednak 83. Na isti način izračunamo Kemenyjev zbroj za sve ostale preferencije, te izaberemo onu sa najvećim zbrojem. U ovom slučaju to je upravo preferencija $A \succ B \succ C \succ D \succ E$.*

Već iz ovog primjera se vidi kako je izračun Kemenyjeve računski zahtjevan (budući vrši usporedbu Kemenyjevog izračuna po svim mogućim preferencijama), te je štoviše NP-izračunljiva. [7] Iako je metoda podložna jednom broju paradoksa teorije društvenog izbora,[3] metoda je za ovaj rad važna zbog svoje konstrukcije, kroz uspoređivanje određenih vrijednosti pripisanih svim mogućim strogim linearnim porecima, o čemu će više riječi biti kasnije.

**Minimaks izračun** je također metoda koja bira Condorcetovog pobjednika ukoliko isti postoji. U slučaju da na zadanom profilu ne postoji Condorcetov pobjednik, tada metoda izabire kandidata čija je maksimalna vrijednost duela u kojemu on gubi najmanja među svim kandidatima. Metoda se u literaturi još naziva i Simpson–Kramerovom metodom. Ilustrirajmo metodu na sljedećem primjeru.

**Primjer 1.3.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, te neka trideset i pet preferencija formira sljedeći profil:*

| 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $D$ | $C$ | $D$ | $B$ | $D$ | $C$ | $B$ | $B$ | $C$ | $A$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $B$ | $A$ | $D$ | $A$ | $D$ | $A$ | $D$ | $B$ |
| $C$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $A$ | $C$ | $A$ | $B$ | $B$ | $A$ |
| $D$ | $B$ | $D$ | $A$ | $D$ | $C$ | $B$ | $D$ | $C$ | $D$ | $C$ | $D$ |

*Duele kandidata možemo prikazati u obliku sljedeće tablice:*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | – | 23 | 12 | 18 |
| $B$ | 12 | – | 21 | 18 |
| $C$ | 23 | 14 | – | 18 |
| $D$ | 17 | 17 | 17 | – |

*Odavde čitamo da je npr.* $A : B = 23 : 12$*, te da kandidat $D$ gubi sve duele omjerom* $18 : 17$*. Dueli kandidata induciraju sljedeće odnose:*

$$[A \succ B \succ C \succ A] \succ D$$

[3]Kemenyjev izračun je podložan paradoksu učvršćenja, "*no-show*" paradoksu, paradoksu blizanaca, te paradoksu skraćivanja. Više informacija nalazi se u [11].

*Jasno je kako kandidati $A$, $B$ i $C$ zatvaraju Condorcetov ciklus (tzv.* gornji ciklus*), pa stoga nema Condorcetovog pobjednika, no i kako je kandidat $D$ Condorcetov gubitnik (svi ga pobjeđuju u duelima), ali i apsolutni gubitnik (rangiran je na posljednje mjesto u većini profila). No upravo kandidata $D$ Minimaks izračun izabire za pobjednika, zbog toga što je najveća vrijednost u stupcu $D$ (koja je jednaka 18) manja od svih ostalih najvećih vrijednosti u stupcima $A$, $B$ i $C$. Upravo ovaj tip profila se koristi i kao kritika Minimaks izračuna.*[4]

Istaknimo još kako za profil iz Primjera 1.2, Minimaks metoda kao rezultat daje preferenciju $E \succ B \approx C \approx D \succ A$. Dakle, prvoplasiranog kandidata po Kemenyjevoj metodi Minimaks metoda smješta na posljednje mjesto i obrnuto.

**Dodgsonova metoda** je posljednja od značajnijih metoda koju ćemo opisati, a koje izabiru Condorcetovog pobjednika (ukoliko isti postoji). Ova metoda za pobjednika izabire kandidata, za kojega je potrebno provesti najmanji broj zamjena mjesta u preferencijama profila kako bi taj kandidat postao Condorcetov pobjednik. Metodu ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

**Primjer 1.4.** *Kao primjer za Dodgsonovu metodu ćemo iskoristiti profil preferencija iz Primjera 1.3, koji generira sljedeće međuodnose kandidata:*

$$[A \succ B \succ C \succ A] \succ D,$$

*i tablicu duela:*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | – | 23 | 12 | 18 |
| $B$ | 12 | – | 21 | 18 |
| $C$ | 23 | 14 | – | 18 |
| $D$ | 17 | 17 | 17 | – |

*Jasno je kako kandidati $A$, $B$ i $C$ zatvaraju Condorcetov ciklus (tzv.* gornji ciklus*), pa stoga nema Condorcetovog pobjednika, no i kako je kandidat $D$ Condorcetov gubitnik (svi ga pobjeđuju u duelima), ali i apsolutni gubitnik (rangiran je na posljednje mjesto u većini profila).*

[4]Navedeni primjer pokazuje kako Minimaks izračun omogućava "*no-show*" paradoks i paradoks blizanaca, no ta tema izlazi iz okvira ovog rada, pa se čitatelju preporuča daljnja literatura.[11]

*Iz tablice međusobnih duela, jasno je kako kandidat D treba popraviti samo tri preferencije (sedmi, deveti i jedanaesti stupac u profilu) zamjenom mjesta s prvoplasiranim kandidatom. Nakon te tri zamjene, kandidat D pobjeđuje sve ostale kandidate u duelima omjerom* $18 : 17$*. To je ujedno i najmanji broj zamjena nakon kojih neki od kandidata postaje Condorcetov pobjednik, te je stoga kandidat D pobjednik po Dodgsonovoj metodi, što je mana koju metoda dijeli s Minimaks metodom.*

Dodgson je bio svjestan tog problema, [26] te je u skup kandidata za pobjednika svrstavao samo kandidate iz gornjeg Condorcetovog ciklusa. Ukoliko u Primjeru 1.4 skup mogućih pobjednika reduciramo izbacivanjem kandidata $D$, dani profil prelazi u

| 10 | 13 | 9 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $B$ | $B$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $C$ | $A$ |

Na tako dobivenom profilu.[5] Dodgsonov pobjednik je kandidat $C$.

Obje, Kemenyjeva i Dodgsonova metoda vezane su uz pojam **Kendallove tau udaljenosti**. Radi se o mjeri udaljenosti između preferencija koja prebrojava parove kandidata suprotnih redoslijeda u dvijema preferencijama [20]. Kendallova mjera se u literaturi često naziva i *"bubble-sort"* mjerom budući je ekvivalentna broju zamjena susjednih kandidata koje je potrebno obaviti kako bi iz jedne preferencije dobili drugu. Dodgsonova metoda se može promatrati kao metoda koja traži najbliži (u smislu Kendallove tau mjere) profil sa Condorcetovim pobjednikom. S druge strane Kemenyjeva metoda traži (pobjedničku) preferenciju koja minimizira sumu Kendallovih tau udaljenosti te preferencije i svih preferencija iz zadanog profila.

## 1.3 Aksiomi teorije društvenog izbora

U ovom ćemo poglavlju formalno definirati važnije aksiome teorije društvenog izbora.

[5] Treba istaknuti kako redukcija kandidata za pobjednika na gornji Condorcetov ciklus ne pojavljuje često u literaturi, te je većina svojstava metode u literaturi navedena za metodu bez redukcije skupa kandidata pobjednika [11].

Jedan od temeljnih aksioma teorije društvenog izbora jest aksiom *anonimnosti*. Za funkciju društvenog izbora se kaže da je anonimna kada simetrično tretira sve birače – ukoliko dva birača zamijene svoje preferencije, rezultat funkcije društvenog izbora ostaje isti. Za anonimne funkcije društvenog izbora često se kaže i da "*ne ovise o imenima birača*". Jasno je, primjerice, da diktatorska funkcija društvenog izbora (čiji je rezultat jednak preferenciji jednog, unaprijed poznatog birača) nije anonimna. Slijedi formalna definicija:

**Definicija 1.4** (Aksiom anonimnosti)**.** *Neka je* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil birača iz skupa* $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = n$, *nad skupom od* $m$ *kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$. *Neka su* $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ *preferencije svakog od* $n$ *birača. Za funkciju društvenog izbora* $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *kažemo da je* anonimna *ukoliko vrijedi*

$$F(\alpha) = F(\alpha'),$$

*gdje je profil* $\alpha' = (\alpha_{\xi(1)}, \alpha_{\xi(2)}, ..., \alpha_{\xi(n)}) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dobiven pomoću permutacije* $\xi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

Sljedeći temeljni aksiom teorije društvenog izbora je aksiom *neutralnosti*. Za funkciju društvenog izbora kažemo da je neutralna ukoliko su sve alternative (kandidati) tretirani simetrično – ukoliko se u svim preferencijama zamijene mjesta dva kandidata, tada će ti kandidati biti zamijenjeni i u rezultatu neutralne funkcije društvenog izbora.

**Definicija 1.5** (Aksiom neutralnosti)**.** *Neka je* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil birača iz skupa* $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = n$, *nad skupom od* $m$ *kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$, *gdje su* $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ *preferencije svakog od* $n$ *birača. Za funkciju društvenog izbora* $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *kažemo da je* neutralna *ukoliko vrijedi*

$$F(\xi(\alpha)) = \xi(F(\alpha)),$$

*gdje je* $\xi : M \to M$ *neka permutacija skupa kandidata.*

Oba navedena aksioma predstavljaju minimalni zahtjev kojeg svaka demokratska funkcija društvenog izbora treba zadovoljavati. No takva klasa funkcija društvenog izbora je izuzetno široka, i malo nam govori o samoj strukturi procesa formiranja društvenog izbora. Slijedi nekoliko aksioma društvenog izbora koji se u različitim kontekstima smatraju važnima, iako ih neke od njih ne zadovoljavaju određene klasične funkcije društvenog izbora.

Sljedeći aksiom funkcija društvenog izbora je aksiom monotonosti.[6] Osnovna ideja monotonosti jest ta da pozicioniranju kandidata u rezultatu funkcije društvenog izbora ne može štetiti ukoliko napreduje u nekoj preferenciji u profilu. Tu je ideju moguće formulirati na više načina. Na ovom ćemo mjestu navesti dvije formulacije: slabu i jaku monotonost, obzirom na poziciju promatranog kandidata.

**Definicija 1.6** (Slaba monotonost)**.** *Neka je* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil birača iz skupa* $\mathcal{N}$*,* $|\mathcal{N}| = n$*, nad skupom od* $m$ *kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$*, gdje su* $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ *preferencije svakog od* $n$ *birača. Neka je kandidat* $M_i$ *prvoplasiran u preferenciji* $F(\alpha)$*, gdje je* $F$ *funkcija društvenog izbora* $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$*.*

*Neka je profil* $\alpha'$ *dobiven iz profila* $\alpha$ *na način da je kandidat* $M_i$ *zamijenio mjesto u jednoj preferenciji s nekim više plasiranim kandidatom, dok su pozicije svih ostalih kandidata u toj preferenciji, kao i sve ostale preferencije, ostali isti. Za funkciju društvenog izbora* $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *kažemo da je* (slabo) monotona *ukoliko je kandidat* $M_i$ *prvoplasiran u preferenciji* $F(\alpha')$*.*

Za razliku od slabe monotonosti, kod jake monotonosti zahtjev prema funkciji društvenog izbora je veći: tražimo da funkcija društvenog izbora ne pozicionira promatranog kandidata na niže mjesto ukoliko taj kandidat (na bilo koji način) napreduje u jednoj preferenciji.

**Definicija 1.7** (Jaka monotonost)**.** *Neka je* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *dani profil birača iz skupa* $\mathcal{N}$*,* $|\mathcal{N}| = n$*, nad skupom od* $m$ *kandidata* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$*, gdje su* $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ *preferencije svakog od* $n$ *birača. Neka je profil* $\alpha'$ *dobiven iz profila* $\alpha$ *na način da je kandidat* $M_i$ *napredovao jednoj preferenciji profila* $\alpha$*, dok su sve ostale preferencije profila* $\alpha$ *ostale iste. Za funkciju društvenog izbora* $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ *kažemo da je* jako monotona *ako pozicija kandidata* $M_i$ *u preferenciji* $F(\alpha')$ *nije niža nego li u preferenciji* $F(\alpha)$*.*

Jasno je da funkcija društvenog izbora koja je jako monotona, ujedno i slabo monotona. Naime, ako je funkcija jako monotona, tada pozicija kandidata $M_i$ u $F(\alpha')$ nije niža nego

[6] Za monotonu funkciju društvenog izbora se u literaturi često kaže i da je *"positively responsive"*, dok se za funkciju društvenog izbora koja nije monotona zna koristiti i izraz *"negatively responsive"*.

li u $F(\alpha)$. S druge strane, funkcija će biti slabo monotona, ukoliko taj isti kandidat $M_i$ ne izgubi prvu poziciju prelaskom s profila $\alpha$ na profil $\alpha'$, što se ne može dogoditi zbog jake monotonosti. No obrat te tvrdnje ne vrijedi; ukoliko je funkcija slabo monotona, ona ne mora biti i jako monotona. Pod nazivom monotonosti u literaturi najčešće nalazimo svojstvo slabe monotonosti.

Iako zahtjev monotonosti djeluje prirodno i lako ispunjivo, nisu sve klasične funkcije društvenog izbora monotone. Među funkcijama koje smo opisali u ovom radu, nemonotone su funkcije Dvokružni većinski izračun i Dodgsonova metoda. Među ostalim nemonotonim funkcijama društvenog izbora spomenimo još Izračun Alternativa (eng. *Alternative Vote*), Coombsovu metodu i Nansonov izračun.[11]

Jedan od temeljnih aksioma teorije društvenog izbora je Paretov aksiom. Za funkciju koja zadovoljava Paretov aksiom često se kaže da je *Pareto učinkovita* (eng. *Pareto efficient*).[7]

**Definicija 1.8** (Pareto učinkovitost)**.** *Neka je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ dani profil birača iz skupa $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = n$, nad skupom od $m$ kandidata $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$, gdje su $\alpha_i, i \in \{1, ...n\}$ preferencije svakog od $n$ birača. Ako za neka dva kandidata $M_i$ i $M_j$ na profilu $\alpha$ vrijedi $M_i \succ M_j$ u svakoj preferenciji tog profila, tada je funkcija društvenog izbora $F : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to$* Pareto učinkovita *ukoliko vrijedi $M_i \succ M_j$ i u preferenciji $F(\alpha)$.*

Paretov aksiom pred funkcije društvenog izbora stavlja jednostavan zadatak: ukoliko je na profilu jedan kandidat pozicioniran ispred drugog kandidata u preferencijama *svih* birača, tada taj kandidat mora biti pozicioniran ispred drugog kandidata i u preferenciji koja je rezultat funkcije društvenog izbora. Pa ipak, među klasičnim funkcijama društvenog izbora nalazimo i takve koje nisu Pareto učinkovite: Izbor odobravanjem (eng. *Approval voting*), Metoda uzastopnog uklanjanja (eng. *Successive elimination method*), te jednu od Condorcetovih metoda, Schwartzov izračun. [6, 11]

**Definicija 1.9** (Učvršćenje)**.** *Neka su $\alpha_1$ i $\alpha_2$ dva disjunktna skupa preferencija (profila), te neka je $W_1$ skup pobjednika funkcije društvenog izbora nad profilom preferencija $\alpha_1$, a $W_2$ skup pobjednika funkcije društvenog izbora nad profilom preferencija $\alpha_2$. Za funkciju*

[7] Iskazana definicija Pareto učinkovitosti u literaturi se ponekad naziva i *slabom* Pareto učinkovitošću. *Jaka* Pareto učinkovitost tada se iskazuje za funkcije društvenog izbora koje su definirane nad $\mathcal{O}(\mathcal{M})^n$, tj. profilima koji se sastoje od ne-strogih preferencija.

*društvenog izbora kažemo da zadovoljava uvjet* učvršćenja *ako kada postoji barem jedan kandidat koji se nalazi i u skupu* $W_1 \cap W_2$*, tada je skup pobjednika nad profilom preferencija* $\alpha_1 \cup \alpha_2$ *jednak presjeku skupova* $W_1 \cap W_2$*.*

Svojstvo ili aksiom *učvršćenja* (end. *reinforcement*) iz Definicije 1.9 od funkcije društvenog izbora traži da ukoliko na dva skupa preferencija bira nekog kandidata za pobjednika, tada će tog kandidata birati, *ceteris paribus*,[8] i na uniji tih skupova preferencija. Aksiom učvršćenja u literaturi se zna nazivati i *aksiomom više izbornih okruga* (eng. *multiple district axiom*). Pomalo je iznenađujuće kako mnoge funkcije društvenog izbora ne zadovoljavaju aksiom učvršćenja. Između ostalih spomenimo sve Condorcetove metode, Coombsova i Bucklinova metoda, dvokružni većinski izračun, te metodu uzastopnog uklanjanja. [11]

**Definicija 1.10** (Neprekidnost)**.** *Pretpostavimo da funkcija društvenog izbora nad profilom preferencija* $\alpha_1$ *kao pobjednika izabire kandidata* $A$*, a da nad profilom preferencija* $\alpha_2$ *(koji je disjunktan profilu* $\alpha_1$*) kao pobjednika izabire kandidata* $B$*. Za funkciju društvenog izbora kažemo da zadovoljava aksiom* neprekidnosti *ako postoji neki prirodan broj* $m$ *takav da na profilu kojeg čine* $m$ *kopija preferencija* $\alpha_1$ *i preferencije* $\alpha_2$*, pobjeđuje kandidat* $A$*.*

Aksiom *neprekidnosti* (eng. *continuity*) rijetko se u literaturi ističe kao poseban aksiom, no mi ga navodimo na ovom mjestu zbog Youngove karakterizacija koje ćemo koristiti kasnije u radu. Neprekidnost, kako je definirana u Definiciji 1.10 opisuje asimptotsko ponašanje funkcije društvenog izbora, odnosno osigurava da se funkcija "dobro" ponaša u slučaju značajne dominacije određenog pod profila (ili preferencije).[9]

**Definicija 1.11** (Nezavisnost od nevažnih alternativa)**.** *Za funkciju društvenog izbora kažemo da zadovoljava aksiom* nezavisnosti od nevažnih alternativa *(IIA), ukoliko međusobni poredak dva kandidata u rezultatu funkcije društvenog izbora ovisi jedino o međusobnim porecima ta dva kandidata u preferencijama zadanog profila.*

Nezavisnost od nevažnih alternativa (eng. *Independence of irrelevant alternatives*, IIA) jedan je od najpoznatijih, i vjerojatno najosporavanijih aksioma teorije društvenog izbora.

[8] *Ceteris paribus* je načelo koje se klasično upotrebljava u ekonomskim i informacijskim znanostima. Načelo govori kako se problem analizira uz pretpostavku da sve promatrane varijable (ili okolnosti) osim eventualno neke izdvojene, ostaju nepromijenjene. U ovom slučaju, načelom se naglašava kako preferencije prilikom objedinjavanja u uniju ostaju iste.

[9] Ovako definiranu neprekidnost treba razlikovati od svojstva neprekidnosti (također *continuity*) koju definira i koristi Chichilnisky, [16] gdje se na pojam neprekidnosti gleda iz perspektive srodne matematičkoj analizi: male promjene argumenta (profila) funkcije društvenog izbora moraju rezultirati malim promjenama u rezultatu.

Aksiom je formulirao Arrow,[10] te ga je iskoristio u svom poznatom Teoremu nemogućnosti (eng. *Arrow's impossibility theorem*). [1] Smisao aksioma nezavisnosti od nevažnih alternativa je jasna – na međusobni odnos dva kandidata u rezultatu funkcije društvenog izbora trebaju utjecati samo odnosi ta dva kandidata na promatranom profilu preferencija. Ostali kandidati ("nevažne alternative") ne bi na taj odnos trebali imati utjecaja.

Aksiom je kroz vrijeme bio meta mnogih kritika, od kojih je najčešća ta da je teško ispunjiv, tj. da ga zadovoljava mali broj funkcija društvenog izbora. Tu kritiku najbolje ilustrira sljedeći primjer.

**Primjer 1.5.** *Neka je skup kandidata* $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$*, te neka dvadeset preferencija formira sljedeći profil:*

| 5 | 8 | 7 |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $A$ | $B$ |

*Bez obzira kojeg kandidata funkcija društvenog izbora proglasila pobjednikom na danom profilu, ta će funkcija kršiti aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa.*

*Naime, ukoliko funkcija društvenog izbora pobjednikom proglasi kandidata* $A$*, aksiom je narušen budući kandidat* $A$ *gubi u duelu od kandidata* $C$ *omjerom 15:5, što znači da je na plasman kandidata* $A$ *ispred kandidata* $C$ *utjecala "nevažna alternativa", odnosno pozicija kandidata* $B$*. Ukoliko pobjednikom bude proglašen kandidat* $B$*, aksiom je narušen budući* $B$ *gubi duel s kandidatom* $A$ *omjerom 12:8. Ukoliko je pak pobjednikom proglašen kandidat* $C$*, aksiom je narušen jer* $C$ *gubi duel od* $B$ *omjerom 13:7.*

Vremenom su se pojavile razne verzije oslabljivanja uvjeta propisanih aksiomom nezavisnosti od nevažnih alternativa, no ovdje ćemo (zbog važnosti za ovaj rad) istaknuti varijantu koju je formulirao Saari. Osnova Saarijeve kritike se nalazi u činjenici da IIA ignorira način na koji je jedan kandidat pozicioniran ispred drugoga, odnosno *intenzitet* poretka u profilu.[28, 29] Primjerice, kada se u svjetlu IIA promatra odnos kandidata $A$ i $B$, tada sljedeće dvije preferencije u profilu vrednuju jednako: preferencija $A \succ B \succ C \succ D \succ E$ i preferencija $A \succ C \succ D \succ E \succ B$; u obje preferencije kandidat $A$ se nalazi ispred kandidata $B$, te se u svjetlu zadovoljavanja IIA obje preferencije jednako broje.

[10] U Definiciji 1.11 navodimo upravo Arrovljevu formulaciju aksioma, koji obzirom na kontekst u kojemu ga se koristi zna biti naveden u nekoliko varijanti.

Saari ističe kako je ipak potrebno napraviti razliku između te dvije preferencije: u prvoj preferenciji je kandidat $B$ smješten odmah nakon kandidata $A$, dok je u drugoj preferenciji između kandidata $A$ i $B$ pozicionirano još tri kandidata. Prema Saariju, te dvije preferencije karakterizira to da se kandidat $A$ nalazi ispred kandidata $B$, ali i *intenzitet* njihovog međuodnosa; u prvoj preferenciji taj je intenzitet jednak nula (između $A$ i $B$ ne postoje drugi kandidati), a u drugoj preferenciji taj je intenzitet jednak tri (između $A$ i $B$ se nalazi tri kandidata).

**Definicija 1.12** (Nezavisnost od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet)**.** *Za funkciju društvenog izbora kažemo da zadovoljava aksiom* nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet *(IIIA),*[11] *ako međusobni poredak dva kandidata u rezultatu funkcije društvenog izbora ovisi jedino o međusobnim porecima ta dva kandidata u preferencijama zadanog profila i intenzitetu tog poretka.*

Tako, ukoliko u Primjeru 1.5 međuodnosu kandidata pribrojimo i intenzitet tog međuodnosa (svaku preferenciju dodatno brojimo onoliko puta koliki je intenzitet između dvije pozicije kandidata), dobivamo sljedeće odnose: $A : B = 12 : 16$, $A : C = 10 : 15$, te $B : C = 13 : 14$. Takvi odnosi kandidata generiraju poredak $C \succ B \succ A$.

## 1.4 Istraživačka pitanja i ciljevi

Na temelju iznesenog pregleda do sada provedenih istraživanja u okviru teorije društvenog izbora, kao glavni cilj ovog rada postavljen je formalizacija matematičkog modela za pojam kompromisa. Kao pod ciljevi, pomoću kojih ćemo realizirati glavni cilj istraživanja navodimo sljedeće:

**C1** Modelirati mjeru kompromisa na profilima ordinalnih preferencija agenata.

**C2** Analizirati svojstva koja prema mjeri (iz C1) imaju etablirane funkcije društvenog odabira (Borda izračun, većinski izračun, Condorcetova metoda).

**C3** Ispitati mogu li se preko optimizacije kompromisa definirati nove funkcije društvenog odabira.

[11] eng. *Intensity independence of irrelevant alternatives*

**C4** Izrada programske podrške za računanje mjere kompromisa uz implementaciju etabliranih funkcija društvenog odabira i novih funkcija odabira definiranih u ovom radu.

U svrhu postizanja postavljenih ciljeva, postavljena su i istraživačka pitanja na koja ovim radom želimo pružiti odgovor:

**IP1** Pod kojim je uvjetima jednostavna funkcija društvenog odabira koja proizlazi iz (naivne) optimizacije mjere kompromisa ekvivalentna već postojećim funkcijama društvenog odabira?

**IP2** Koje aksiome teorije funkcija društvenog odabira zadovoljava funkcija koja proizlazi iz pohlepne optimizacije mjere kompromisa?

**IP3** Koje aksiome teorije funkcija društvenog odabira zadovoljava funkcija koja proizlazi iz potpune optimizacije mjere kompromisa?

U drugom poglavlju ovog rada, "*d-Mjera odmaka od kompromisa*" tako ostvarujemo istraživački cilj C1, dok u trećem poglavlju, "*Funkcije društvenog izbora d-mjere odmaka*" ostvarujemo ciljeve C2 i C3. U istom poglavlju odgovaramo i na postavljena istraživačka pitanja I1-I3.

Kao alat potreban za ostvarivanje navedenih ciljeva, te odgovaranje na postavljena istraživačka pitanja, koristit ćemo programska rješenja za računanje $d$-mjere kompromisa, kao i za računanje rezultata proučavanih funkcija društvenog izbora. Navedena programska rješenja izvedena su u programskom paketu "*Wolfram Mathematica*" te su detaljno opisana u Dodatku A (vidi stranicu 151).

Također, programska rješenja korištena u izradi ovog rada moguće je preuzeti putem platforme *Github* na sljedećoj adresi: https://github.com/hatzivelkos/socho

# Poglavlje 2

# d-Mjera odmaka od kompromisa

## 2.1 Motivacija za analizu pojma kompromisa

Kako bi opisali pristup pojmu kompromisa, promotrimo prvo temeljni primjer na kojemu se najjasnije (i bez dodatnih informacijskih šumova) očitava problematika kompromisnog izbora.

**Primjer 2.1.** *Neka je sljedećom tablicom dan profil preferencija stotinu birača između tri kandidata, A, B i C:*

| 51 | 49 |
|---|---|
| $A$ | $C$ |
| $B$ | $B$ |
| $C$ | $A$ |

*Na ovom profilu sve klasične funkcije društvenog izbora generiraju društvenu preferenciju u kojoj je pobjednik kandidat A. Prema Borda izračunu, kandidat A pobjeđuje sa* 102 *boda (ispred kandidata B sa* 100 *bodova i kandidata C sa* 98 *bodova). Condorcetova metoda također daje kandidata A kao pobjednika (budući u duelima pobjeđuje druga dva kandidata rezultatom 51:49). Po većinskom izračunu pobjednik je također kandidat A sa* 51 *plasmanom na prvu poziciju (naprema* 49 *koliko ostvaruje kandidat C).*

No, temeljna pitanja koja želimo postaviti u ovom radu jesu: "*Može li se kandidat A, kao kandidat kojega* 49% *smatra najgorim izborom, smatrati kompromisnim pobjednikom?*" te "*Nije li kandidat B na danom profilu primjereniji izbor za kompromisnog pobjednika?*".

Naravno, odgovor na prvo pitanje može biti potvrdan, a na drugo niječan, tj. moguće je usvojiti stajalište da poimanje pojma kompromisa o pobjedniku nije dovedeno u pitanje ovim primjerom. No u ovom radu ćemo pažnju posvetiti implikacijama koje slijede iz negativnog odgovora na prvo pitanje.

Neprihvaćanje kandidata $A$ kao kompromisnog pobjednika na profilu iz Primjera 2.1 temelji se na tome da upravo tog kandidata velik dio birača smatra najgorim izborom. Za razliku od kandidata $A$, kandidat $B$ se može prihvatiti kao kompromisni pobjednik, iako ga niti jedan birač ne pozicionira na prvo mjesto u svojoj preferenciji, upravo zbog toga što ga niti jedan birač ne pozicionira niti na posljednje mjesto. Cilj je, dakle, pronaći matematički mehanizam kojim bi se istaknuo negativan utjecaj veće udaljenosti od pobjedničke pozicije.

Ukoliko bi za svakog kandidata jednostavno zbrojili udaljenosti pozicija u preferencijama birača od prve pozicije (s ciljem minimizacije takve sume), lako se može pokazati da bi minimiziranje takvih suma generiralo poredak kandidata koji je ekvivalentan poretku kojeg generira Borda izračun. Štoviše, takvo zbrajanje udaljenosti između pozicije na profilu i prvog mjesta ne bi riješilo problem koji smo postavili - kandidat $A$ bi imao manju sumu takvih udaljenosti $(49 \cdot 2 = 98)$ od kandidata $B$ $(100 \cdot 1 = 100)$.

No situacija se mijenja ukoliko dane udaljenosti prije zbrajanja potenciramo nekom potencijom $d > 1$. Na taj način, svaka udaljenost od prvog mjesta u preferenciji bi sumi doprinijela više od svog linearnog doprinosa. U tom slučaju suma takvih potenciranih udaljenosti za kandidata $A$ bi iznosila $49 \cdot 2^d$, a za kandidata $B$ $100 \cdot 1^d = 100$. Lako je vidjeti da bi tada za $d > \log_2 \frac{100}{49}$ takva suma za kandidata $A$ postala veća od sume za kandidata $B$. Kod većeg broja kandidata, pozicioniranje na posljednje mjesto u preferenciji nekog birača još bi više povećavalo opisanu sumu odmaka od prve pozicije, čime bi se minimizacijom sume još jače naglašavao pojam kompromisa.

Koncept se lako poopćuje na mjeru udaljenosti, ne samo od prve, već općenito od $j$-te pozicije: za svakoga kandidata zbrojimo po svim preferencijama birača, (apsolutnu) udaljenost između pozicije u preferenciji i $j$-te pozicije, dignutu na potenciju $d > 1$. Upravo je taj koncept formaliziran u sljedećoj definiciji:

**Definicija 2.1.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$ skup od $m$ kandidata, te neka je sa $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ dan profil $n$ birača nad tim kandidatima. Tada* ***$d$-mjeru odmaka kandidata***

*$M_k$ **od $j$-te pozicije**, u oznaci $\beta_j^d(M_k)$ definiramo kao*

$$\beta_j^d(M_k) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i(M_k) - j|^d \tag{2.1}$$

*gdje je s $\alpha_i(M_k)$ označena pozicija na kojoj se u preferenciji $i$-tog birača nalazi kandidat $M_k$, dok je parametar $d \in \mathbb{R}$, $d > 1$ neki realni broj.*
*Kad želimo naglasiti da se radi o d-mjeri odmaka na profilu $\alpha$ koristimo oznaku $\beta_j^d(M_k, \alpha)$.*

Promotrimo kako se kreću $d$-mjere odmaka kandidata $A$, $B$ i $C$ (od sve tri pozicije) na profilu danom u Primjeru 2.1 za $d = 2$:

**Primjer 2.2.** *Neka je sljedećom tablicom dan profil $\alpha_0$ preferencija stotinu birača nad tri kandidata, $A$, $B$ i $C$:*

| 51 | 49 |
|---|---|
| $A$ | $C$ |
| $B$ | $B$ |
| $C$ | $A$ |

Sada je redom: 2-mjera odmaka kandidata A od prvog mjesta jednaka $\beta_1^2(A) = 51 \cdot |1-1|^2 + 49 \cdot |3-1|^2 = 196$; 2-mjera odmaka kandidata A od drugog mjesta jednaka $\beta_2^2(A) = 51 \cdot |1-2|^2 + 49 \cdot |3-2|^2 = 100$; 2-mjera odmaka kandidata A od trećeg mjesta jednaka $\beta_3^2(A) = 51 \cdot |1-3|^2 + 49 \cdot |3-3|^2 = 204$.
Na isti način dobivamo 2-mjere odmaka od $j$-tog mjesta za preostala dva kandidata: $\beta_1^2(B) = 100$, $\beta_2^2(B) = 0$, $\beta_3^2(B) = 100$, te $\beta_1^2(C) = 204$, $\beta_2^2(C) = 100$ i $\beta_3^2(C) = 196$.

Posljednji primjer nam pokazuje kako mjera konsenzusa daje velik broj podataka, točnije, njih $m^2$, gdje je $m$ broj kandidata. Te podatke moguće je interpretirati na više načina. Za početak, uvodimo kompaktniji način zapisivanja $d$-mjera odmaka za $m$ kandidata od različitih mjesta u poretku:

**Definicija 2.2.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_m\}$ skup od $m$ kandidata, te neka je sa $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ dan profil $n$ birača nad tim kandidatima. Tada matricu*

$$M^d(\alpha) = \begin{bmatrix} \beta_1^d(M_1) & \beta_2^d(M_1) & \cdots & \beta_m^d(M_1) \\ \beta_1^d(M_2) & \beta_2^d(M_2) & \cdots & \beta_m^d(M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^d(M_m) & \beta_2^d(M_m) & \cdots & \beta_m^d(M_m) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

*nazivamo* ***matricom*** $d$***-mjere odmaka***.

Primijetimo da se radi o kvadratnoj matrici, kod koje se $d$-mjere odmaka $i$-tog kandidata od $j$-te pozicije nalaze u $i$-tom retku matrice. Analogno, vrijednosti u $j$-tom stupcu matrice nam daju $d$-mjere odmaka kandidata od $j$-te pozicije. Zapišemo li rezultate dobivene u Primjeru 2.2 pomoću matrice 2-mjere odmaka, dobivamo:

$$M^2(\alpha) = \begin{bmatrix} 196 & 100 & 204 \\ 100 & 0 & 100 \\ 204 & 100 & 196 \end{bmatrix}$$

## 2.2 d-Mjera odmaka kao paradoks prebrajanja

Prije nego li nastavimo, recimo par riječi o vrijednosti parametra $d$. Kao što smo vidjeli u Primjeru 2.1, kandidat $B$ će imati manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta, ukoliko za $d$ vrijedi $d > \log_2 \frac{100}{49} = 1.02915$. No postavlja se pitanje, koju vrijednost za $d$ koristiti?

Kako bi odgovorili na to pitanje, trebamo formulirati odgovor na sljedeću verziju paradoksa prebrajanja: Neka $n$ glasača glasa formiranjem strogih linearnih poredaka između tri kandidata, $A$, $B$ i $C$. Za neku vrijednost $k \in \mathbb{N}$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq k \leq n$ njihove preferencije formiraju sljedeći profil $\alpha_0$:

Tablica 2.1: Profil preferencija $\alpha_0$

| $k$ | $n-k$ |
|---|---|
| $A$ | $C$ |
| $B$ | $B$ |
| $C$ | $A$ |

Ako prihvatimo da kandidat $B$ treba biti proglašen kompromisnim pobjednikom na profilu $\alpha_0$ za $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, te da kandidat $A$ treba biti proglašen kompromisnim pobjednikom na profilu $\alpha_0$ za $k = n$, tada paradoks prebrajanja formira pitanje: koja je vrijednost parametra $k$ takvog da za $k$ na profilu $\alpha_0$ kompromisnim pobjednikom smatramo kandidata $B$, a za $k + 1$ na profilu $\alpha_0$ kompromisnim pobjednikom smatramo kandidata $A$?

To pitanje zapravo je verzija klasičnoga paradoksa prebrajanja, kojega je formulirao logičar Eubulid iz Mileta, pitajući u kojem trenutku dodavanjem jednog zrna, zrna na okupu postaju "hrpa"? [17] Fenomen koji se nalazi u korijenu ovog paradoksa, je fenomen neodređenosti (eng. *vagueness*); pojam "hrpa" nema oštre granice, baš kao i pojam kompromisnog pobjednika u našem slučaju. Problemu ćemo pristupiti, baš kao i Eubulid, ne kao paradoksu već kao zagonetki.

Iz pretpostavke da za $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ jednog kandidata smatramo kompromisnim pobjednikom, dok za $k = n$ kompromisnim pobjednikom smatramo drugog kandidata, zbog uređenosti skupa prirodnih brojeva, slijedi da postoji neki $k_0$ između te dvije vrijednosti takav da je za $k = k_0$ kompromisni pobjednik na profilu $\alpha_0$ kandidat $B$, dok je za $k = k_0+1$ kompromisni pobjednik na profilu $\alpha_0$ kandidat $A$. Vrijednost $k_0$ treba biti rezultat apriori društvenog dogovora grupe koja namjerava koristiti opisani model.

Slični društveni dogovori se često pojavljuju u praksi. Primjerice, u parlamentarnoj proceduri (i u Hrvatskoj) često je za donošenje određenih odluka (poput promjena Ustava) potrebna dvotrećinska većina u parlamentu, za razliku od većine prisutnih zastupnika, većine koja je potrebna za donošenje ostalih odluka. Postavlja se pitanje, zašto baš 2/3? Zašto ne 3/4 ili 4/7? Odluka o većini potrebnoj kako bi se u parlamentu donosile promjene Ustava predstavljaju društvenu odluku sličnu odluci o vrijednosti parametra $k_0$ kojim se određuje željena mjera traženog kompromisa.

Kada je vrijednost za $k_0$ određena društvenim dogovorom, slijedi:

$$\beta_1^d(B) < \beta_1^d(A) \quad \Rightarrow \quad n < (n-k_0)\cdot 2^d \quad \Rightarrow \quad d > \log_2\left(\frac{n}{n-k_0}\right),$$

dok za $k = k_0 + 1$ u na profilu $\alpha_0$ vrijedi:

$$\beta_1^d(B) > \beta_1^d(A) \quad \Rightarrow \quad n > (n-k_0-1)\cdot 2^d \quad \Rightarrow \quad d < \log_2\left(\frac{n}{n-k_0-1}\right).$$

Stoga, za $d$ imamo:

$$\log_2\left(\frac{n}{n-k_0}\right) < d < \log_2\left(\frac{n}{n-k_0-1}\right) \tag{2.3}$$

Primjerice, ako je društveni dogovor za vrijednost parametra $k_0 = 60$ na profilu $\alpha_{basic}$ tada za vrijednost parametra $d$ vrijedi $d \in \langle 1.321928095, 1.358453971 \rangle$.

## 2.3 d-Mjera odmaka od prvog mjesta

Nakon što smo definirali $d$-mjeru odmaka, prirodno je prvo analizirati kako se u kontekstu tog pojma ponašaju postojeće (klasične) funkcije društvenog izbora. Pri tome će nam primarna analiza biti vezana uz $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta, što je ujedno i rezultat funkcija društvenog izbora koji privlači najveću pažnju – je li kandidat odabran kao pobjednik kroz neku funkciju društvenog izbora ujedno i kandidat koji minimizira $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta?

Već nam ogledni Primjer 2.1 pokazuje da pobjednik prema klasičnim funkcijama društvenog izbora ne minimizira uvijek $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta. No $d$-mjera nam ipak daje mogućnost usporedbe rezultata tih funkcija društvenog izbora, budući nam omogućava usporedbu $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidate koje te funkcije proglašavaju pobjednicima. Primjerice, na taj način možemo testirati uvriježeno mišljenje o Borda izračunu kao "kompromisnijoj" metodi od većinskog izračuna – naravno, u skladu sa poimanjem (odmaka od) kompromisa kao paradoksa prebrajanja, na način na koji je opisan u ovom radu. Promotrimo uvodni primjer:

**Primjer 2.3.** *Neka je dan sljedeći profil preferencija birača nad skupom kandidata* $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$

| 10 | 9 |
|---|---|
| $A$ | $B$ |
| $B$ | $C$ |
| $C$ | $A$ |

*Primijenimo li na ovom profilu Borda pobjednik kandidat $B$, dok je prema većinskom izračunu pobjednik kandidat $A$. Izračunajmo za dani profil mjere d-odmaka od prvog mjesta za svakog kandidata:*

$$\beta_1^d(A) = 10 \cdot 0^d + 9 \cdot 2^d = 9 \cdot 2^d$$

$$\beta_1^d(B) = 9 \cdot 0^d + 10 \cdot 1^d = 10$$

$$\beta_1^d(C) = 9 \cdot 1^d + 10 \cdot 2^d = 9 + 10 \cdot 2^d$$

*Kako bi d-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata $B$ (Borda pobjednik) bila manja* *od d-mjere odmaka od prvog mjesta za kandidata A (većinski pobjednik), mora vrijediti* $10 < 9 \cdot 2^d$*, što je ispunjeno za svaki* $d > 1$*. Isto tako, lagano se vidi da je d-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata A manja i od d-mjere odmaka od prvog mjesta za kandidata* $C$*, za svaku vrijednost* $d > 1$*.*

Iz primjera se vidi da Borda pobjednik u ovom slučaju uistinu ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika. No može li se takav rezultat dokazati za svaki profil nad tri kandidata? I za svaki profil nad većim brojem kandidata?

## 2.4 Condorcetove trojke

Pokazati ćemo da se na ta pitanja može dati odgovor, s kombinatornim dokazom tvrdnji. [13] Prvo ćemo odgovor dati za slučaj sa tri kandidata, a potom i u slučaju više kandidata. U procesu dokazivanja prilikom analiziranja mogućih profila, koristiti ćemo tehniku reduciranja broja mogućih profila na kojima treba dokazati tvrdnju. Radi toga uvodimo sljedeće pojmove:

**Definicija 2.3.** *Neka je* $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ *skup od 3 kandidata. Profile nad skupom kandidata* $\mathcal{M}$*, u oznaci* $\alpha_1^C$ *i* $\alpha_2^C$*, prikazane u Tablici 2.2 nazivamo* ***Condorcetovim trojkama****.*

Tablica 2.2: Condorcetove trojke, profili $\alpha_1^C$ i $\alpha_2^C$

| 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|
| A | C | B |
| B | A | C |
| C | B | A |

| 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|
| C | A | B |
| B | C | A |
| A | B | C |

Radi se o potpuno simetričnim profilima, koji nemaju pobjednika niti po Borda izračunu, niti po Condorcetovoj, niti po većinskoj metodi. Štoviše, jasno je da niti jedna funkcija društvenog izbora, koja zadovoljava kriterije anonimnosti i neutralnosti,[1] ne može na tim profilima dati jednog pobjednika.

Također, jasno je da uklanjanje (ili dodavanje) nekog broja tih profila (ukoliko je uklanjanje moguće) profilu $\alpha$ ne mijenja rezultat Borda izračuna, kao što je Saari naveo u

[1] Anonimne i neutralne funkcije društvenog izbora su one na čiji rezultat ne utječu niti imena kandidata, niti imena birača. Svojstva su detaljnije objašnjena na stranici 17.

svojoj argumentaciji u korist Borda izračuna u usporedbi sa Condorcetovom metodom.[30] U ovom radu nećemo ulaziti u sadržaj te argumentacije; cilj nam ovoga puta nije utvrditi prednost jedne funkcije društvenog izbora pred drugom. No, sama metoda uklanjanja Condorcetovih trojki iz profila pokazati će se vrlo korisnom na tehničkoj razini. O invarijantnosti Borda i većinskog izračuna na uklanjanje (ili dodavanje) Condorcetove trojke iz profila govori nam sljedeća propozicija:

**Propozicija 2.4.** *Neka je $\alpha$ dani profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da mu je moguće ukloniti barem jednu Condorcetovu trojku, tj. neka se profil $\alpha$ može dobiti dodavanjem profila $\alpha_1^C$ ili $\alpha_2^C$ nekom profilu $\alpha_1$. Tada Borda izračun i većinski izračun daju jednake rezultate na profilima $\alpha$ i $\alpha_1$.*[2]

*Dokaz.* Uklanjanjem jedne Condorcetove trojke iz profila $\alpha$, svaki od tri kandidata u profilu gubi točno jedan plasman na prvo mjesto, točno jedan plasman na drugo mjesto i točno jedan plasman na treće mjesto, što znači da svaki kandidat u Borda izračunu gubi jednak broj bodova. Stoga je rezultat Borda izračuna na profilima $\alpha$ i $\alpha_1$ identičan. Jednako tako, prilikom većinskog izračuna, svaki od kandidata uklanjanjem Condorcetove trojke gubi točno jedan plasman na prvo mjesto, pa je stoga i rezultat većinskog izračuna na profilima $\alpha$ i $\alpha_1$ identičan. □

Kako bi rezultat o invarijantnosti Borda i većinskog izračuna na uklanjanje Condorcetove trojke iskoristili u analizi $d$-mjere odmaka od prvog mjesta za pobjednike tih funkcija društvenog izbora, potreban nam je i rezultat o invarijantnosti (na uklanjanje Condorcetovih trojki) $d$-mjere odmaka od prvog mjesta. O tome govori sljedeća propozicija:

**Propozicija 2.5.** *Neka je $\alpha$ dani profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da mu je moguće ukloniti barem jednu Condeorcetovu trojku, tj. neka se profil $\alpha$ može dobiti dodavanjem profila $\alpha_1^C$ ili $\alpha_2^C$ nekom profilu $\alpha_1$. Ako za kandidate $A$ i $B$ vrijedi da d-mjere odmaka od prvog mjesta zadovoljavaju nejednakost*

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B),$$

*na profilu $\alpha$, tada i d-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidate $A$ i $B$ na profilu $\alpha_1$*

[2] Naglasimo kako "jednak rezultat funkcija društvenog izbora" znači da funkcija na oba profila daje istu preferenciju (poredak kandidata) kao rezultat. Bodovne vrijednosti na osnovu kojih se formira rezultat funkcija društvenog izbora, naravno, na različitim profilima nisu jednake.

*zadovoljavaju nejednakost*

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B).$$

*Dokaz.* Općenito, profil $\alpha$ možemo prikazati na sljedeći način:

| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ | $n_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $B$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $A$ | $B$ | $C$ |

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se profilu $\alpha$ može ukloniti Condorcetova trojka $\alpha_1^C$, tj. da su u danom profilu vrijednosti $n_1$, $n_2$ i $n_3$ veće ili jednake 1. Po pretpostavci propozicije vrijedi

$$\beta_1^d(A, \alpha) < \beta_1^d(B, \alpha)$$

$$(n_2 + n_6) + (n_3 + n_4) \cdot 2^d < (n_1 + n_4) + (n_2 + n_5) \cdot 2^d \tag{2.4}$$

Uklanjanjem jedne Condorcetove trojke $\alpha_1^C$, vrijednosti $n_1$, $n_2$ i $n_3$ se smanjuju za 1. Sada je:

$$\begin{aligned} \beta_1^d(A, \alpha_1) &= (n_2 - 1 + n_6) + (n_3 - 1 + n_4) \cdot 2^d \\ &= (n_2 + n_6) + (n_3 + n_4) \cdot 2^d - 1 - 2^d \end{aligned}$$

Prema nejednadžbi (2.4) tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \beta_1^d(A, \alpha_1) &= (n_2 + n_6) + (n_3 + n_4) \cdot 2^d - 1 - 2^d \\ &< (n_1 + n_4) + (n_2 + n_5) \cdot 2^d - 1 - 2^d \\ &= (n_1 - 1 + n_4) + (n_2 - 1 + n_5) \cdot 2^d \\ &= \beta_1^d(B, \alpha_1), \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. $\square$

## 2.5 Usporedba Borda i većinskog izračuna

Iz dokazanih tvrdnji jednostavno slijedi da uklanjanje proizvoljnog broja Condorcetovih trojki neće promijeniti rezultat Borda i većinskog izračuna, niti međusobne odnose $d$-mjera odmaka od prvog mjesta različitih kandidata. To nam omogućava da skup svih mogućih profila nekog broja birača nad skupom od tri kandidata reduciramo na skup profila koji ne sadrže Condorcetove trojke.

Takvi profili sadrže najviše četiri različite preferencije – kombinaciju od po dvije preferencije iz svake Condorcetove trojke. Iako je kombinatorna analiza svih mogućih kombinacija preferencija koje tvore profile bez Condorcetovih trojki opsežna, ona je ipak znatno smanjena. Upravo je to način na koji ćemo, serijom lema, dokazati sljedeći teorem:

**Teorem 2.6.** *Neka je $\alpha$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$. Tada za svaki $d > 1$ i pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) \leq \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$. Jednakost je ispunjena ako i samo ako je $W_{BC} = W_{PC}$.*

Dokaz teorema provesti ćemo kroz niz lema u kojima ćemo analizirati profile obzirom na oblik na koji se reduciraju nakon potpunog uklanjanja Condorcetovih trojki. U prvoj od tih lema dokazujemo tvrdnju za profile koji se nakon uklanjanja maksimalno mogućeg broja Condorcetovih trojki svode na profil s jednom preferencijom, odnosno jedno stupčani profil:

**Lema 2.7.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $n$ |
|---|
| $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Tvrdnja leme je trivijalno ispunjena, budući je prema Propoziciji 2.4 pobjednik prema većinskom izračunu na profilu $\alpha$ jednak većinskom pobjedniku na profilu $\alpha_1$, koji je pak isti kao i pobjednik po Borda izračunu (i na profilu $\alpha_1$ i na profilu $\alpha$), $\xi(A)$. $\square$

Iako, dakle, na profilima opisanima u Lemi 2.7 ne postoji većinski pobjednik različit od Borda pobjednika, lemu smo izrekli na ovakav način kako bi bila ekvivalentna u izrazu sa ostalim lemama u kojima se analiziraju reducirani profili $\alpha_1$.

Slijedi analiza odnosa $d$-mjera odmaka od prvog mjesta na reduciranim profilima $\alpha_1$ koji se sastoje od dva stupca. Takve profile (do na permutaciju elemenata) dijelimo u sljedeće skupine (gdje su $n$ i $m$ neki prirodni brojevi):

1. $$\begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & A \\ \hline B & C \\ \hline C & B \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & B \\ \hline A & C \\ \hline C & A \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & C \\ \hline A & B \\ \hline B & A \\ \hline \end{array}$$

2. $$\begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline B & B \\ \hline C & A \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & A \\ \hline C & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline A & A \\ \hline C & B \\ \hline \end{array}$$

3. $$\begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & B \\ \hline B & A \\ \hline C & C \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline C & A \\ \hline B & B \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline C & B \\ \hline A & A \\ \hline \end{array}$$

4. $$\begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline B & A \\ \hline C & B \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & B \\ \hline C & A \\ \hline B & C \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline A & B \\ \hline C & A \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & A \\ \hline C & B \\ \hline A & C \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & B \\ \hline A & C \\ \hline B & A \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & A \\ \hline B & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}$$

Ovime smo pobrojali sve moguće kombinacije stupaca koji tvore dvostupčane reducirane profile $\alpha_1$, ukupno njih $\binom{6}{2} = 15$. Profili su grupirani u četiri skupine, koji se međusobno mogu dobiti nekom permutacijom kandidata. Primjerice, u prvoj skupini profila, drugi pobrojani profil se iz prvoga dobiva permutacijom $\xi$ za koju je $\xi(A) = B$, $\xi(B) = A$ i $\xi(C) = C$. Dokažimo sada traženo svojstvo kroz leme za svaku od te četiri skupine profila.

**Lema 2.8.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Dokaz ove leme je trivijalan. Borda i većinski izračun daju na profilu $\alpha_1$ istog pobjednika, $\xi(A)$, pa je prema Propoziciji 2.4 tvrdnja ispunjena. Odnosno, niti na jednom profilu $\alpha$ ne postoji većinski pobjednik različit od Borda pobjednika. $\square$

**Lema 2.9.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $m$ | $n$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Budući je položaj kandidata $\xi(A)$ i $\xi(C)$ u profilu $\alpha_1$ simetričan, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m > n$. Tada je kandidat $\xi(A)$ Borda pobjednik, budući zbog $2m > m + n$ ima bolji Borda rezultat od kandidata $\xi(B)$, a zbog $2m > 2n$ ima bolji Borda rezultat od kandidata $\xi(C)$. Kako je ujedno kandidat $\xi(A)$ i većinski pobjednik, tvrdnja leme je prema Propoziciji 2.4 dokazana. □

**Lema 2.10.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $m$ | $n$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Budući je položaj kandidata $\xi(A)$ i $\xi(B)$ u profilu $\alpha_1$ simetričan, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m > n$. Tada za Borda rezultate kandidata vrijedi $\xi(A) \succ \xi(B) \;\Leftrightarrow\; 2m+n > 2n+m$, što vrijedi zbog $m > n$. Kako kandidat $\xi(C)$ očigledno ne može biti pobjednik po Borda izračunu na profilu $\alpha_1$, slijedi da je kandidat $\xi(A)$ Borda pobjednik. Kako je isti kandidat i pobjednik po većinskom izračunu prema Propoziciji 2.4 slijedi tvrdnja leme. □

**Lema 2.11.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega* *uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $m$ | $n$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu

| $m$ | $n$ |
|---|---|
| $A$ | $B$ |
| $B$ | $C$ |
| $C$ | $A$ |

Ukoliko je $m \leq n$, tada je većinski pobjednik kandidat $B$. Kandidat $C$ ne može biti Borda pobjednik budući je $B$ u svim stupcima bolje pozicioniran. Da bi $A$ bio Borda pobjednik mora vrijediti $2m > m + 2n \;\Rightarrow\; m > 2n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $m \leq n$. Stoga u tom slučaju ne može postojati Borda pobjednik različit od većinskog pobjednika.

U slučaju da je $m > n$, većinski je pobjednik kandidat $A$. Ukoliko je tada $m + 2n > 2m \;\Rightarrow\; n > \frac{m}{2}$, slijedi da je $B$ pobjednik po Borda izračunu. Može li tada za neki $d > 1$ većinski pobjednik, kandidat $A$ imati manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od kandidata $B$? Promotrimo li pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta slijedi:

$$\beta_1^d(A) = n \cdot 2^d > n \cdot 2 > m = \beta_1^d(B),$$

što vrijedi za svaki $d > 1$. Zaključujemo kako tada Borda pobjednik ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika za svaki $d > 1$ na profilu $\alpha_1$, pa prema Propozicijama 2.4 i 2.5 ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta i na svakom profilu $\alpha$. $\square$

Time smo tvrdnju Teorema 2.6 dokazali za sve profile koji se uklanjanjem maksimalnog broja Condorcetovih trojki svode na dvostupčane profile. Sljedeću skupinu profila čine profili koji se nakon uklanjanja maksimalnog broja Condorcetovih trojki reduciraju na trostupčane profile $\alpha_1$. Te profile možemo podijeliti u tri skupine, koje do na permutaciju elemenata prikazuju istu strukturu:

1.
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & C \\ \hline B & A & B \\ \hline C & B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & C & C \\ \hline A & B & A \\ \hline C & A & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & A & A \\ \hline B & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline\end{array} \sim$$
$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & A \\ \hline C & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & B & B \\ \hline C & A & C \\ \hline B & C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & B & B \\ \hline A & C & A \\ \hline B & A & C \\ \hline\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & A \\ \hline B & A & C \\ \hline C & B & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & B & A \\ \hline B & A & C \\ \hline C & C & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline C & A & A \\ \hline\end{array} \sim$$
$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & B \\ \hline A & B & C \\ \hline C & C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & A & C \\ \hline A & C & B \\ \hline B & B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & B & C \\ \hline A & C & B \\ \hline B & A & A \\ \hline\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & B \\ \hline B & A & A \\ \hline C & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & B \\ \hline C & A & A \\ \hline B & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & C \\ \hline C & B & B \\ \hline A & C & A \\ \hline\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline B & C & A \\ \hline A & B & B \\ \hline C & A & C \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline C & A & B \\ \hline B & C & C \\ \hline A & B & A \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline C & B & A \\ \hline A & C & C \\ \hline B & A & B \\ \hline \end{array}$$

U ove tri skupine nalazi se osamnaest od ukupno $20 = \binom{6}{3}$ mogućih profila. Preostala dva trostupčana profila su upravo Condorcetove trojke $\alpha_1^C$ i $\alpha_2^C$ prikazanih u Tablici 2.2 na stranici 31. U sljedeće tri propozicije analiziramo odnos $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za pobjednike po Borda i većinskom izračunu na tim trostupčanim profilima.

**Lema 2.12.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ |

Na danom profilu $\alpha_1$, većinski pobjednik može biti ili kandidat $A$ ili kandidat $C$. Neka je za početak, većinski pobjednik kandidat $A$. Tada vrijedi da je $k > l + m$. Iz te nejednakosti slijedi:

$$k > l + m \;\Rightarrow\; 2k > 2l + 2m \;\Rightarrow\; 2k + l > 3l + 2m.$$

Kako je Borda rezultat kandidata $A$ jednak $2k + l$, a kandidata $C$ jednak $2l + 2m$ slijedi:

$$2k + l > 3l + 2m > 2l + 2m,$$

pa je kandidat $A$ ima Bolji borda rezultat od kandidata $C$. S druge strane, vrijedi $2k + l > k + m \;\Leftrightarrow\; k + l > m$, što vrijedi zbog $k > l + m$, pa $A$ po Borda izračunu pobjeđuje i kandidata $B$. Stoga je u slučaju kada je $A$ većinski pobjednik, on nužno i Borda pobjednik, pa je prema Propoziciji 2.4 tvrdnja leme dokazana.

Suprotno tomu, pretpostavimo da je kandidat $C$ većinski pobjednik, tj. da vrijedi

$$k < m + l. \tag{2.5}$$

Da bi u tom slučaju kandidat $A$ bio pobjednik po Borda izračunu, $A$ mora imati bolji Borda rezultat od kandidata $B$ zbog čega je

$$2k + l > k + m$$

$$l + k > m, \tag{2.6}$$

te od kandidata $C$, što nam daje

$$2k + l > 2l + 2m$$

$$k > m + \frac{l}{2}. \tag{2.7}$$

Primijetimo da je uvjet (2.6) uvijek ispunjen zbog uvjeta (2.7). Uvjete (2.5) i (2.7) možemo objediniti u zapis

$$m + \frac{l}{2} < k < m + l$$

U tom je slučaju, dakle, kandidat $C$ većinski, a kandidat $A$ Borda pobjednik. Može li tada kandidat $C$ imati manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od kandidata $A$, tj. postoji li

$d > 1$ takav da je $\beta_1^d(C) < \beta_1^d(A)$? Tada bi bilo (oduzimanje $m$ od $k$ možemo provesti zbog uvjeta (2.7)):

$$k \cdot 2^d < l + m \cdot 2^d \quad \Leftrightarrow \quad 2^d < \frac{l}{k - m}.$$

No iz uvjeta (2.7) slijedi:

$$k > m + \frac{l}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l}{k - m} < 2,$$

pa zaključujemo kako ne postoji $d > 1$ takav da većinski pobjednik $C$ ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika $A$, što s Propozicijama 2.4 i 2.5 dokazuje tvrdnju leme. □

**Lema 2.13.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $A$ |
| $B$ | $A$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $B$ |

U ovom slučaju većinski pobjednik može biti kandidat $A$ ili kandidat $C$. Pretpostavimo prvo da je to kandidat $A$. Tada je $k + m > l$. Borda rezultati iznose $2k + l + 2m$ za kandidata $A$, $k$ za kandidata $B$, te $2l + m$ za kandidata $C$. Budući $A$ očigledno ima veći rezultat od kandidata $B$, da bi $A$ bio Borda pobjednik, mora vrijediti $2k+l+2m > 2l+m$, tj. $2k+m > l$. No to je ispunjeno budući je $k+m > l$. Dakle, ako je $A$ većinski pobjednik, tada je on i Borda pobjednik, pa je time dokazana tvrdnja leme.

Ukoliko je pak većinski pobjednik kandidat $C$, tada vrijedi

$$k + m < l. \tag{2.8}$$

Da bi kandidat $A$ pobijedio po Borda izračunu, mora imati veći Borda rezultat od kandidata $B$, tj. $2k + l + 2m > k$, što vrijedi uvijek, te od kandidata $C$, tj.

$$2k + l + 2m > 2l + m$$

$$2k + m > l. \tag{2.9}$$

Uvjete (2.8) i (2.9) zajedno možemo napisati:

$$m + k < l < m + 2k.$$

Postoji li za takav profil $\alpha_1$ vrijednost $d > 1$ za koju je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $C$ manja od $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $A$? Ukoliko je odgovor pozitivan, tada bi za takav $d > 1$ vrijedilo

$$\beta_1^d(C) < \beta_1^d(A) \quad \Leftrightarrow \quad m + k \cdot 2^d < l.$$

No zbog uvjeta (2.9) slijedi:

$$m + k \cdot 2^d > m + 2k > l,$$

pa zaključujemo kako većinski pobjednik $C$ ne može imati manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika $A$ na profilu $\alpha_1$, pa tada prema Propozicijama 2.4 i 2.5, i na profilu $\alpha$ koji se iz profila $\alpha_1$ dobiva dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki. $\square$

**Lema 2.14.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega* *uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $C$ |

U ovakvom profilu $\alpha_1$ svaki od kandidata može biti većinski pobjednik.
Ukoliko je većinski pobjednik kandidat $A$, tada vrijede sljedeća dva uvjeta:

$$k > l, \tag{2.10}$$

$$k > m. \tag{2.11}$$

Dokažimo da je tada $A$ ujedno i Borda pobjednik. Da bi njegov Borda rezultat bio veći od Borda rezultata kandidata $B$ mora vrijediti:

$$2k + l + m+ > k + 2m \quad \Leftrightarrow \quad k + l > m,$$

što vrijedi zbog uvjeta (2.11). Da bi Borda rezultat kandidata $A$ bio veći od rezultata kandidata $C$ mora vrijediti:

$$2k + l + m+ > 2l \quad \Leftrightarrow \quad 2k + m > l,$$

što je pak ispunjeno zbog uvjeta (2.10). Dakle, ako je $A$ većinski pobjednik, tada je on i Borda pobjednik, pa je tvrdnja leme dokazana.

Neka je sad kandidat $B$ većinski pobjednik. Tada vrijedi:

$$m > k, \tag{2.12}$$

$$m > l. \tag{2.13}$$

Prema Borda izračunu, kandidat $B$ ima veći rezultat od kandidata $C$, budući je $k+2m > l$ zbog uvjeta (2.11). No kandidat $B$ ne mora nužno imati veći Borda rezultat od kandidata $A$. Da bi $A$ imao veći Borda rezultat mora vrijediti

$$2k + l + m > k + 2m$$

$$k + l > m. \tag{2.14}$$

Uvjeti (2.12), (2.13) i (2.14) su primjerice ispunjeni za $k = 3$, $l = 4$, $m = 5$. Tvrdimo da tada $A$, za svaki $d > 1$, ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od $B$, tj. da za svaki $d > 1$ vrijedi:

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B)$$

$$l + m < k + l \cdot 2^d$$

Tada je

$$l + m < (2.14) < l + (k + l) = k + l \cdot 2 < k + l \cdot 2^d,$$

pa je tvrdnja dokazana.

Konačno, neka je kandidat $C$ većinski pobjednik. Tada vrijedi

$$l > k, \tag{2.15}$$

$$l > m. \tag{2.16}$$

No po Borda izračunu, $C$ ne mora biti pobjednik, štoviše i $A$ i $B$ mogu imati bolji Borda rezultat. Kandidat $A$ ima bolji Borda rezultat od kandidata $C$ ukoliko je

$$2k + m > l \tag{2.17}$$

(što je, zajedno sa uvjetima (2.15) i (2.16) ispunjeno za npr. $k = 2$, $m = 3$, $l = 4$), dok će $B$ imati bolji Borda rezultat od $C$ ukoliko je $\frac{k}{2}+m > l$ (što je pak, zajedno sa uvjetima (2.15) i (2.16) ispunjeno za npr. $k = 4$, $m = 5$, $l = 6$). No treba primijetiti kako kandidat $A$ uvijek ima bolji Borda rezultat od kandidata $B$. Naime, $2k+l+m > k+2m \;\Leftrightarrow\; k+l > m$, što vrijedi po uvjetu (2.16). Stoga, od ta dva kandidata samo $A$ može biti pobjednik po Borda izračunu. Tvrdimo da tada Borda pobjednik $A$ ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika $C$ za svaki $d > 1$, tj. da za svaki $d > 1$ vrijedi

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(C) \quad \Leftrightarrow \quad l + m < (k + m) \cdot 2^d$$

Sada je

$$l + m < (2.17) < (2k + m) + m = (k + m) \cdot 2 < (k + m) \cdot 2^d,$$

za svaki $d > 1$, pa je tvrdnja dokazana, čime je, je uz Propozicije 2.4 i 2.5 dokazana i lema. □

Nakon što smo analizirali profile koji se uklanjanjem Condorcetovih trojki svode na trostupčane profile, preostalo nam je još analizirati profile $\alpha$ koji se nakon uklanjanja maksimalnog broja Condorcetovih trojki reduciraju na četvero-stupčane profile $\alpha_1$.

Primijetimo da redukcija na pet ili šest stupčane profile nije moguća, budući tada profil $\alpha$ mora sadržavati bar jednu od Condorcetovih trojki, pa redukcija nije potpuna. Prilikom redukcije profila $\alpha$ na četvero-stupčani profil $\alpha_1$, taj profil mora sadržavati dva stupca iz jedne Condorcetove trojke i dva iz druge, budući bi u protivnom bilo moguće ukloniti neku od Condorcetovih trojki. Stoga se četvero-stupčani profili $\alpha_1$ mogu podijeliti u sljedeće skupine koje su ekvivalentne do na permutaciju elemenata skupa $\mathcal{M}$:

$$1.\quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k & l & m & n \\ \hline A & C & C & A \\ \hline B & A & B & C \\ \hline C & B & A & B \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k & l & m & n \\ \hline A & B & B & A \\ \hline C & A & C & B \\ \hline B & C & A & C \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k & l & m & n \\ \hline B & C & C & B \\ \hline A & B & A & C \\ \hline C & A & B & A \\ \hline \end{array}$$

2.

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $B$ | | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | | $B$ | $A$ | $A$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $A$ | $\sim$ | $C$ | $A$ | $C$ | $A$ | $\sim$ | $C$ | $B$ | $C$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $C$ | | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | | $A$ | $C$ | $B$ | $A$ |

3.

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | | $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $A$ | $B$ | | $B$ | $A$ | $B$ | $C$ | | $C$ | $A$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $A$ | $\sim$ | $C$ | $B$ | $A$ | $B$ | $\sim$ | $B$ | $C$ | $A$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $B$ | $C$ | | $A$ | $C$ | $C$ | $A$ | | $A$ | $B$ | $B$ | $A$ |

Ukupan broj mogućih četvero-stupčanih profila $\alpha_1$ je $\binom{6}{4} = 15$, no njih šest su kombinacije jedne Condorcetove trojke i jednog stupca iz druge Condorcetove trojke, što sa devet gore pobrojanih profila čini sve moguće kombinacije. U sljedećim lemama ćemo analizirati odnos $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda i većinskog pobjednika u takvim četvero-stupčanim profilima.

**Lema 2.15.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Kao i u prijašnjim lemama, bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $A$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $B$ |

U ovom profilu imamo simetriju između položaja kandidata $A$ i $C$, te se sve tvrdnje dokazane za kandidata $A$ prevode u tvrdnje o kandidatu $C$ uz zamjenu vrijednosti $k$ i $m$, te $l$ i $n$. Stoga je dovoljno analizirati situaciju u kojoj je $A$ većinski pobjednik. Tada vrijedi

$$k + n > l + m. \tag{2.18}$$

Prema Borda izračunu, $A$ tada ima bolji rezultat od $B$, budući je

$$2k + 2n + l > k + m \quad \Leftrightarrow \quad k + 2n + l > m,$$

$$k + 2n + l = (k + n) + n + l > (2.18) > (l + m) + n + l = 2l + n + m > m.$$

No kandidat $A$ ne mora imati veći Borda rezultat od kandidata $C$. Naime, $C$ pobjeđuje po Borda izračunu ako je

$$2l + 2m + n > 2k + 2n + l$$

$$l + 2m > 2k + n, \tag{2.19}$$

što je moguće ispuniti uz uvjet (2.18) ako je $m > k$. Tako na primjer vrijednosti $k = 1$, $l = 3$, $m = 4$ i $n = 7$ ispunjavaju uvjete (2.18) i (2.19); u takvom je profilu kandidat $A$ većinski pobjednik, a kandidat $C$ Borda pobjednik. Tvrdimo da tada kandidat $C$ ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od kandidata $A$ za sve $d > 1$. Neka je sada $R \in \mathbb{N}$ broj takav da je

$$k + n = l + m + R \quad \Leftrightarrow \quad n = l + m - k + R$$

Takav prirodan broj $R$ postoji zbog uvjeta (2.18). Iz (2.19) slijedi

$$l + 2m > 2k + n \quad \Leftrightarrow \quad l + 2m > 2k + l + m - k + R$$

$$m > k + R \tag{2.20}$$

Promotrimo sada odnos $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $A$ i $C$:

$$\beta_1^d(C) < \beta_1^d(A)$$

$$n + k \cdot 2^d < l + m \cdot 2^d$$

Iz uvjeta (2.20) znamo da je $m$ veći od $k$, pa možemo pisati

$$n < l + (m-k) \cdot 2^d \quad \Leftrightarrow \quad l + m - k + R < l + (m-k) \cdot 2^d$$

$$\Leftrightarrow \quad m - k + R < (m-k) \cdot 2^d \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{R}{m-k} < 2^d$$

Kako iz uvjeta (2.20) slijedi da je $\frac{R}{m-k} < 1$, tvrdnja vrijedi za svaki $d > 1$, čime je dokazana lema. □

**Lema 2.16.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $C$ |

Na ovom profilu sva tri kandidata mogu biti većinski pobjednik. Kako u profilu postoji simetrija između položaja kandidata $A$ i $B$, sve tvrdnje dokazane za kandidata $A$ zamjenom vrijednosti $k$ i $n$, te $l$ i $m$ daju ekvivalentne tvrdnje o kandidatu $B$. Neka je stoga prvo kandidat $A$ većinski pobjednik. Tada vrijedi

$$k > l + m, \tag{2.21}$$

$$k > n. \tag{2.22}$$

Prvo pokažimo da tada $C$ ima manji Borda rezultat od $A$, tj. da je

$$2k + l + n > 2l + 2m \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n > l + 2m$$

Sada je

$$2k + n > (2.21) > 2 \cdot (l + m) + n = 2l + 2m + n > l + 2m.$$

No, kandidat $B$ može imati veći Borda rezultat od većinskog pobjednika, kandidata $A$. Da bi to vrijedilo, mora biti

$$2n + k + m > 2k + l + n$$

$$n + m > k + l. \tag{2.23}$$

Uvjete (2.21), (2.22) i (2.23) moguće je zadovoljiti u istom profilu $\alpha_1$; primjerice, zadovoljavaju ih vrijednosti $l = 2$, $m = 5$, $n = 6$ i $k = 8$. U takvim profilima je kandidat $A$ većinski pobjednik, a kandidat $B$ Borda pobjednik. Tvrdimo da je za svaki $d > 1$ tada $\beta_1^d(B) < \beta_1^d(A)$. Kako bi to dokazali, istaknimo kako zbrajanjem uvjeta (2.22) i (2.23) dobivamo

$$k + n + m > n + k + l \quad \Leftrightarrow \quad m > l. \tag{2.24}$$

Sada je

$$\beta_1^d(B) < \beta_1^d(A)$$

$$k + m + l \cdot 2^d < l + n + m \cdot 2^d.$$

Ukoliko je sad $k + m \leq l + n$, tada zbog (2.24) slijedi i $l \cdot 2^d < m \cdot 2^d$, pa je tvrdnja dokazana. Pretpostavimo stoga da je $k+m>l+n$. Tada imamo

$$k+m-l-n<(m-l)\cdot 2^d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k+m-l-n}{m-l}<2^d$$

Ta tvrdnja vrijedi za svaki $d>1$ ukoliko je

$$\frac{k+m-l-n}{m-l}<2 \quad \Leftrightarrow \quad k+m-l-n<(m-l)\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad k+l<m+n,$$

što pak vrijedi zbog uvjeta (2.23). Time je dokazano da Borda pobjednik $B$ za svaki $d>1$ ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika $A$ (uz napomenu da zbog simetričnosti vrijedi ekvivalentan iskaz za Borda pobjednika $A$ i većinskog pobjednika $B$).

Preostalo je analizirati situaciju u kojoj je većinski pobjednik kandidat $C$. Tada vrijedi

$$l+m>k, \tag{2.25}$$

$$l+m>n. \tag{2.26}$$

No $C$ ne mora biti i Borda pobjednik. Kako bi, primjerice, $A$ bio Borda pobjednik (a ekvivalentni se uvjeti mogu postaviti i da $B$ bude Borda pobjednik) mora vrijediti

$$2k+l+n>2n+k+m$$

$$k+l>n+m, \tag{2.27}$$

kako bi $A$ imao veći Borda rezultat od $B$, te

$$2k+l+n>2l+2m$$

$$2k+n>l+2m. \tag{2.28}$$

kako bi $A$ imao veći Borda rezultat od $C$. Kombiniranjem ta četiri uvjeta može se više doznati o strukturi profila ovog oblika u kojima je $C$ većinski, a $A$ Borda pobjednik; primjerice, zbrajanjem uvjeta (2.25) i (2.27) dobivamo $l>\frac{n}{2}$, a zbrajanjem uvjeta (2.26) i (2.28) da je $k>\frac{m}{2}$. No ovdje nam je jedino potrebna potvrda egzistencije takvih profila.

Tako na primjer vrijednosti $k = 2$, $l = 3$, $m = 1$ i $n = 3$ zadovoljavaju uvjete (2.25), (2.27), (2.26) i (2.28), te je u pripadnom profilu kandidat $A$ Borda, a kandidat $C$ većinski pobjednik. Tvrdimo da tada za svaki $d > 1$, uz zadovoljavanje uvjeta (2.25) – (2.28), vrijedi

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(C)$$

$$l + n + m \cdot 2^d < (k + n) \cdot 2^d$$

Pokažimo sada da je $k+n > m$. Prema uvjetu (2.28) vrijedi $2k+n > l+2m$. S obje strane te nejednakosti oduzmemo $k$; to možemo napraviti, budući je prema (2.25) $k < l + m$, pa se vrijednost $k$ može oduzeti s obje strane nejednakosti. Tada je $k + n > m + (l + m - k)$, gdje je izraz u zagradi s desne strane nejednakosti, $l + m - k$ pozitivan zbog uvjeta (2.25), pa odavde zaključujemo kako je $k + n > m$. Stoga izraz $m \cdot 2^d$ možemo prebaciti na desnu stranu nejednakosti. Sada je

$$l + n < (k + n - m) \cdot 2^d$$

$$\frac{l + n}{k + n - m} < 2^d$$

Ta nejednakost vrijedi za svaki $d > 1$ ukoliko je

$$\frac{l + n}{k + n - m} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad l + 2m < 2k + n,$$

što je ispunjeno zbog uvjeta (2.28). Dakle, Borda pobjednik i u ovom slučaju ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika, čime je dokazana tvrdnja leme. $\square$

**Lema 2.17.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ dobiven iz profila $\alpha_1$ doda-*

*vanjem nekog broja Condorcetovih trojki, za svaki $d > 1$ i pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{PC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$, za koje je $W_{BC} \neq W_{PC}$, ukoliko takav $W_{PC}$ postoji.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz ćemo provesti na profilu

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $B$ | $C$ |

I na ovom profilu postoji simetrija između položaja dva kandidata, ovoga puta kandidata $B$ i $C$. Tako bez smanjenja općenitosti trebamo analizirati dvije situacije; onu u kojoj je većinski pobjednik kandidat $A$ i onu u kojoj je većinski pobjednik kandidat $B$. Neka je prvo većinski pobjednik kandidat $A$. Tada vrijedi:

$$k + m > l, \tag{2.29}$$

$$k + m > n. \tag{2.30}$$

Tvrdimo da je tada $A$ ujedno i Borda pobjednik. Da bi kandidat $A$ imao veći Borda rezultat od kandidata $B$ mora vrijediti

$$2k + 2m + l + n > 2n + k \quad \Leftrightarrow \quad k + 2m + l > n,$$

što je ispunjeno zbog uvjeta (2.30). S druge strane, da bi $A$ imao veći Borda rezultat od kandidata $C$ mora biti

$$2k + 2m + l + n > 2l + m \quad \Leftrightarrow \quad 2k + m + n > l,$$

što je ispunjeno zbog uvjeta (2.29). Stoga u tom slučaju ne postoji većinski pobjednik različit od Borda pobjednika, pa je tvrdnja leme dokazana.

Ukoliko je pak većinski pobjednik kandidat $B$, tada imamo:

$$n > k + m, \tag{2.31}$$

$$n > l. \tag{2.32}$$

No u ovom slučaju, kandidat $A$ može biti Borda pobjednik. Naime, da bi $A$ imao veći Borda rezultat od kandidata $B$ i $C$ mora vrijediti

$$2k + 2m + l + n > 2n + k$$

$$k + 2m + l > n, \tag{2.33}$$

$$2k + 2m + l + n > 2l + m$$

$$2k + m + n > l. \tag{2.34}$$

Primijetimo da je (2.34) uvijek ispunjen zbog uvjeta (2.32). Što se pak uvjeta (2.31), (2.32) i (2.33) tiče, njega je moguće ispuniti izborom vrijednosti za $n$ koja će zadovoljavati $\max\{l, k + m\} < n < (k + m) + m + l$. Na primjer, te uvjete zadovoljavaju vrijednosti $k = 2$, $l = 1$, $m = 3$ i neki $n$ za kojeg je $\max\{1, 5\} < n < 9$, npr. $n = 6$. U takvom profilu najveći Borda rezultat ima kandidat $A$ i on iznosi 17 (u usporedbi sa 14 koliko ostvaruje kandidat $B$ i 5 koliko ostvaruje kandidat $C$), dok je većinski pobjednik kandidat $B$. Tvrdimo da tada za svaki $d > 1$ vrijedi

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B)$$

$$l + n < k + (l + m) \cdot 2^d$$

Iz uvjeta (2.31) slijedi da je $n > k$, pa vrijednost $k$ možemo prebaciti na lijevu stranu nejednakosti. Tada je

$$l + n - k < (l + m) \cdot 2^d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l + n - k}{l + m} < 2^d.$$

Tvrdnja je ispunjena za svaki $d > 1$ ukoliko je

$$\frac{l+n-k}{l+m} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad n < k + l + 2m,$$

što vrijedi po uvjetu (2.33). Time smo dokazali da Borda pobjednik $A$ ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika, kandidata $B$. Preostalo je samo još ispitati može li uz većinskog pobjednika, kandidata $B$, Borda pobjednik biti kandidat $C$? No tada bi $C$ morao imati veći Borda rezultat od kandidata $A$, tj. moralo bi vrijediti

$$2l + m > 2k + 2m + l + n \quad \Leftrightarrow \quad l > 2k + m + n,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (2.32). Zaključujemo kako osim većinskog pobjednika, kandidata $B$, jedino kandidat $A$ može biti Borda pobjednik, te smo dokazali da u tom slučaju Borda pobjednik ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od većinskog pobjednika, čime je dokazana tvrdnja leme. □

Lemama 2.7 – 2.17 analizirane su sve moguće kombinacije profila $\alpha_1$ u slučaju s tri kandidata, čime je dokazan Teorem 2.6. Time je potvrđena neformalna pretpostavka da u slučaju izbora između tri kandidata, Borda izračun kao pobjednika daje kandidata koji je rezultat većeg stupnja kompromisa od većinskog pobjednika, za sve razine kompromisa $d$. Naravno, ukoliko kako interpretaciju pojma kompromisnog izbora pobjednika prihvatimo $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta.

No tvrdnja se ne može poopćiti na situaciju u kojoj se bira više od tri kandidata. Sljedećim teoremom ćemo dokazati da za svaki $d > 1$ postoji profil nad skupom od četiri kandidata na kojemu je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za većinskog pobjednika manja od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta za Borda pobjednika. Potom ćemo taj rezultat poopćiti na slučaj izbora među pet ili više kandidata.

**Teorem 2.18.** *Neka je skup kandidata dan s $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$. Tada za svaki $d > 1$ postoji profil $\alpha$ nad skupom kandidata $\mathcal{M}$ takav da za pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{PC}) < \beta_1^d(W_{BC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Neka je dana vrijednost $d > 1$. Konstruirati ćemo profil $\alpha$ takav da na profilu $\alpha$ vrijedi $\beta_1^d(W_{PC}) < \beta_1^d(W_{BC})$. Promotrimo sljedeći profil $\alpha$:

| $m$ | $i$ | $j$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $D$ |
| $B$ | $C$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |
| $D$ | $D$ | $B$ |

Pokazati ćemo da postoje $m, i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi tvrdnja teorema za proizvoljno odabrani $d > 1$. Na početku, neka je

$$m > i, \qquad m > j. \tag{2.35}$$

Tada je kandidat $A$ većinski pobjednik na profilu $\alpha$. Nadalje, neka je kandidat $B$ Borda pobjednik na istom profilu. Tada vrijedi

$$2m + 3i > 3m + i + j \qquad \Leftrightarrow \qquad 2i > m + j, \tag{2.36}$$

$$2m + 3i > m + 2i + 2j \qquad \Leftrightarrow \qquad m + i > 2j, \tag{2.37}$$

$$2m + 3i > 3j \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2}{3}m + i > j. \tag{2.38}$$

Sada iz uvjeta (2.35) slijedi

$$m > i \quad \Rightarrow \quad m + i > 2i \quad \Rightarrow (2.36) \Rightarrow \quad m + i > m + j \quad \Rightarrow \quad i > j,$$

pa je

$$m + i > j + j = 2j, \qquad \frac{2}{3}m + i > \frac{2}{3}m + j > j.$$

Dakle, ako vrijede uvjeti (2.35) i (2.36), tada su nužno ispunjeni i uvjeti (2.37) i (2.38). Neka je sada, prema uvjetu (2.36),

$$2i = m + j + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 2i - j - 1.$$

Kako bi bili ispunjeni uvjeti (2.35), mora biti

$$2i - j - 1 > i \qquad \Leftrightarrow \qquad i > j + 1 \tag{2.39}$$

$$2i - j - 1 > j \qquad \Leftrightarrow \qquad i > j + \frac{1}{2}, \tag{2.40}$$

uz napomenu da zadovoljavanje uvjeta (2.39) povlači zadovoljavanje uvjeta (2.40).

Želimo pokazati da tada za proizvoljno odabrani $d > 1$ i $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika, kandidata $B$, i većinskog pobjednika, kandidata $A$, postoji profil $\alpha$ takav da je

$$\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B)$$

$$(i + j) \cdot 2^d < m + j \cdot 3^d,$$

gdje $m$, $i$, $j$ zadovoljavaju uvjete (2.35) i (2.36). Sada je

$$i \cdot 2^d + j \cdot 2^d < m + j \cdot 3^d$$

$$i \cdot 2^d < m + j \cdot (3^d - 2^d)$$

$$i \cdot 2^d < 2i - j - 1 + j \cdot (3^d - 2^d)$$

$$i \cdot (2^d - 2) + 1 < j \cdot (3^d - 2^d - 1)$$

Lako se vidi kako je $2^d - 2 > 0$ i $3^d - 2^d - 1 > 0$ za svaki $d > 1$ (vidi dokaz Leme 2.19), pa slijedi

$$j > \frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} \tag{2.41}$$

Sažeto, za dani $d > 1$ tražimo profil $\alpha$ kod kojega je $m = 2i - j - 1$, te za $i$ i $j$ vrijedi:

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} < j < i - 1 \tag{2.42}$$

S lijeve i desne strane nejednadžbe (2.42) nalaze se linearni izrazi (u odnosu na $i$). U Lemi 2.19 dokazano je da je koeficijent smjera pravca s lijeve strane nejednadžbe manji od 1 za svaki $d > 1$, stoga za nejednadžbu postoje rješenja $i$ i $j$ ukoliko je $i$ dovoljno velik. Kako bi bili sigurni da se u danom rasponu nalazi barem jedan prirodan broj $j$, moramo postaviti uvjet da je desna strana nejednadžbe barem za 1 veća od lijeve strane, tj. da vrijedi:

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} + 1 < i - 1$$

$$(2^d - 2) \cdot i + 1 < i \cdot (3^d - 2^d - 1) - 2 \cdot (3^d - 2^d - 1)$$

$$2 \cdot (3^d - 2^d - 1) + 1 < i \cdot (3^d - 2^d - 1) - (2^d - 2) \cdot i$$

$$i > \frac{2 \cdot 3^d - 2 \cdot 2^d - 1}{3^d - 2 \cdot 2^d + 1}. \tag{2.43}$$

Sada za tako odabrani $i$, odredimo $j$ tako da zadovoljava nejednadžbu (2.42), dok je vrijednost za $m$ dana s $m = 2i - j - 1$, čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Prilikom dokazivanja ovog teorema koristili smo tehničku lemu:

**Lema 2.19.** *Neka je $d \in \mathbb{R}$, $d > 1$. Tada je $\frac{2^d-2}{3^d-2^d-1} < 1$.*

*Dokaz.* Pokažimo prvo da je funkcija $f(d) = 3^d - 2^d - 1$ rastuća za svaki $d > 1$. Kako je $f'(d) = 3^d \cdot \ln 3 - 2^d \cdot \ln 2$, slijedi da je $f'(d) > 0$ ako i samo ako je $3^d \cdot \ln 3 - 2^d \cdot \ln 2 > 0$, što je ispunjeno za

$$d > \frac{\ln\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)}{\ln \frac{3}{2}} = -1.1358$$

Kako je $f(1) = 0$, slijedi da je $3^d - 2^d - 1 > 0$ za svaki $d > 1$, pa nejednadžbu u lemi možemo pomnožiti tim izrazom. Sada je

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} < 1 \;\Leftrightarrow\; 2^d - 2 < 3^d - 2^d - 1 \;\Leftrightarrow\; 3^d - 2 \cdot 2^d + 1 > 0$$

Pokažimo sad da je $3^d - 2 \cdot 2^d + 1 > 0$ za svaki $d > 1$. Analiziramo li funkciju $g(d) = 3^d - 2 \cdot 2^d + 1$, slijedi kako je $g'(d) > 0$ (tj. kako je $g$ rastuća) ukoliko je $3^d \cdot \ln 3 - 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^d > 0$. Rješavanjem ove nejednadžbe dobivamo

$$d > \frac{\ln\left(\frac{2 \ln 2}{\ln 3}\right)}{\ln \frac{3}{2}} = 0.5736,$$

pa zaključujemo kako $g(d)$ raste za sve $d > 1$. Kako je $g(1) = 0$, slijedi tvrdnja leme. □

Primijetimo kako je za $d = 1$ vrijednost $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika $\beta_1^1(W_{BC})$ uvijek manja od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta svih ostalih kandidata. U tom je slučaju $d$-mjera odmaka od prvog mjesta ekvivalentna Borda izračunu na način da je kandidat sa najmanjom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta (što je zapravo cjelobrojan zbroj odstupanja od prvog mjesta u profilu $\alpha$) upravo Borda pobjednik. Poanta ove primjedbe je u tome da Teorem 2.18 pokazuje da je za proizvoljno mali odmak vrijednosti $d$ od jedan moguće naći profil na kojemu će vrijednost $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika preskočiti vrijednost mjere nekog drugog kandidata, ovoga puta većinskog pobjednika. U sljedećem primjeru prikazana je konstrukcija takvog profila za $d = 1.05$.

**Primjer 2.4.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, te neka je $d = 1.05$. Kako bi konstruirali profil $\alpha$ za kojega je $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika veća od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta većinskog pobjednika, prema Teoremu 2.18 mora biti*

$$i > \frac{2 \cdot 3^d - 2 \cdot 2^d - 1}{3^d - 2 \cdot 2^d + 1} = \frac{2 \cdot 3^{1.05} - 2 \cdot 2^{1.05} - 1}{3^{1.05} - 2 \cdot 2^{1.05} + 1} = 42.26$$

*Stavimo li $i = 43$, za $j$ slijedi*

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} < j < i - 1$$

$$\frac{2^{1.05} - 2}{3^{1.05} - 2^{1.05} - 1} \cdot 43 + \frac{1}{3^{1.05} - 2^{1.05} - 1} < j < 43 - 1$$

$$40.78 < j < 42,$$

*pa je stoga $j = 41$. Konačno, za $m$ vrijedi $m = 2i - j - 1$, pa je $m = 44$. Tako smo došli do profila*

| 44 | 43 | 41 |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $D$ |
| $B$ | $C$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |
| $D$ | $D$ | $B$ |

*Na tom je profilu većinski pobjednik kandidat $A$, dok po Borda izračunu $A$ ostvaruje rezultat 216, $B$ rezultat 217, $C$ rezultat 212, a $D$ rezultat 123, pa je Borda pobjednik kandidat $B$. Za pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta imamo*

$$\beta_1^{1.05}(A) = (43 + 41) \cdot 2^{1.05} = 173.9245$$

$$\beta_1^{1.05}(B) = 44 + 41 \cdot 3^{1.05} = 173.9455$$

*pa je d-mjera odmaka od prvog mjesta na tom profilu za većinskog pobjednika A manja od d-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika, kandidata B.*

Tvrdnja posljednjeg teorema može se poopćiti i na slučaj s $k$ kandidata, gdje je $k > 4$. Ne možemo jednostavno zaključiti kako traženi profil u slučaju kada imamo više od četiri kandidata dobivamo proširenjem profila $\alpha$ iz Teorema 2.18 tako da mu kandidate nadodamo od četvrtog mjesta nadalje u profilu, čime bi se poredak prva četiri kandidata zadržao. Razlog je taj što pobjednik po Borda izračunu na tako proširenom profilu ne mora biti isti kao i pobjednik na profilu sa četiri kandidata. No konstrukcija profila za skup sa više od četiri kandidata jest slična onoj iz Teorema 2.18.

**Teorem 2.20.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, ..., M_k\}$ skup $k$ kandidata, gdje je $k > 4$. Tada za svaki $d > 1$ postoji profil $\alpha$ nad skupom kandidata $\mathcal{M}$ takav da za pripadne d-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{PC}) < \beta_1^d(W_{BC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{PC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno većinskom izračunu na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, ..., M_k\}$ skup $k$ kandidata, gdje je $k \geq 5$, te neka je $d > 1$. Pokazati ćemo da tada postoji profil sljedećeg oblika

| $m$ | $i$ | $j$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ | $M_4$ |
| $M_2$ | $M_3$ | $M_3$ |
| $M_3$ | $M_1$ | $M_1$ |
| $M_4$ | $M_4$ | $M_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_k$ | $M_k$ | $M_k$ |

kod kojega je većinski pobjednik kandidat $M_1$, Borda pobjednik kandidat $M_2$, te je $\beta_1^d(M_1) < \beta_1^d(M_2)$.

Prvo, da bi $M_1$ bio većinski pobjednik, mora vrijediti

$$m > i, \qquad m > j. \tag{2.44}$$

Potom, Borda pobjednik može biti samo jedan od kandidata $M_1$, $M_2$, $M_3$ i $M_4$. Svi ostali kandidati su uvijek plasirani iza tih kandidata, pa ne mogu imati veći Borda rezultat od bilo kojeg od njih. Pripadni Borda rezultati navedenih kandidata su sljedeći:

$$\begin{array}{lll} M_1 & ... & m\cdot(k-1)+i\cdot(k-3)+j\cdot(k-3) \\ M_2 & ... & m\cdot(k-2)+i\cdot(k-1)+j\cdot(k-4) \\ M_3 & ... & m\cdot(k-3)+i\cdot(k-2)+j\cdot(k-2) \\ M_k & ... & m\cdot(k-4)+i\cdot(k-4)+j\cdot(k-1) \end{array}$$

Kako bi Borda rezultat kandidata $M_2$ bio veći od rezultata kandidata $M_1$, mora vrijediti:

$$m\cdot(k-2)+i\cdot(k-1)+j\cdot(k-4) > m\cdot(k-1)+i\cdot(k-3)+j\cdot(k-3)$$

$$2i > m+j, \tag{2.45}$$

što je isti uvjet kao i uvjet (2.36) u Teoremu 2.18. Potom, da bi $M_2$ imao veći rezultat od $M_3$ mora biti

$$m\cdot(k-2)+i\cdot(k-1)+j\cdot(k-4) > m\cdot(k-3)+i\cdot(k-2)+j\cdot(k-2)$$

$$m+i > 2j, \tag{2.46}$$

što je isti uvjet kao i uvjet (2.37) u Teoremu 2.18. Konačno, da bi imao veći rezultat od $M_4$, slijedi

$$m\cdot(k-2)+i\cdot(k-1)+j\cdot(k-4) > m\cdot(k-4)+i\cdot(k-4)+j\cdot(k-1)$$

$$\frac{2}{3}m+i > j, \tag{2.47}$$

što je isti uvjet kao i uvjet (2.38) u Teoremu 2.18. Budući su uvjeti za $i$, $j$ i $m$, čijim je ispunjavanjem $M_1$ većinski, a $M_2$ Borda pobjednik na profilu $\alpha$, jednaki, zaključujemo prema dokazu provedenom u Teoremu 2.18 kako za $m$, $i$ i $j$ mora vrijediti

$$j+1 \ < \ i \ < \ m \ < \ 2i-j. \tag{2.48}$$

Neka je stoga $m = 2i-j-1$, za neke $i$ i $j$ za koje je $j+1 < i$.

Usporedimo sada $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $M_1$ (većinskog pobjednika) i $M_2$ (Borda pobjednika). Želimo pokazati da za proizvoljan $d > 1$ postoje $i$, $j$ i $m$, takvi da je $i > j + 1$, te $m = 2i - j - 1$ za koje je

$$\beta_1^d(M_1) < \beta_1^d(M_2)$$

$$(i + j) \cdot 2^d < m + j \cdot 3^d,$$

što je opet jednako odgovarajućem zahtjevu u Teoremu 2.18. Postupkom jednakim kao u tom teoremu dolazimo do uvjeta koji moraju zadovoljavati $i$ i $j$ kako bi dobili tražene $d$-mjere odmaka od prvog mjesta većinskog i Borda pobjednika:

$$j > \frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1},$$

pa prema uvjetu (2.48) slijedi

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} \;<\; j \;<\; i - 1,$$

odnosno, kao i u dokazu Teorema 2.18, da bi takav $j \in \mathbb{N}$ postojao, za $i$ mora vrijediti

$$i > \frac{2 \cdot 3^d - 2 \cdot 2^d - 1}{3^d - 2 \cdot 2^d + 1}.$$

Analogno tom dokazu, zaključujemo kako prema Lemi 2.19 takav $i \in \mathbb{N}$ postoji, pa je dokazana egzistencija profila $\alpha$ za kojega vrijede tvrdnje teorema. □

Kao i u slučaju s četiri kandidata, pokažimo primjerom kako izgleda konstrukcija profila na kojemu za proizvoljan $d$ pronalazimo profil na kojemu će većinski pobjednik imati manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika:

**Primjer 2.5.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F\}$, te neka je $d = 1.02$. Kako bi konstruirali profil $\alpha$ za kojega je $d$-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika veća od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta većinskog pobjednika, prema Teoremu 2.20 mora biti*

$$i > \frac{2 \cdot 3^d - 2 \cdot 2^d - 1}{3^d - 2 \cdot 2^d + 1} = \frac{2 \cdot 3^{1.02} - 2 \cdot 2^{1.02} - 1}{3^{1.02} - 2 \cdot 2^{1.02} + 1} = 99.6875$$

*Stavimo li* $i = 100$, *za* $j$ *slijedi*

$$\frac{2^d - 2}{3^d - 2^d - 1} \cdot i + \frac{1}{3^d - 2^d - 1} < j < i - 1$$

$$\frac{2^{1.02} - 2}{3^{1.02} - 2^{1.02} - 1} \cdot 100 + \frac{1}{3^{1.02} - 2^{1.02} - 1} < j < 100 - 1$$

$$97.91 < j < 99,$$

*pa je stoga* $j = 98$. *Konačno, za* $m$ *vrijedi* $m = 2i - j - 1$, *pa je* $m = 101$. *Tako smo došli do profila*

| 101 | 100 | 98 |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $D$ |
| $B$ | $C$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |
| $D$ | $D$ | $B$ |
| $E$ | $E$ | $E$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

*Na tom je profilu većinski pobjednik kandidat* $A$, *dok po Borda izračunu* $A$ *ostvaruje rezultat* 1099, $B$ *rezultat* 1100, $C$ *rezultat* 1095, *a* $D$ *rezultat* 892, *(kandidati* $E$ *i* $F$ *ne mogu biti Borda pobjednici) pa je Borda pobjednik kandidat* $B$. *d-Mjere odmaka od prvog mjesta za Borda i većinskog pobjednika iznose*

$$\beta_1^{1.02}(A) = (100 + 98) \cdot 2^{1.02} = 401.5280$$

$$\beta_1^{1.02}(B) = 101 + 98 \cdot 3^{1.02} = 401.5313$$

*pa je d-mjera odmaka od prvog mjesta na tom profilu za većinskog pobjednika* $A$ *manja od d-mjere odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika, kandidata* $B$.

Ovim rezultatima je samo djelomično potvrđeno neformalno tretiranje Borda izračuna kao metode koja rezultira kompromisom, u usporedbi sa većinskim izračunom – naravno, u okviru tumačenja pojma kompromisa kao verzije paradoksa prebrajanja. Pokazali smo da Borda izračun uistinu kao pobjednika generira kandidata sa manjom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta, ukoliko se radi o izborima između tri kandidata. No isto tako smo vidjeli da, ukoliko se izbori provode između četiri i više kandidata, tada je za svaku razinu kompromisa (svaki izbor parametra $d > 1$) moguće konstruirati profil na kojemu će većinski pobjednik imati manju $d$- mjeru odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika.

## 2.6 Usporedba Borda i Condorcetovog izračuna

Nakon usporedbe $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za Borda i većinskog pobjednika, prirodno se postavlja pitanje u kojem su odnosu ti rezultati s $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta Condorcetovog pobjednika? Može li koncept kompromisa kao verzije paradoksa prebrajanja, dati dodatan argument na stranu Borda ili Condorcetovog izračuna? U svom radu iz 1785. godine Marquez de Condorcet navodi primjer profila koji po njegovom mišljenju predstavlja ozbiljnu kritiku Borda izračuna [25]. Promotrimo kakve su $d$-mjere odmaka od prvog mjesta za kandidate u tom primjeru.

**Primjer 2.6.** *Neka je dan sljedeći profil preferencija birača nad skupom kandidata* $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$*:*

| 30 | 1 | 29 | 10 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $A$ |

*Primijenimo li na ovom profilu Borda izračun funkcija društvenog izbora nam daje redoslijed* $B \succ A \succ C$*, dok Condorcetovom metodom redoslijed treba biti* $A \succ B \succ C$*. Izračunajmo za zadani profil d-mjere odmaka od prvog mjesta za svakog kandidata:*

$$\beta_1^d(A) = 31 \cdot 0^d + 39 \cdot 1^d + 11 \cdot 2^d = 39 + 11 \cdot 2^d$$

$$\beta_1^d(B) = 39 \cdot 0^d + 31 \cdot 1^d + 11 \cdot 2^d = 31 + 11 \cdot 2^d$$

$$\beta_1^d(C) = 11 \cdot 0^d + 11 \cdot 1^d + 59 \cdot 2^d = 11 + 59 \cdot 2^d$$

*Odavde je vidljivo da na ovom profilu Borda pobjednik (kandidat B) ima manju d-mjeru odmaka od prvog mjesta od Condorcetovog pobjednika (kandidat A) za sve vrijednosti* $d > 1$*.*

U ovom klasičnom primjeru razilaženja oko izbora pobjednika između Borda izračuna i Condorcetove metode, $d$-mjera odmaka od prvog mjesta stala je na stranu Borda izračuna.

Postavlja se pitanje je li uvijek tako u slučaju izbora između tri kandidata?

Prije nego li odgovorimo na to pitanje, trebamo istaknuti kako Condorcetov izračun nije invarijantan na dodavanje (ili oduzimanje) Condorcetovih trojki.[3] Promotrimo li obje Condorcetove trojke (vidi Tablicu 2.2 na stranici 31), vidimo da u dane tri preferencije uvijek jedan kandidat prevagne u međusobnim duelima. Primjerice, ukoliko promatramo duele kandidata $A$ i $B$, vidimo da dodavanje profila $\alpha_1^C$ nekom profilu $\alpha_1$ ojačava poziciju kandidata $A$ u odnosu na kandidata $B$ za jedan. Nasuprot tome, dodavanje profila $\alpha_2^C$ nekom profilu $\alpha_1$ ojačava poziciju kandidata $B$ u odnosu na kandidata $A$ za jedan.

Kako pri tome Borda i većinski rezultati svih kandidata (kao i njihove $d$-mjere odmaka od svih pozicija) ostaju jednake, dodavanjem određene Condorcetove trojke moguće je ciljano mijenjati profil kako bi se jednom kandidatu dala prednost pred drugim prema Condorcetovom izračunu. Tu ćemo tehniku koristiti prilikom analiziranja odnosa $d$-mjera odmaka od prvog mjesta između Borda i Condorcetovog pobjednika. Analiza se provodi kombinatorno, kao i u slučaju Lema 2.7 – 2.17, no najprije istaknimo sljedeće dvije propozicije:

**Propozicija 2.21.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da je iz njega uklonjen maksimalan broj Condorcetovih trojki, te neka je $\alpha_1$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neke permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti iz profila $\alpha_1$ dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki, te za svaki $d > 1$ i pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{BC}) < \beta_1^d(W_{CC}),$$

*gdje su $W_{BC}, W_{CC} \in \mathcal{M}$ pobjednici po Borda, odnosno Condorcetovom izračunu, za koje je $W_{BC} \neq W_{CC}$, ukoliko takav $W_{CC}$ postoji.*

[3] Pri tome naravno govorimo o izborima između tri kandidata, no koncept Condorcetovih trojki se može poopćiti na po volji velik broj kandidata, u formi maksimalno simetričnog profila

*Dokaz.* Za profil $\alpha_1$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n > m$ (zbog simetrije položaja u kojemu se nalaze kandidati $A$ i $B$), te je analizu dovoljno provesti na profilu

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $A$ | $B$ |
| $B$ | $A$ |
| $C$ | $C$ |

Sada je Borda pobjednik kandidat $A$, dok za $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi $\beta_1^d(A) = m < \beta_1^d(B) = n < \beta_1^d(C) = (n+m) \cdot 2^d$. Dakle, Borda pobjednik na profilu $\alpha_1$ ima najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta. Dodavanjem nekog broja Condorcetovih trojki profilu $\alpha_1$, kojim bi neki drugi kandidat (kandidat $B$) postao Condorcetov pobjednik na dobivanom profilu ne mijenja se odnos $d$-mjera odmaka od prvog mjesta (Propozicija 2.5), čime je dokazana tvrdnja. $\square$

Ova propozicija, koja je provedena na profilima koji se uklanjanjem Condorcetovih trojki svode na navedeni dvostupčani profil, navodi na zaključak sličan onome iskazanom za $d$-mjere odmaka od prvog mjesta većinskog i Borda pobjednika. No čim se sa analizom krene na profile koji se reduciraju na trostupčane i četvero-stupčane profile $\alpha_1$, pokazuje se da takvo očekivanje nema temelja. Promotrimo sljedeću analizu.

Neka je $\alpha$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, takav da nakon uklanjanja maksimalno mogućeg broja Condorcetovih trojki iz profila $\alpha$, dobivamo profil $\alpha_1$ oblika

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |

gdje je $\xi$ neke permutacija skupa $\mathcal{M}$. Analizirajmo koji kandidati na danom profilu $\alpha_1$ (kao i na $\alpha$) mogu biti Borda, odnosno Condorcetov pobjednik, te u kojem su odnosu pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta.

Bez smanjenja općenitosti, analizu ćemo provesti na profilu $\alpha_1$ oblika:

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ |

(2.49)

Promotrimo prvo situaciju u kojoj je kandidat $A$ pobjednik po Borda izračunu. Tada je njegov Borda rezultat, koji je jednak $2k + l$, veći od Borda rezultata kandidata $B$ koji iznosi $k + m$, kao i od Borda rezultata kandidata $C$ koji je jednak $2l + 2m$. Dakle imamo:

$$2k + l > k + m$$

$$k + l > m \tag{2.50}$$

te

$$2k + l > 2l + 2m$$
$$k > m + \frac{l}{2} \tag{2.51}$$

Za pripadne $d$-mjere odmaka od prvog mjesta vrijedi:

$$\begin{aligned}
\beta_1^d(A) &= l + m \cdot 2^d \\
\beta_1^d(B) &= k + m + l \cdot 2^d \\
\beta_1^d(C) &= k \cdot 2^d
\end{aligned}$$

Pitanje je ima li Borda pobjednik $A$ ujedno ima najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta za svaku vrijednost $d > 1$? Ispitajmo prvo vrijedi li $\beta_1^d(A) < \beta_1^d(C)$, tj. je li $l + m \cdot 2^d < k \cdot 2^d$ (uz uvjete 2.50 i 2.51):

$$l + m \cdot 2^d < (2.50) < l + (k + l) \cdot 2^d = l + k \cdot 2^d + l \cdot 2^d < k \cdot 2^d.$$

S druge strane da bi bilo $\beta_1^d(A) < \beta_1^d(B)$ mora vrijediti:

$$l + m \cdot 2^d < k + m + l \cdot 2^d$$

Iz uvjeta 2.51 slijedi:

$$k + m + l \cdot 2^d > (2.51) > m + \frac{l}{2} + m + l \cdot 2^d = 2m + \frac{l}{2} + l \cdot 2^d$$

Sad nam je cilj dokazati

$$2m + \frac{l}{2} + l \cdot 2^d > l + m \cdot 2^d$$

$$2m + l \cdot 2^d > \frac{l}{2} + m \cdot 2^d$$

$$4m + l \cdot 2^{d+1} > l + m \cdot 2^{d+1}$$

Uz pretpostavku da je $m > l$, slijedi:

$$4m - l > (m - l) \cdot 2^{d+1}$$

$$\frac{4m - l}{m - l} > 2^{d+1}$$

No ta nejednadžba ne vrijedi za svaku vrijednost $d > 1$, budući izraz $2^{d+1}$ raste neograničeno s $d$. Primjerice, za $k = 15$, $l = 2$, $m = 12$ slijedi da je $A$ Borda pobjednik, no za $d$ veći od $\frac{\ln 2.5}{\ln 2}$, npr. $d = 1.5$ vrijedi $\beta_1^{1.5}(A) = 2+12 \cdot 2^{1.5} = 35.9$, $\beta_1^{1.5}(B) = 27+2 \cdot 2^{1.5} = 32.7$, pa je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta manja za kandidata $B$, nego li kandidata $A$. Dakle, Borda pobjednik $A$ ne mora imati najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta na opisanim profilima, budući za dio tih profila postoji $d > 1$ za koji je $\beta_1^d(B) < \beta_1^d(A)$. Ispitajmo može li se dodavanjem Condorcetovih trojki $\alpha_1^C$ i $\alpha_2^C$ profilu $\alpha_1$ danom u (2.49), dobiti profil $\alpha$ na kojemu je kandidat $B$ Condorcetov pobjednik. Profil (2.49) daje nam sljedeće omjere kandidata:

$$\begin{array}{lrcl} A:B & k+l & : & m \\ A:C & k & : & l+m \\ B:C & k & : & l+m \end{array}$$

Prema uvjetu (2.50) je $m < k + l$, pa kandidat $A$ pobjeđuje kandidata $B$. Da bi $B$ pobijedio, potrebno je dodati barem $k+l-m+1$ Condorcetovih trojki $\alpha_2^C$. No dodavanjem tih trojki, mijenja se i omjer $B : C$ u korist kandidata $C$ koji iz $k : l + m$ prelazi u

$$\begin{array}{rcl} k & : & l + m + (k + l - m + 1) \\ k & : & k + 2l + 1 \end{array}$$

Odavde se sad vidi da u tom slučaju kandidat $C$ pobjeđuje kandidata $B$ pa je dodavanjem Condorcetovih trojki nemoguće postići da je kandidat $B$ pobjednik. Stoga zaključujemo da u slučaju u kojemu je kandidat $A$ pobjednik profila (2.49) Borda pobjednik na svim profilima $\alpha$ dobivenima dodavanjem Condorcetovih trojki, uistinu ima najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta.

Sljedeće, istaknimo kako kandidat $B$ ne može biti Borda pobjednik na profilu (2.49). Naime, tada bi trebalo vrijediti

$$k + m > 2k + l$$

$$k + m > 2l + 2m.$$

Zbrajanjem tih dviju nejednadžbi dobivamo

$$2k + 2m > 2k + 3l + 2m,$$

što je nemoguće.

Konačno, neka je kandidat $C$ Borda pobjednik na profilu (2.49). Tada mora vrijediti

$$2l + 2m > 2k + l$$

$$l + 2m > 2k \tag{2.52}$$

te

$$2l + 2m > k + m$$

$$2l + m > k \tag{2.53}$$

Treba primijetiti da je ispunjavanjem uvjeta (2.52), $k < m + \frac{l}{2}$, ispunjen i uvjet (2.53), $k < m + 2l$. Što se tiče $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $A$ i $C$, provjerimo vrijedi li $\beta_1^d(C) < \beta_1^d(A)$:

$$k \cdot 2^d < l + m \cdot 2^d$$

Prema uvjetu (2.52) slijedi

$$k \cdot 2^d < \left(m + \frac{l}{2}\right) \cdot 2^d = m \cdot 2^d + \frac{l}{2} \cdot 2^d,$$

pa je tražena nejednakost dokazana ukoliko vrijedi

$$m \cdot 2^d + \frac{l}{2} \cdot 2^d < l + m \cdot 2^d$$

$$\frac{l}{2} \cdot 2^d < l$$

$$2^{d-1} < 1$$

$$d - 1 < 0,$$

što je neistina za sve $d > 1$. Dakle, zaključujemo kako $d$-mjera odmaka od prvog mjesta Borda pobjednika $C$ nije manja od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta kandidata $A$. No, može li $A$ biti Condorcetov pobjednik?

Omjer $A : C$ na profilu $\alpha_1$ iznosi $k : m{+}l$. Kako je prema uvjetu (2.52) $k < m+\frac{l}{2} < m+l$, slijedi da $C$ pobjeđuje $A$ i to za $m+l-k$. Kako bi $A$ pobijedio $C$, profilu $\alpha_1$ treba dodati $m+l-k+1$ Condorcetovih trojki $\alpha_2^C$. No tada se omjer $A : B$ poveća u korist kandidata $B$ za istu vrijednost, pa tada na profilu $\alpha$ imamo da je $A : B$ jednako

$$k + l : m + m + l - k + 1.$$

Provjerimo da li je u tom slučaju kandidat $A$ pobjeđuje kandidata $B$. Tada mora vrijediti:

$$k + l > m + m + l - k + 1$$

$$2k > 2m + 1$$

$$k > m - \frac{1}{2}$$

Ova nejednadžba, zajedno sa uvjetom (2.52) nam daje kriterij za vrijednost $k$ (u profilu $\alpha_1$) koja osigurava kandidatu $A$ pobjedu po Condorcetovom izračunu.

$$m - \frac{1}{2} < k < m + \frac{l}{2} \tag{2.54}$$

Konstrukcija profila $\alpha$ oblika danog u (2.49) koji zadovoljava uvjete (2.52), (2.53) i (2.54) te koji daje Condorcetovog pobjednika sa manjom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika dana je u Primjeru 2.7.

**Primjer 2.7.** *Neka je skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, te neka je dan profil $\alpha_1$ u kojemu je $k = 11$, $l = 4$ i $m = 10$:*

| 11 | 4 | 10 |
|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ |

*Lako se vidi da ove vrijednosti za $k$, $l$ i $m$ zadovoljavaju uvjete (2.52), (2.53) i (2.54). Borda pobjednik na profilu $\alpha_1$ je kandidat $C$ sa Borda izračunom 28, naprema $A$ koji postiže 26 i $B$ s 21. S druge strane za d-mjere odmaka od prvog mjesta imamo:*

$$\begin{aligned}\beta_1^d(A) &= 4 + 10 \cdot 2^d,\\ \beta_1^d(B) &= 21 + 4 \cdot 2^d,\\ \beta_1^d(C) &= 11 \cdot 2^d,\end{aligned}$$

*pa je $\beta_1^d(A) < \beta_1^d(C)$ za $d > 2$. Prema kriteriju izvedenom u prethodnoj analizi, profilu $\alpha_1$ treba dodati $m + l - k + 1 = 10 + 4 - 11 + 1 = 4$ Condorcetovih trojki $\alpha_2^C$ kako bi dobili profil $\alpha$ u kojemu je kandidat $A$ pobjednik po Condorcetu. Tako dobivamo profil $\alpha$:*

| 11 | 4 | 14 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $B$ | $C$ |

*u kojemu, prema Propoziciji 2.5 i dalje vrijedi $\beta_1^d(A) < \beta_1^d(C)$ za $d > 2$, dok Condorcetov izračun daje sljedeće omjere među kandidatima:*

$$A : B = 19 : 18, \qquad A : C = 19 : 18,$$

*pa je kandidat $A$ pobjednik po Condorcetovom izračunu s manjom d-mjerom odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika, kandidata $C$ za sve $d > 2$.*

U ovoj smo analizi vidjeli kako situacija sa usporedbom $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za pobjednike po Borda i Condorcetovom izračunu nije tako jednoznačna kao u slučaju uspoređivanja Borda i većinskog pobjednika. Štoviše, analize slične prethodnoj daju jednake rezultate na svim trostupčanim i četvero stupčanim reduciranim profilima $\alpha_1$ – u svakom od tih slučajeva moguće je pronaći nadopunu reduciranog profila $\alpha_1$ nekim brojem Condorcetovih trojki kojima se dobiva profil $\alpha$ na kojemu Condorcetov pobjednik ima manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta od Borda pobjednika (kao što smo to na primjer uspjeli u analizi reduciranog profila $\alpha_1$ na stranici 66 u situaciji kada je kandidat $C$ bio Borda pobjednik na profilu).

No s druge strane, na velikom dijelu tih istih profila u određenim se slučajevima (kao u situaciji kada je u prethodnoj analizi kandidat $A$ bio Borda pobjednik na profilu $\alpha_1$) ne može konstruirati profil $\alpha$ na kojemu bi Condorcetov pobjednik imao manju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta nego li Borda pobjednik.

Zaključno, usporedba $d$-mjera odmaka od prvog mjesta nije dala dodatni razlog zbog kojega bi Borda izračun mogli proglasiti ”boljim” ili ”ispravnijim” od Condorcetovog izračuna. Još je Saari istaknuo izostanak invarijantnosti Condorcetovog izračuna na dodavanje ili uklanjanje Condorcetovih trojki (dakle, maksimalno simetričnih dijelova profila) kao veliki nedostatak Condorcetovog izračuna [32]. No ukoliko se ta kritika ne prihvati kao osnovana, sama $d$-mjera odmaka od prvog mjesta ne donosi nove argumente u tu raspravu po osnovi ”kompromisnosti” kako je opisana u ovom radu.

# Poglavlje 3

# Funkcije društvenog izbora d-mjere odmaka

U prošlom smo se poglavlju bavili $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta, odnosno samo jednim aspektom $d$-mjere odmaka – onim koji nam govori koliko neki kandidat prema toj mjeri odstupa od pobjedničke pozicije. No $d$-mjera odmaka daje nam puno širu i bogatiju informaciju; pomoću nje možemo za svakoga kandidata iskazati koliko odstupa od bilo koje pozicije u poretku danih kandidata, što su podaci sadržani u matrici $d$-mjere odmaka $M_\alpha^d$ koja je definirana u Definiciji 2.2. Također, u dosadašnjem dijelu rada bavili smo se usporedbom $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za već definirane funkcije društvenog izbora. Sljedeći korak u analizi $d$-mjere odmaka je konstrukcija novih funkcija društvenog izbora, kojima će temelj biti neka vrsta minimizacije $d$-mjere odmaka danih u matrici $M_\alpha^d$.

## 3.1 Funkcija društvenog izbora SdM

Najjednostavniji način kriterij minimizacije $d$-mjere odmaka, jest minimizacija $d$-mjere odmaka od prvog mjesta, odnosno informacija sadržanih samo u prvom stupcu matrice $M_\alpha^d$. Poredak kandidata u tom slučaju određujemo veličinom je $d$-mjere odmaka od prvog mjesta; kandidat sa najmanjom $d$-mjerom odmakom je prvoplasiran, kandidat sa sljedećom po veličini $d$-mjerom odmaka je drugoplasiran, i tako dalje do posljednje plasiranog kandidata koji ima najveću $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta. Na taj način definiramo funkciju društvenog izbora SdM, "*Simple d-Measure*".[1]

**Definicija 3.1.** *Neka je* $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ *skup kandidata,* $d > 1$ *realan broj, te* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *neki profil nad danim skupom kandidat* $\mathcal{M}$. *Neka je sa* $M^d(\alpha) = \left[\beta_j^d(M_i)\right]$ *označena pripadna matrica d-mjera odmaka. Funkcija društvenog izbora* $SdM : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ *definirana je na sljedeći način: neka je s*

$$\beta_1^d(M_{i_1}) < \beta_1^d(M_{i_2}) < ... < \beta_1^d(M_{i_k})$$

*dan strogi linearni poredak vrijednosti d-mjera odmaka od prvog mjesta svih kandidata. Tada je*

$$SdM(\alpha) = M_{i_1} \succ M_{i_2} \succ M_{i_3} \succ ... \succ M_{i_k}.$$

*Ukoliko takav strogi linearni poredak ne postoji, funkcija društvenog izbora SdM za takav* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *nije definirana.*

U teoriji funkcija društvenog izbora navode se aksiomi čijim se zadovoljavanjem uopće može govoriti o tome je li neka funkcija dobro definirana na danom profilu. Tako se od funkcija društvenog izbora traži da budu *anonimne*, *neutralne* i definirane nad *univerzalnom domenom.*[25]

Za funkciju društvenog izbora kažemo da je *anonimna* ukoliko imena birača ne utječu na rezultat funkcije društvenog izbora; ako dvoje birača zamijene svoje preferencije rezultat funkcije društvenog izbora se neće promijeniti (Definicija 1.4). Funkcija društvenog izbora je *neutralna* ukoliko imena kandidata ne utječu na rezultat; ako dvoje kandidata zamjene svoje pozicije u profilu, tada će se zamijeniti i njihove pozicije u rezultatu funkcije društvenog izbora (Definicija 1.5). I konačno, za funkciju društvenog izbora kažemo da je definirana nad *univerzalnom domenom* ukoliko su birači slobodni formirati bilo koju vrstu izbora; ne postoji poredak ili kandidat koji je unaprijed izuzet iz mogućnosti izbora za svakog pojedinog birača.

Formalno, funkcija društvenog izbora dakle treba biti totalna funkcija nad prostorom svih linearnih profila, no u tom slučaju postoje profili kojima funkcija ne može pridružiti strogi linearni poredak kao rezultat. Primjer takvog profila je Condorcetova trojka kojemu niti jedna anonimna, neutralna funkcija društvenog izbora ne može pridružiti jedinstveni

[1] Za ime funkcije društvenog izbora je izabrana kratica punog imena na engleskom jeziku, kako bi se zadržala ista notacija i u objavama na engleskom jeziku. [12, 13, 15]

strogi linearni poredak kao rezultat. Takav pristup je kritizirao i Saari [29], ističući kako je prirodno da funkcija generira svoje područje definicije, te da se nametanjem zahtjeva univerzalnosti domene svim funkcijama društvenog izbora nužno generiraju paradoksalni rezultati. S tim na umu, kao i s ciljem jednostavnijeg i jasnijeg iskazivanja rezultata koji sadržajno opisuju fundamentalna svojstva ovako definiranog pristupa pojmu kompromisa, u ovom smo se radu odlučili za definiciju funkcija društvenog izbora sa suženom domenom, kako bi rezultati uvijek bili strogi linearni poreci.

Istaknimo jedan trivijalan rezultat koji navodimo bez formalnog dokaza:

**Propozicija 3.2.** *Funkcija društvenog izbora SdM je anonimna i neutralna za svaku vrijednost $d > 1$.*

Jedno od osnovnih svojstava koje se ispituje kod funkcija društvenog izbora jest svojstvo *monotonosti* (Definicije 1.6 i 1.7). Za funkciju društvenog izbora kažemo da je monotona, ukoliko kada u profilu kod svih birača redoslijed preferencija svih kandidata ostane isti, a samo kod jednog birača jedan kandidat popravi svoj plasman u redoslijedu preferencija tog birača, tada taj kandidat ne može u rezultatu funkcije društvenog izbora nad novim profilom pokvariti svoj plasman u redoslijedu preferencija.[2]

Primjerice ako jedan birač ima preferencije $A \succ B \succ C$, te promijeni svoje preferencije u $B \succ A \succ C$ dok kod svih ostalih birača preferencije ostanu iste, tada monotona funkcija društvenog izbora na novom profilu ne smije kandidata $B$ rangirati gore nego li je bio rangiran u poretku temeljenom na prvom profilu. Klasičan primjer monotone funkcije društvenog izbora je Borda sustav. [23]

**Teorem 3.3.** *Funkcija društvenog izbora SdM je (jako) monotona za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Iako dokaz ove tvrdnje možemo provesti i jednostavnije, uvesti ćemo pojmove koji će nam biti korisni u daljnjem radu. Neka je sa $\alpha$ označen neki profil (u domeni funkcije društvenog izbora SdM). Sa $\alpha'$ označimo profil u kojemu su svi birači zadržali svoje preferencije nad kandidatima $M_1, ..., M_k$, osim jednog birača u čijoj su preferenciji kandidati $M_i$ i $M_j$ zamijenili mjesta, pri čemu je kandidat $M_i$ u profilu $\alpha$ kod tog birača bio lošije rangiran. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i < j$. Sa $M^d(\alpha)$

[2] U Definicijama 1.6 i 1.7 napravili smo razliku između slabe i jake monotonosti. Ističemo kako u ovom radu pojam monotonosti koristimo u njegovom jakom izričaju.

označimo matricu $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za profil $\alpha$, a sa $M^d(\alpha')$ matricu $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za profil $\alpha'$. S $\Delta^d$ označimo razliku između tih dviju matrica, tj. neka je

$$M^d(\alpha') = M^d(\alpha) + \Delta^d. \tag{3.1}$$

Rezultat funkcije društvenog izbora SdM određen je elementima prvog stupca matrica $M^d(\alpha)$ i $M^d(\alpha')$. Promotrimo kako izgleda matrica $\Delta^d$. Neka je kod birača koji je promijenio redoslijed preferencija u profilu $\alpha$ kandidat $i$ bio rangiran na poziciji $n_i$, a kandidat $M_j$ na poziciji $n_j$, dakle $n_i > n_j$. Kako svi ostali kandidati, osim kandidata $M_i$ i $M_j$ nisu mijenjali pozicije niti kod jednog birača, vrijednosti matrice $\Delta^d$ su u svim recima jednake 0 osim u $i$-tom i $j$-tom retku.

Što se tiče kandidata $M_i$, on je napredovao sa mjesta $n_i$ na mjesto $n_j$, pa su se njegove mjere odstupanja od $n$-tog mjesta smanjile za $n \in [1, (n_i + n_j)/2\rangle \cap \mathbb{N}$, povećale za $n \in \langle (n_i + n_j)/2, k] \cap \mathbb{N}$ a ostala ista za $n = (n_i + n_j)/2$ ukoliko je to prirodan broj. No za analizu ponašanja funkcije društvenog izbora SdM nam trebaju samo elementi prvog stupca matrice $\Delta^d$, pa je tada:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -(n_i - 1)^d + (n_j - 1)^d & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ -(n_j - 1)^d + (n_i - 1)^d & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Kako se svi elementi prvog stupca matrice $\Delta^d$ jednaki 0, osim onih u $i$-tom i $j$-tom retku, te kako je $-(n_i-1)^d+(n_j-1)^d < 0$ i $-(n_j-1)^d+(n_i-1)^d > 0$ zbog $n_i > n_j$, zaključujemo kako je u redoslijedu kandidata u prvom stupcu matrice $M^d(\alpha')$ kandidat $M_i$ mogao samo napredovati u odnosu na poziciju koju je imao u redoslijedu kandidata u prvom stupcu matrice $M^d(\alpha)$, te je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Još jedno često ispitivano svojstvo funkcija društvenog izbora je *Pareto učinkovitost*. Za funkciju društvenog izbora kažemo da je Pareto učinkovita kada, ako je u profilu $\alpha$ kod svih birača jedan kandidat pozicioniran ispred drugog kandidata, tada je i u rezultatu funkcije društvenog izbora prvi kandidat pozicioniran ispred drugog kandidata (Definicija 1.8).

**Teorem 3.4.** *Funkcija društvenog izbora SdM je Pareto učinkovita za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Neka je $\alpha$ profil nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ takav da je u njemu kandidat $M_i$ uvijek rangiran ispred kandidata $M_j$. Dakle, $\alpha$ je oblika

| $i_1$ | $\cdots$ | $i_l$ |
|---|---|---|
| $M_i$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\cdots$ | $M_i$ |
| $M_j$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\cdots$ | $M_j$ |

Prilikom računanja $d$-mjere odmaka od prvog mjesta, $\beta_1^d(M_i)$ i $\beta_1^d(M_j)$ u svakom stupcu, kod kandidata $M_i$ se zbraja vrijednost $n_i^d$ a kod kandidata $M_j$ vrijednost $m_i^d$, gdje je $n_i < m_i$ budući je kandidat $M_i$ bolje plasiran od kandidata $M_j$, pa je i udaljenost njegove pozicije od prvog mjesta ($n_i$) manja od udaljenosti pozicije kandidata $M_j$ od prve pozicije ($m_i$). Slijedi da je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta (dakle, suma po svim stupcima profila) za kandidata $M_i$ manja od $d$-mjere odmaka od prvog mjesta kandidata $M_j$. Budući metoda SdM kandidate rangira samo prema vrijednostima $d$-mjere odmaka od prvog mjesta, slijedi tvrdnja teorema. □

Nakon što smo pokazali da funkcija društvenog izbora SdM zadovoljava zahtjev monotonosti i Pareto učinkovitosti, pozabaviti ćemo se sa još dva svojstva koja u svom radu iz 1975. godine koristi Young, aksiomom *učvršćenja* i aksiomom *neprekidnosti* (Definicije 1.9 i 1.10). [38]

**Propozicija 3.5.** *Funkcija društvenog izbora SdM zadovoljava aksiom učvršćenja za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Kako je funkcija društvenog izbora SdM (Definicija 3.1) definirana na način da je njezin rezultat strogi linearan poredak kandidata, tako je skup pobjednika na profilima konstruiranima nad skupovima birača $S_1$ i $S_2$ u oba slučaja jednočlan skup. Stoga treba dokazati da, ukoliko je isti kandidat (iz skupa kandidata $\{M_1, ..., M_k\}$), u oznaci $M_w$, pobjednik prema SdM metodi na profilima definiranima nad skupovima $S_1$ i $S_2$, tada je $M_w$ pobjednik i na profilu definiranom nad skupom birača $S_1 \cup S_2$. Pretpostavimo stoga da je pretpostavka ove tvrdnje ispunjena. Tada prema Definiciji 3.1 (za svaki $d > 1$) vrijedi

$$\beta_1^d(M_w, S_1) = \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_1),$$

gdje je sa $\beta_1^d(M_w, S_1)$ označena $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata $M_w$, $\beta_1^d(M_w)$ na profilu definiranom nad skupom birača $S_1$. Isto tako vrijedi i

$$\beta_1^d(M_w, S_2) = \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_2).$$

Za $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta (za svakog kandidata $M_i$) na profilu definiranom nad skupom birača $S_1 \cup S_2$ pak vrijedi

$$\beta_1^d(M_i, S_1 \cup S_2) = \beta_1^d(M_i, S_1) + \beta_1^d(M_i, S_2)$$

budući se $d$-mjera odmaka (od prvog mjesta) dobiva kao zbroj po svim preferencijama skupa birača, pa je stoga

$$\beta_1^d(M_w, S_1 \cup S_2) = \beta_1^d(M_w, S_1) + \beta_1^d(M_w, S_2) =$$

$$= \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_1) + \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_2) \leq \min_{j=1,\dots,k} \big(\beta_1^d(M_j, S_1) + \beta_1^d(M_j, S_2)\big) =$$
$$= \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_1 \cup S_2),$$

čime je dokazano da je $M_w$ tada pobjednik i na profilu definiranom nad skupom birača $S_1 \cup S_2$. □

**Propozicija 3.6.** *Funkcija društvenog izbora SdM zadovoljava aksiom neprekidnosti za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Neka je u skladu sa Definicijom 1.10 kandidat $A$, SdM pobjednik na profilu kojeg čine birači skupa $S_1$, a kandidat $B$ pobjednik na profilu kojeg čine birači skupa $S_2$. Tada je

$$a = \beta_1^d(A, S_1) = \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_1), \tag{3.2}$$

$$b = \beta_1^d(B, S_2) = \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j, S_2). \tag{3.3}$$

Za svaki $d > 1$ tada vrijedi da je mjera odstupanja od prvog mjesta na profilu nad skupom birača $S$, koji je sačinjen od skupa $S_2$ i $m$ kopija skupa $S_1$, te za svakog kandidata $\mathcal{M}$:

$$\beta_1^d(M, S) = \beta_1^d(M, S_2) + m \cdot \beta_1^d(M, S_1).$$

Posebno, za kandidate $A$ i $B$ vrijedi

$$\beta_1^d(A, S) = \beta_1^d(A, S_2) + m \cdot a,$$

$$\beta_1^d(B, S) = b + m \cdot \beta_1^d(B, S_1).$$

Treba pokazati da tada postoji $m \in \mathbb{N}$, takav da je

$$\beta_1^d(A, S) < \beta_1^d(B, S)$$

$$\beta_1^d(A, S_2) + m \cdot a < b + m \cdot \beta_1^d(B, S_1)$$

$$\beta_1^d(A, S_2) - b < m \cdot \left(\beta_1^d(B, S_1) - a\right)$$

Prema jednadžbama (3.2) i (3.3), kako se radi o vrijednostima koje minimiziraju $d$-mjere odmaka od prvog mjesta na profilima definiranima nad odgovarajućim skupovima, slijedi da su

$$k_1 = \beta_1^d(A, S_2) - b \qquad \text{i} \qquad k_2 = \beta_1^d(B, S_1) - a$$

pozitivni realni brojevi, za koje tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$k_1 < m \cdot k_2,$$

čime je dokazana tvrdnja propozicije. □

Nakon ove propozicije možemo iskazati i jaču karakterizaciju funkcije društvenog izbora SdM:

**Teorem 3.7.** *Funkcija društvenog izbora SdM je generalizirana pozicijska bodovna funkcija društvenog izbora za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Za dokaz ove tvrdnje poslužiti ćemo se Youngovom karakterizacijom generaliziranih pozicijskih bodovnih funkcija društvenog izbora.[38] U njegovom radu "*Social Choice*

*Scoring Functions*" je dokazana karakterizacija tog tipa funkcija društvenog izbora; funkcija društvenog izbora je generalizirana pozicijska bodovna funkcija ako i samo ako je anonimna, neutralna, te zadovoljava uvjete učvršćenja i neprekidnosti. Kako su propozicijama 3.2, 3.5 i 3.6 iskazana upravo ta svojstva funkcije društvenog izbora SdM, prema Youngovom teoremu slijedi da je SdM generalizirana pozicijska bodovna funkcija društvenog izbora za svaku vrijednost $d > 1$. □

Čak i više od toga, za dani $d > 1$ funkciju društvenog izbora SdM moguće je preciznije opisati:

**Teorem 3.8.** *Funkcija društvenog izbora SdM ekvivalentna je pozicijskoj bodovnoj funkciji društvenog izbora definiranoj nad bodovnim vektorom*

$$\vec{b} = \left[0 \;\; -1 \;\; -2^d\,, \cdots, -(k-1)^d\right]^T$$

*za svaku vrijednost $d > 1$.*

*Dokaz.* Neka je dan profil $\alpha$ koji se sastoji od preferencija $n$ birača, te na kojemu za jednog od $k$ kandidata, $M_i$, vrijedi da se u profilu $\alpha$ pojavljuje $n_{1,i}$ puta na prvom mjestu, $n_{2,i}$ puta na drugom mjestu, i tako dalje do $n_{k,i}$ puta na k-tom mjestu, gdje je $n_{1,i}+n_{2,i}+...+n_{k,i} = n$, $n_{1,i}, n_{2,i}, ..., n_{k,i} \geq 0$.
Odredimo prvo bodovnu vrijednost koju opisana pozicijska bodovna funkcija pridružuje kandidati $M_i$, te označimo tu vrijednost s $B(M_i)$. Tada je, dakle,

$$B(M_i) = 0 \cdot n_{1,i} + (-1) \cdot n_{2,i} + (-2^d) \cdot n_{3,i} + ... + \left(-(k-1)^d\right) \cdot n_{k,i} =$$

$$= -\left(n_{2,i} + 2^d \cdot n_{3,i} + ... + (k-1)^d \cdot n_{k,i}\right)$$

S druge strane, prema Definiciji 2.1 $d$-mjera odmaka od prvog mjesta kandidata $M_i$ iznosi:

$$\beta_1^d(M_i) = 0 \cdot n_{1,i} + 1 \cdot n_{2,i} + 2^d \cdot n_{3,i} + ... + (k-1)^d \cdot n_{k,i}.$$

Uočimo da su vrijednosti izračunate tim dvjema metodama jednake po apsolutnom iznosu, no suprotnih predznaka. Za svakog drugog kandidata $M_j$ tada vrijedi $B(M_i) < B(M_j)$ ako i samo ako je $\beta_1^d(M_i) > \beta_1^d(M_j)$. Kako je kod pozicijskih funkcija društvenog izbora, prvoplasirani kandidat onaj kojemu metoda pripisuje najveći broj bodova, dok je kod metode SdM pobjednik onaj kandidat s najmanjom mjerom odstupanja od prvog mjesta, slijedi da te dvije metode na istom profilu $\alpha$ kao rezultat daju isti strogi linearni poredak kandidata (ukoliko takav postoji, tj. ukoliko je funkcija društvenog izbora SdM definirana na tom profilu). □

Na samom kraju analize funkcije društvenog izbora SdM navodimo jedan rezultat koji trivijalno slijedi iz same definicije funkcije, no kojega zbog "zvučnosti" zaključka ipak nazivamo teoremom:

**Teorem 3.9.** *Neka je $d > 1$ realan broj, neka je $\mathcal{M}$ konačan skup kandidata, te neka je $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ neki profil nad tim skupom kandidata. Ukoliko je za $\alpha$ definiran linearni slijed kandidata $SdM(\alpha)$, tj. ako je $\alpha$ u domeni funkcije društvenog izbora SdM, tada za svaku drugu funkciju društvenog izbora $\Phi$, vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{SdM}) \leq \beta_1^d(W_\Phi),$$

*gdje je $W_{SdM}$ pobjednik prema SdM metodi, a $W_\Phi$ pobjednik prema funkciji društvenog izbora $\Phi$.*

Kao što smo rekli, dokaz teorema trivijalno slijedi iz Definicije 3.1, budući se poredak kandidata koji daje funkcija društvenog izbora SdM na nekom profilu $\alpha$ određuje prema $d$-mjeri odmaka $\beta_1^d$, pa je po definiciji SdM pobjednik onaj kandidat koji ima najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta.

## 3.2 Pohlepne funkcije društvenog izbora

Prilikom definiranja funkcije društvenog izbora SdM, koristili smo samo podatke iz prvog stupca matrice $d$-mjere odmaka, tj. isključivo informaciju o $d$-mjeri odmaka pojedinih kandidata od prvog mjesta. No ukoliko kod generiranja rezultata društvenog izbora želimo u obzir uzeti i komponentu "kompromisnosti" oko plasmana pojedinih kandidata da određena mjesta u strogom linearnom poretku, tada prilikom formiranja rezultata funkcije društvenog izbora određenu ulogu trebaju imati i ostale vrijednosti iz matrice $d$-mjere odmaka. Naime, moguće je zauzeti poziciju da prilikom odlučivanja o tome koji će kandidat biti plasiran, recimo na peto mjesto u poretku, odluku ne treba donositi samo na temelju informacije o $d$-mjeri odmaka pojedinog kandidata od prvog mjesta, već da bi na tu odluku trebala utjecati i informacija o $d$-mjeri odmaka kandidata od – petog mjesta.

Sljedeća funkcija društvenog izbora koju ćemo definirati također kod odlučivanja o pobjedniku naglasak stavlja na $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta; ta će funkcija za pobjednika uvijek davati kandidata sa najmanjom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta, ukoliko takav postoji. No prilikom određivanja pozicija ostalih kandidata na rezultat će utjecati i ostali stupci matrice $d$-mjere odmaka $M^d(\alpha)$.

Za dani $d > 1$ i profil $\alpha$, cilj nam je odabrati onog kandidata čija je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta najmanja. Nakon izbora pobjednika, među preostalim kandidatima ćemo izabrati onoga sa najmanjom $d$-mjerom odmaka od drugog mjesta, $\beta_2^d(M_i)$. Potom među preostalim kandidatima onoga sa najmanjom $d$-mjerom odmaka od trećeg mjesta $\beta_3^d(M_i)$, i tako dalje do posljednjeg mjesta u linearnom poretku. Ukoliko u nekom od koraka izbor nije jedinstven, tj. ukoliko postoji više kandidata sa jednakom najmanjom $d$-mjerom odmaka, zaključiti ćemo kako metoda ne daje strogi linearni poredak kao rezultat, tj. da profil $\alpha$ nije sadržan u prirodnoj domeni funkcije društvenog izbora.

Kako u svakoj iteraciji pokušavamo minimizirati $d$-mjeru odmaka (kroz svojevrstan "pohlepni" algoritam), pripadnu funkciju društvenog izbora imenovati ćemo GdM metodom (što je skraćenica za "*Greedy d-Measure*"). Opisana procedura formalno je definirana sljedećom definicijom:

**Definicija 3.10.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ skup kandidata, $d > 1$ realan broj, te $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ neki profil nad danim skupom kandidat $\mathcal{M}$. Neka je sa $M_\alpha^d = \left[\beta_j^d(M_i)\right]$ označena pripadna matrica d-mjera odmaka. Funkcija društvenog izbora $GdM : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ definirana je na sljedeći način:*

- *Neka je $M_{i_1} \in \mathcal{M}$ jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\beta_1^d(M_{i_1}) = \min_{j=1,\dots,k} \beta_1^d(M_j),$$

*ukoliko takav postoji.*

- *Neka je $M_{i_2} \in \mathcal{M} \backslash \{M_{i_1}\}$ jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\beta_2^d(M_{i_2}) = \min_{\substack{j=1,\dots,k \\ j \neq i_1}} \beta_2^d(M_j),$$

*ukoliko takav postoji.*

- *Neka je* $M_{i_3} \in \mathcal{M} \backslash \{M_{i_1}, M_{i_2}\}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\beta_3^d(M_{i_3}) = \min_{\substack{j=1,...,k \\ j \neq i_1, i_2}} \beta_3^d(M_j),$$

*ukoliko takav postoji.*

$\vdots$

- *Neka je* $M_{i_k} \in \mathcal{M} \backslash \{M_{i_1}, ..., M_{i_{k-1}}\}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\beta_k^d(M_{i_k}) = \min_{\substack{j=1,...,k \\ j \neq i_1, ..., i_{k-1}}} \beta_k^d(M_j),$$

*ukoliko takav postoji.*

*Tada je*

$$GdM(\alpha) = M_{i_1} \succ M_{i_2} \succ M_{i_3} \succ ... \succ M_{i_k}.$$

*Ukoliko u gornjem postupku nije moguće naći jedinstvene kandidate koji minimiziraju d-mjeru odmaka u svakom pojedinom koraku, kažemo da funkcija društvenog izbora GdM za takav* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *nije definirana.*

Iz same definicije funkcije društvenog izbora GdM jasno je je njome za pobjednika proglašen kandidat sa najmanjom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta, stoga sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

**Teorem 3.11.** *Neka je* $d > 1$ *realan broj, neka je* $\mathcal{M}$ *neki konačan skup kandidata, te neka je* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *neki profil nad tim skupom kandidata. Ukoliko je za* $\alpha$ *definiran linearni slijed kandidata* $GdM(\alpha)$*, tj. ako je* $\alpha$ *u domeni funkcije društvenog izbora GdM, tada za svaku drugu funkciju društvenog izbora* $\Phi$*, vrijedi*

$$\beta_1^d(W_{GdM}) \leq \beta_1^d(W_\Phi),$$

*gdje je* $W_{GdM}$ *pobjednik prema GdM metodi, a* $W_\Phi$ *pobjednik prema funkciji društvenog izbora* $\Phi$*.*

Sljedeći primjer pokazuje kako "*greedy*", pohlepna konstrukcija GdM funkcije društvenog izbora dovodi do neočekivanih i intuitivno neprihvatljivih rezultata.

**Primjer 3.1.** *Neka je profil* $\alpha$ *nad skupom kandidata* $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E\}$ *dan s*

| 38 | 3 | 10 |
|---|---|---|
| $A$ | $E$ | $B$ |
| $B$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |
| $D$ | $C$ | $D$ |
| $E$ | $D$ | $E$ |

*te neka je* $d = 2$*. Sličan primjer moguće je konstruirati i za druge vrijednosti parametra* $d$*, no ovdje koristimo tu vrijednost radi preglednosti rezultata.*

Pripadna matrica $d$-mjera odmaka tada glasi

$$M_\alpha^d = \begin{bmatrix} 52 & 51 & 152 & 355 & 660 \\ 41 & 10 & 81 & 254 & 529 \\ 189 & 50 & 13 & 78 & 245 \\ 351 & 175 & 60 & 27 & 48 \\ 768 & 435 & 204 & 75 & 3 \end{bmatrix}$$

Sada je u prvom stupcu matrice minimalni element 41, što znači da prvo mjesto po GdM metodi pripada kandidatu $B$, koji je to mjesto zauzeo manjom mjerom od sljedeće rangiranog, kandidata $A$. U drugom stupcu, nakon što izuzmemo vrijednost mjere kandidata $B$, najmanja je vrijednost 50, pa drugo mjesto prema GdM metodi pripada kandidatu $C$ – koji je to mjesto zauzeo ispred kandidata $A$. U trećem stupcu, birajući između $d$-mjera odmaka od trećeg mjesta kandidata $A$, $D$ i $E$ izabiremo kandidata $D$ čija je $d$-mjera odmaka od trećeg mjesta jednaka 60. U četvrtom stupcu, birajući između vrijednosti $d$-mjera odmaka od četvrtog mjesta kandidata $A$ i $E$, GdM metoda bira kandidata $E$. Posljednje mjesto preostalo je za kandidata $A$.

$$M_\alpha^d = \begin{bmatrix} 52 & 51 & 152 & 355 & \mathbf{660} \\ \mathbf{41} & \cancel{10} & \cancel{81} & \cancel{254} & \cancel{529} \\ 189 & \mathbf{50} & \cancel{13} & \cancel{78} & \cancel{245} \\ 351 & 175 & \mathbf{60} & \cancel{27} & \cancel{48} \\ 768 & 435 & 204 & \mathbf{75} & \cancel{3} \end{bmatrix}$$

Dakle, rezultat GdM metode na ovom profilu je $B \succ C \succ D \succ E \succ A$. Do takvog rasporeda je došlo zbog toga što je, po *greedy* kriteriju, kandidat $A$ pri odlučivanju o svakoj poziciji gubio (kao drugoplasirani u tom trenutnom izboru) od nekog drugog kandidata.

Takav je rezultat intuitivno neprihvatljiv. Ukoliko prihvatimo argumentaciju koja stoji iza $d$-mjere odmaka, prihvatljivo je da kandidat $A$, iako je uvjerljivi Borda i većinski pobjednik, bude plasiran iza kandidata $B$ koji ima manju mjeru odmaka od prvog mjesta. No u istom primjeru, kandidat $A$ je plasiran i nakon kandidata $E$, koji je u svim preferencijama birača plasiran nakon kandidata $A$.

Stoga nam Primjer 3.1 pokazuje da funkcija društvenog izbora GdM nije Pareto učinkovita, što je svojstvo koje često iskazuje kao jedno od osnovnih svojstava koje funkcija društvenog izbora treba zadovoljavati.

Postoji način kako se ovaj manjak pohlepnog pristupa može anulirati – umjesto da u svakom koraku "pohlepno" minimiziramo samo $d$-mjeru odmaka od pripadnog mjesta u poretku, minimizaciji se može prići i kumulativno. Cilj je dakle u svakom koraku metode minimizirati kumulativnu $d$-mjeru odmaka, odnosno sumu svih $d$-mjera odmaka do pozicije koju u tom trenutku dodjeljujemo u ukupnom poretku.

Tako ćemo u prvom koraku pobjednikom proglasiti kandidata sa minimalnom $d$-mjerom odmaka od prvog mjesta; u drugom koraku ćemo za drugoplasiranog kandidata izabrati onoga koji među preostalim kandidatima ima najmanji zbroj $d$-mjera odmaka od prvog i drugog mjesta; u trećem koraku, među preostalim kandidatima biramo onoga koji ima najmanju sumu $d$-mjera odmaka od prvog, drugog i trećeg mjesta, i tako dalje. Formalna definicija tako opisane metode, koju ćemo nazvati CGdM (kao kraticu za "*Cumulative Greedy d-Measure*") dana je u sljedećoj definiciji:

**Definicija 3.12.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ skup kandidata, $d > 1$ realan broj, te $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ neki profil nad danim skupom kandidat $\mathcal{M}$. Neka je sa $M_\alpha^d = \left[\beta_j^d(M_i)\right]$ označena* *pripadna matrica d-mjera odmaka. Funkcija društvenog izbora* $CGdM : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ *definirana je na sljedeći način:*

- *Neka je* $M_{i_1} \in \mathcal{M}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\beta_1^d(M_{i_1}) = \min_{j=1,\dots,k} \left(\beta_1^d(M_j)\right),$$

  *ukoliko takav postoji.*

- *Neka je* $M_{i_2} \in \mathcal{M}\backslash\{M_{i_1}\}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\sum_{l=1}^{2} \beta_l^d(M_{i_2}) = \min_{\substack{j=1,\dots,k \\ j\neq i_1}} \left(\sum_{l=1}^{2} \beta_l^d(M_j)\right),$$

  *ukoliko takav postoji.*

- *Neka je* $M_{i_3} \in \mathcal{M}\backslash\{M_{i_1}, M_{i_2}\}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\sum_{l=1}^{3} \beta_l^d(M_{i_3}) = \min_{\substack{j=1,\dots,k \\ j\neq i_1,i_2}} \left(\sum_{l=1}^{2} \beta_l^d(M_j)\right),$$

  *ukoliko takav postoji.*

  $\vdots$

- *Neka je* $M_{i_k} \in \mathcal{M}\backslash\{M_{i_1}, ..., M_{i_{k-1}}\}$ *jedinstveni kandidat za kojeg je*

$$\sum_{l=1}^{k} \beta_l^d(M_{i_k}) = \min_{\substack{j=1,\dots,k \\ j\neq i_1,\dots,i_{k-1}}} \left(\sum_{l=1}^{k} \beta_l^d(M_j)\right),$$

  *ukoliko takav postoji.*

*Tada je*

$$CGdM(\alpha) = M_{i_1} \succ M_{i_2} \succ M_{i_3} \succ ... \succ M_{i_k}.$$

*Ukoliko u gornjem postupku nije moguće naći jedinstvene kandidate koji minimiziraju mjeru d-konsenzusa u pojedinom koraku, kažemo da funkcija društvenog izbora CGdM za takav* $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ *nije definirana.*

Upotrijebimo li opisanu metodu na Primjeru 3.1, dobivamo sljedeće: u prvom stupcu matrice $M$ najmanju $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta ima kandidat $B$, stoga je on prvoplasiran. Kod određivanja kumulativnih $d$-mjera odmaka za drugo mjesto imamo $\beta_1^2(A)+\beta_2^2(A) = 103$, $\beta_1^2(C) + \beta_2^2(C) = 239$, $\beta_1^2(D) + \beta_2^2(D) = 526$ i $\beta_1^2(E) + \beta_2^2(E) = 1203$, pa je prema CGdM metodi drugoplasirani kandidat $A$. Kumulativna odstupanja za treću poziciju preostalih kandidata iznose: $\beta_1^2(C)+\beta_2^2(C)+\beta_3^2(C) = 252$, $\beta_1^2(D)+\beta_2^2(D)+\beta_3^2(D) = 586$ i $\beta_1^2(E)+\beta_2^2(E)+\beta_3^2(E) = 1407$, pa je stoga kandidat $C$ trećeplasirani. Za određivanje četvrte pozicije, uspoređujemo kumulativne sume $d$-mjera odmaka za kandidate $D$ i $E$: $\beta_1^2(D) + \beta_2^2(D) + \beta_3^2(D) + \beta_4^2(D) = 613$, te $\beta_1^2(E) + \beta_2^2(E) + \beta_3^2(E) + \beta_4^2(E) = 1482$, pa je stoga kandidat $D$ četvero plasirani, a kandidat $E$ posljednji. Dakle rezultat funkcije društvenog izbora CGdM je $CGdM(\alpha) = B \succ A \succ C \succ D \succ E$.

Primijetimo da nam isti poredak daje i SdM metoda, budući su upravo tim redoslijedom poredane $d$-mjere odmaka od prvog mjesta, koja se nalaze u prvom stupcu matrice $M$. No, ne vrijedi da SdM i CGdM metode daju uvijek isti rezultat. Promotrimo sljedeći primjer:

**Primjer 3.2.** *Neka je profil $\alpha$ nad skupom kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ dan s*

| 5 | 4 |
|---|---|
| $A$ | $C$ |
| $B$ | $A$ |
| $C$ | $B$ |

,

*te neka je $d = 2$. Pripadna matrica d-mjera odmaka tada glasi*

$$M^2(\alpha) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 24 \\ 21 & 4 & 5 \\ 20 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

*Sada vidimo (prema prvom stupcu matrice $M^2(\alpha)$) kako metoda SdM kao rezultat daje poredak $A \succ C \succ B$. Kod metode CGdM prvo mjesto također zauzima kandidat $A$ zbog najmanje d-mjere odmaka od prvog mjesta, no kada krenemo računati kumulativna odstupanja za drugu poziciju dobivamo $\beta_1^2(B) + \beta_2^2(B) = 25$, $\beta_1^2(C) + \beta_2^2(C) = 29$, te je rezultat CGdM metode poredak $A \succ B \succ C$ (što bi u ovom primjeru dala i GdM metoda).*

**Teorem 3.13.** *Neka su $M_1, M_2, ..., M_k$ kandidati, te neka je s $\alpha$ dan profil u kojemu se $k_1$ birača opredijelilo za preferenciju (poredak)*

$$M_{\xi(1)} \succ M_{\xi(2)} \succ ... \succ M_{\xi(k)} \tag{3.4}$$

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathbb{N}_k$, a preostalih $k_2$ birača za neke druge preferencije (poretke) definirane na tom skupu kandidata.*
*Ukoliko u profilu $\alpha$ mijenjamo samo broj birača $k_1$, tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $k_1 > k_0$ rezultat funkcije društvenog izbora CGdM upravo preferencija 3.4.*

*Dokaz.* Profil $\alpha$ općenito možemo zapisati u obliku:

| $k_1$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $\cdots$ | $k_{2,i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $M_{\xi(1)}$ | $M_{\xi_1(1)}$ | $M_{\xi_2(1)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(1)}$ |
| $M_{\xi(2)}$ | $M_{\xi_1(2)}$ | $M_{\xi_2(2)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(2)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_{\xi(k)}$ | $M_{\xi_1(k)}$ | $M_{\xi_2(k)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(k)}$ |

za neki broj preferencija $i$, $i < k_2$, takvih da je $k_{2,1}+k_{2,2}+\cdots+k_{2,i} = k_2$, $k_{2,1}, k_{2,2}, \cdots, k_{2,i} \in \mathbb{N}$. Promotrimo sad preferenciju $M_{\xi(1)} \succ \cdots \succ M_{\xi(k)}$ i pripadne pozicije u matrici $M^d(\alpha)$. Tako se $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata $M_{\xi(1)}$, $\beta_1^d(M_{\xi(1)})$ nalazi u prvom stupcu i $\xi(1)$-tom retku matrice, $d$-mjera odmaka od drugog mjesta kandidata $M_{\xi(2)}$, $\beta_2^d(M_{\xi(2)})$ u drugom stupcu i $\xi(2)$-tom retku, itd. Na svim tim mjestima u matrici $M_\alpha^d$ nalaze se vrijednosti koje *ne ovise* o vrijednosti $k_1$, budući one točno opisuju preferenciju prikazanu u prvom stupcu profila, pa ne postoje odmaci koji bi se množili s $k_1$.

Stoga, pri odabiru kandidata koji će biti izabran na prvo mjesto u rezultatu funkcije CGdM, postoji dovoljno velik $k_{0,1} \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k_1 > k_{0,1}$ vrijedi da je $d$-mjera odmaka od prvog mjesta najmanja upravo za $M_{\xi(1)}$. Nakon što tog kandidata izuzmemo iz skupa iz kojeg biramo drugoplasiranog kandidata, od preostalih kandidata, kandidat $M_{\xi(2)}$ će u drugom stupcu matrice $M^d$ jedini imati vrijednost koja ne ovisi o $k_1$. Dok će među preostalim kandidatima taj isti kandidat imati najmanji faktor koji množi $k_1$ u prvom stupcu matrice (zbog toga što je u preferenciji koja je vezana uz $k_1$ na drugoj poziciji, dakle najbliže prvoj poziciji od preostalih kandidata). Odavde pak zaključujemo kako postoji $k_{0,2} \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k_1 > k_{0,2}$ vrijedi da je suma $d$-odmaka od prvog i drugog mjesta najmanja upravo za $M_{\xi(2)}$. Analogno zaključujemo i za ostale kandidate, sljedeći poredak preferencije vezane uz $k_1$. Konačno, zaključujemo kako funkcija društvenog izbora za $k_1 > \max_{i=1,\ldots,k}(k_{0,i})$ za rezultat daje preferenciju (3.4). □

Kumulativna pohlepna metoda minimizacije $d$-mjere odmaka kombinatorno je vrlo zahtjevan sustav za analizu. Stoga ćemo u ovom radu proučiti ponašanje funkcije u slučaju s tri kandidata, dok opći slučaj s više od tri kandidata ostaje otvorena tema za daljnje istraživanje.

**Teorem 3.14.** *Funkcija društvenog izbora CGdM na skupu od tri kandidata je Pareto učinkovita za svaku vrijednost parametra $d > 1$.*

*Dokaz.* Svaki profil $\alpha$ koji zadovoljava uvjet Paretovog aksioma ($A \succ B$ u svim preferencijama profila) je oblika

| $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $B$ |

za neke $l, m, n \geq 0$. Pripadna matrica $d$-odmaka je tada jednaka:

$$M^d(\alpha) = \begin{bmatrix} n & l+m & n+(l+m)\cdot 2^d \\ l+(m+n)\cdot 2^d & m+n & l \\ m+l\cdot 2^d & l+n & m+n\cdot 2^d \end{bmatrix}.$$

Odmah je jasno kako kandidat $B$ ne može biti prvoplasirani po CGdM metodi (zbog usporedbe $d$-odmaka od prvog mjesta s kandidatom $A$). Nadalje, ukoliko je kandidat $A$ plasiran na prvo mjesto, teorem je dokazan. Pretpostavimo stoga da je kandidat $C$ plasiran na prvo mjesto.[3] Neispunjavanje Paretovog aksioma tada povlači da kandidat $B$ mora biti plasiran na drugo mjesto CGdM metode, odnosno da vrijedi

$$\beta_1^d(B) + \beta_2^d(B) < \beta_1^d(A) + \beta_2^d(A)$$

$$m + n + l + (m+n)\cdot 2^d < m + n + l$$

[3]Ta pretpostavka povlači nejednakost $n > m + l \cdot 2^d$, no pokazati će se kako taj uvjet nije potreban za dokaz tvrdnje teorema.

$$(m+n) \cdot 2^d < 0$$

što nije moguće ispuniti. Slijedi tvrdnja teorema. □

Kao što smo definirali u Poglavlju 1.3, monotonost funkcija društvenog izbora možemo gledati u jačoj i slabijoj formi (Definicije 1.6 i 1.7). Kod slabe monotonosti tražimo da kandidat ne pokvari plasman u rezultatu funkcije društvenog izbora ako u jednoj preferenciji profila zamijeni mjesto s drugim kandidatom koji je pozicioniran ispred njega u toj preferenciji. Kod jake monotonosti također tražimo da kandidat ne pokvari svoj plasman u rezultatu funkcije društvenog izbora, no ovoga puta dozvoljavamo sve promjene jedne preferencije u profilu u kojima je promatrani kandidat napredovao.

Dokažimo prvo sljedeći rezultat za funkciju društvenog izbora CGdM nad skupom od tri kandidata:

**Teorem 3.15.** *Funkcija društvenog izbora CGdM na skupu od tri kandidata je slabo monotona za svaku vrijednost parametra $d > 1$.*

*Dokaz.* Za dokaz slabe monotonosti trebamo analizirati promjene profila nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, u kojima u jednoj preferenciji neki kandidat (recimo kandidat $A$) zamijeni mjesto s nekim više rangiranim kandidatom u toj preferenciji. Moguće su tri takve situacije:

**(a)** preferencija $B \succ A \succ C$ prelazi u $A \succ B \succ C$

**(b)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $B \succ A \succ C$

**(c)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $A \succ C \succ B$

Profil prije promjene jedne preferencije ćemo označiti s $\alpha$, a nakon promjene s $\alpha'$.
U slučaju (a), promotrimo matricu promjena $d$-mjera odmaka $\Delta^d = M^d(\alpha) - M^d(\alpha')$:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1+2^d \\ +1 & -1 & +1-2^d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo kako se samo za kandidata $A$ smanjuje $d$-mjera odmaka od prvog mjesta, $\beta_1^d(A)$. Također, vrijedi $\beta_1^d(K) + \beta_2^d(K) = 0$ za sve kandidate $K \in \{A, B, C\}$. Zaključujemo kako stoga kandidat $A$ ne može pokvariti svoj plasman u rezultatu funkcije društvenog izbora CGdM: ukoliko je $A$ bio prvi, ostaje prvi jer jedini ima negativnu $d$-mjeru odmaka od prvog mjesta; ukoliko je kandidat $A$ bio drugi, nakon promjene jedne preferencije može napredovati (zbog $\beta_1^d(A) < 0$) ili ostati na istoj poziciji (zbog $\beta_1^d(K) + \beta_2^d(K) = 0, \forall K \in \mathcal{M}$); ukoliko je pak bio posljednji, onda nikako ne može pokvariti svoj plasman.

U slučaju (b), matrica promjena $d$-mjera odmaka glasi:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} 1-2^d & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+2^d & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Slično kao i u slučaju (a), uočimo kako kandidat $A$ jedini ima negativnu razliku $d$-mjera odmaka od prvog mjesta. Isto tako, kandidat $A$ jedini ima negativan zbroj razlika $d$-mjera odmaka od prvog i drugog mjesta: $\beta_1^d(A) + \beta_2^d(A) = -2^d$; $\beta_1^d(B) + \beta_2^d(B) = 0$; $\beta_1^d(C) + \beta_2^d(C) = 2^d$. Iz toga opet zaključujemo kako je kandidat $A$ mogao jedino napredovati nakon promjene jedne preferencije opisane pod (b).

Konačno, u slučaju (c), matrica promjena $d$-mjera odmaka glasi:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -2^d & 0 & +2^d \\ 2^d & 0 & -2^d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kao i u slučaju (b), kandidat $A$ jedini ima negativnu razliku $d$-mjera odmaka od prvog mjesta i negativan zbroj razlika $d$-mjera odmaka od prvog i drugog mjesta: $\beta_1^d(A) + \beta_2^d(A) = -2^d$; $\beta_1^d(B) + \beta_2^d(B) = 2^d$; $\beta_1^d(C) + \beta_2^d(C) = 0$. Zaključujemo kako ni u ovom slučaju kandidat $A$ nije mogao pokvariti svoj plasman u rezultatu funkcije društvenog izbora CGdM, čime je dokazan teorem. $\square$

Za razliku od slabe monotonosti, funkcija društvenog izbora CGdM nije jako monotona niti na skupu od tri kandidata. Navodimo primjer profila u kojemu se vidi taj manjak jake monotonosti:

**Primjer 3.3.** *Neka je $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ skup tri kandidata, te neka je $\alpha$ profil nad* 13 *glasača dan sljedećom tablicom:*

| 8 | 1 | 4 |
|---|---|---|
| A | B | C |
| C | A | B |
| B | C | A |

*Tada za* $d = 1.2$ *funkcija društvenog izbora CGdM nije monotona na tom profilu.*

Za dani profil $\alpha$ matrica $d$-mjera odmaka glasi:

$$M^{1.2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 10.19 & 12 & 19.38 \\ 22.38 & 9 & 6.30 \\ 10.30 & 5 & 17.19 \end{bmatrix}$$

Odavde vidimo kako je rezultat funkcije društvenog izbora CGdM na profilu $\alpha$ preferencija $A \succ C \succ B$.

Ukoliko na profilu $\alpha$ preferenciju $B \succ A \succ C$ prevedemo u preferenciju $A \succ C \succ B$ (dakle, kandidat $A$ je napredovao u toj preferenciji), tada dobivamo novi profil $\alpha'$ i novu matricu $d$-mjera odmaka $M^{1.2}(\alpha')$:

| 9 | 4 |
|---|---|
| A | C |
| C | B |
| B | A |

$$M^{1.2}(\alpha') = \begin{bmatrix} 9.19 & 13 & 20.68 \\ 24.68 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 18.19 \end{bmatrix}$$

Vidimo kako je sada rezultat funkcije društvenog izbora CGdM preferencija $C \succ A \succ B$. Dakle, prelaskom s profila $\alpha$ na profil $\alpha'$ u kojemu je kandidat $A$ napredovao u jednoj preferenciji tog profila (dok su ostale preferencije nepromijenjene), isti je kandidat pao s prvog na drugo mjesto u rezultatu funkcije društvenog izbora CGdM, što nam govori kako funkcija nije jako monotona niti na skupu tri kandidata.

Prikazani primjer konstruiran je na temelju analize slične onoj provedenoj u dokazu Teorema 3.15. Naime, ukoliko se promotri matrica promjena u matrici $d$-mjera odmaka nakon prelaska iz preferencije $B \succ A \succ C$ u preferenciju $A \succ C \succ B$ dobivamo:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1+2^d \\ +2^d & 0 & -2^d \\ 1-2^d & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo kako se $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata $A$ smanjila za 1. No u isto vrijeme $d$-mjera odmaka od prvog mjesta se smanjila i za kandidata $C$, i to za $2^d - 1$. Kako je $2^d - 1 > 1$ za svaki $d > 1$, slijedi kako je primjer profila koji ruši jaku monotonost moguće konstruirati za svaku vrijednost parametra $d > 1$.

## 3.3 Funkcija društvenog izbora TdM

U prošlom smo poglavlju vidjeli jedan način minimizacije $d$-mjere odmaka korištenjem "pohlepnog" algoritma. Korak dalje predstavlja potpuniji oblik minimizacije, kroz koji ćemo tražiti poredak kao ishod funkcije društvenog izbora koji minimizira ukupnu sumu $d$-mjera odmaka na danom profilu. Takvu funkciju društvenog izbora definiramo na sljedeći način:

**Definicija 3.16.** *Neka je $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ skup kandidata, $d > 1$ realan broj, te $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ neki profil nad danim skupom $k$ kandidata $M = \{M_1, ..., M_k\}$. Neka je sa $M^d_\alpha = \left[\beta^d_j(M_i)\right]$ označena pripadna matrica d-mjera odmaka. Sa $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}_k)$ označimo skup svih permutacija skupa $\{1, 2, ..., k\}$, a elemente tog skupa označimo sa $\xi_i, i \in \{1, 2, ..., k!\}$. Funkcija društvenog izbora $TdM : \mathcal{L}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ definirana je na sljedeći način:*
*Neka je $\xi_{TdM}$ jedinstvena permutacija skupa $\{1, \cdots, k\}$ za koju vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{k} \beta^d_i(M_{\xi_{TdM}(i)}) = \min_{j=1,...,k!} \sum_{i=1}^{k} \beta^d_i(M_{\xi_j(i)})$$

*Tada je*

$$TdM(\alpha) = M_{\xi_{TdM}(1)} \succ M_{\xi_{TdM}(2)} \succ ... \succ M_{\xi_{TdM}(k)}.$$

*Ukoliko ne postoji jedinstvena permutacija $\xi_{TdM}$ koja minimizira sumu mjera d-konsenzusa po svim pozicijama u poretku kandidata, kažemo da funkcija društvenog izbora TdM za takav $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})^n$ nije definirana.*

**Napomena** Radi jednostavnijeg zapisa, ubuduće ćemo za sumu vrijednosti $d$-mjera odmaka koja se pojavljuje u Definiciji 3.16, za određenu preferenciju $M_{\xi(1)} \succ M_{\xi(2)} \succ ... \succ M_{\xi(k)}$ definiranu permutacijom $\xi$ na profilu $\alpha$,

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i^d(M_{\xi(i)})$$

kraće označavati s $\beta_{sum}^d(\alpha, \xi)$.

Dakle, iz Definicije 3.16 vidimo kako tražimo onaj poredak kandidata (opisan uz pomoć permutacije $\xi$) za koji je suma $d$-mjera odmaka svih kandidata od mjesta na koje ih smješta dani poredak – minimalan. Opisani postupak najjednostavnije se vizualizira na matrici $M^d(\alpha)$.

Tablica 3.1: Matrica $M^d(\alpha)$ iz Primjera 3.1

$$M^d(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{52} & \underline{51} & 152 & 355 & 660 \\ \underline{41} & \mathbf{10} & 81 & 254 & 529 \\ 189 & 50 & \underline{\mathbf{13}} & 78 & 245 \\ 351 & 175 & 60 & \underline{\mathbf{27}} & 48 \\ 768 & 435 & 204 & 75 & \underline{\mathbf{3}} \end{bmatrix}$$

Promotrimo li profil dan u Primjeru 3.1, te odredimo li redoslijed kandidata prema TdM metodi na danoj matrici $M^d(\alpha)$ (vrijednosti koje čine tu sumu su podebljane u Tablici 3.1), vidimo kako najmanju sumu odstupanja po svim pozicijama kandidata ima poredak $A \succ B \succ C \succ D \succ E$, čija je vrijednost jednaka 105. Poredak koji nam daje CGdM metoda, $B \succ A \succ C \succ D \succ E$ (vrijednosti koje čine tu sumu su podvučene u Tablici 3.1) ima ukupnu sumu odstupanja jednaku 135 (što je druga najmanja suma ukupnih odstupanja u tom primjeru), dok poredak GdM metode, $B \succ C \succ D \succ E \succ A$ formira znatno veću ukupnu sumu odstupanja, 886. Napomenimo i da nam u ovom primjeru SdM metoda daje kao rezultat isti poredak kao i CGdM metoda (što nam ujedno potvrđuje kako TdM metoda nije ekvivalentna niti jednoj od tri do sada uvedene metode koje se temelje na $d$-mjeri odmaka).

Pokažimo i da se ovako definirana funkcija društvenog odabira TdM razlikuje i od klasičnih funkcija društvenog odabira. Promotrimo malo neobičan primjer profila, čiju ćemo konstrukciju kasnije i objasniti kod ispitivanja monotonosti funkcije TdM (Primjer 3.5).

**Primjer 3.4.** *Neka je $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ skup tri kandidata, te neka je $\alpha$ profil nad 1137 glasača dan sljedećom tablicom:*

| *400* | *520* | *217* |
|---|---|---|
| $B$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $C$ | $A$ |
| $A$ | $B$ | $C$ |

*Tada funkcije društvenog izbora TdM za $d = 1.5$, Borda izračun i Condorcetov izračun daju različite rezultate na profilu $\alpha$.*

Pripadna matrica $d$-mjera odmaka glasi:

$$M^d(\alpha) = \begin{bmatrix} 1348.37 & 920 & 1687.78 \\ 1470.78 & 1137 & 1745.14 \\ 1533.77 & 217 & 920 \end{bmatrix},$$

pa je redoslijed s najmanjom sumom $d$-mjera odmaka, odnosno rezultat funkcije TdM, preferencija $A \succ C \succ B$. S druge strane, rezultat Borda izračuna je preferencija $A \succ B \succ C$ (što je ujedno rezultat i većinskog izračuna), dok je po Condorcetovoj metodi pobjednička preferencija $B \succ A \succ C$. Ovim primjerom smo pokazali da funkcija TdM nije ekvivalentna klasičnim funkcijama društvenog izbora, što će kasnije biti potvrđeno i analizom njezinih svojstava.

Prije nego li nastavimo sa analizom funkcije društvenog izbora TdM, dokažimo jedno osnovno svojstvo te funkcije, ono o asimptotskom ponašanju. Naime, za razliku od većine drugih funkcija društvenog izbora, u slučaju funkcije TdM nije odmah vidljivo kako minimizacija sume $d$-mjera odmaka po svim permutacijama (porecima kandidata) kao rezultat daje poredak koji izrazito dominira u profilu. Na neki način, teorem koji slijedi predstavlja verziju Youngovog svojstva neprekidnosti koje smo dokazali za funkciju SdM.

**Teorem 3.17.** *Neka su $M_1, M_2, ..., M_k$ kandidati, te neka je s $\alpha$ dan profil u kojemu se*

*$k_1$ birača opredijelilo za preferenciju (poredak)*

$$M_{\xi(1)} \succ M_{\xi(2)} \succ ... \succ M_{\xi(k)} \tag{3.5}$$

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathbb{N}_k$, a preostalih $k_2$ birača za neke druge preferencije (poretke) definirane na tom skupu kandidata.*

*Ukoliko u profilu $\alpha$ mijenjamo samo broj birača $k_1$, tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $k_1 > k_0$ rezultat funkcije društvenog izbora TdM upravo preferencija (3.5).*

*Dokaz.* Profil $\alpha$ općenito možemo zapisati u obliku:

| $k_1$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $\cdots$ | $k_{2,i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $M_{\xi(1)}$ | $M_{\xi_1(1)}$ | $M_{\xi_2(1)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(1)}$ |
| $M_{\xi(2)}$ | $M_{\xi_1(2)}$ | $M_{\xi_2(2)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(2)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_{\xi(k)}$ | $M_{\xi_1(k)}$ | $M_{\xi_2(k)}$ | $\cdots$ | $M_{\xi_i(k)}$ |

za neki broj preferencija $i$, $i < k_2$, takvih da je $k_{2,1}+k_{2,2}+\cdots+k_{2,i} = k_2$, $k_{2,1}, k_{2,2}, \cdots, k_{2,i} \in \mathbb{N}$. Promotrimo sad preferenciju $M_{\xi(1)} \succ \cdots \succ M_{\xi(k)}$ i pripadne pozicije u matrici $M_\alpha^d$. Tako se $d$-mjera odmaka od prvog mjesta za kandidata $M_{\xi(1)}$, $\beta_1^d(M_{\xi(1)})$ nalazi u prvom stupcu i $\xi(1)$-tom retku matrice, $d$-mjera odmaka od drugog mjesta kandidata $M_{\xi(2)}$, $\beta_2^d(M_{\xi(2)})$ u drugom stupcu i $\xi(2)$-tom retku, itd. Na svim tim mjestima u matrici $M_\alpha^d$ nalaze se vrijednosti koje *ne ovise* o vrijednosti $k_1$, budući one točno opisuju preferenciju prikazanu u prvom stupcu profila, pa ne postoje odmaci koji bi se množili s $k_1$. Stoga ni izraz $\beta_{sum}^d(\alpha, \xi)$ ne sadrži vrijednost $k_1$. Sve ostale vrijednosti u matrici $M_\alpha^d$ ovise o vrijednosti $k_1$, te linearno rastu s rastom vrijednosti $k_1$. Stoga postoji vrijednost $k_1 = k_0$, takva da će sume po svim ostalim permutacijama (osim sume definirane permutacijom $\xi$) linearnim rastom postati veće od sume $\beta_{sum}^d(\alpha, \xi)$ s porastom $k_1$ iznad vrijednosti $k_0$. □

Nakon što smo ustanovili dobro asimptotsko ponašanje funkcije društvenog izbora TdM, prvo sljedeće svojstvo koje ćemo ispitati jest *Pareto učinkovitost.*

**Teorem 3.18.** *Funkcija društvenog izbora TdM je Pareto učinkovita za svaku vrijednost parametra $d > 1$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, da postoji $d > 1$ takav da funkcija društvenog izbora TdM nije Pareto učinkovita, tj. da postoji profil $\alpha$ i dva kandidata $A$ i $B$, takvi da je

$A \succ B$ u svim preferencijama profila $\alpha$, no da je $B \succ A$ u rezultatu funkcije društvenog izbora TdM na profilu $\alpha$. Neka je, bez smanjenja općenitosti, kandidat $B$ plasiran na $i$-tu poziciju, a kandidat $A$ plasiran na $j$-tu poziciju u poretku TdM funkcije, gdje je $i < j$. Analizirajmo sada svaku preferenciju koja tvori profil $\alpha$. Kako je u svim tim preferencijama kandidat $A$ plasiran ispred kandidata $B$, označimo njihove pozicije u preferenciji s $k$ odnosno $l$, gdje je $k < l$. Postoji šest različitih kombinacija međusobnih odnosa vrijednosti $i$, $j$, $k$ i $l$, koje su navedene u Tablici 3.2.

Tablica 3.2: Odnosi pozicija kandidata $A$ i $B$
u preferencijama i rezultatu funkcije TdM

| | |
|---|---|
| (I) | $k < l \leq i < j$, |
| (II) | $k \leq i \leq l \leq j$ (gdje je $i < j$ i $k < l$), |
| (III) | $k \leq i < j \leq l$, |
| (IV) | $i \leq k < l \leq j$, |
| (V) | $i \leq k \leq j \leq l$ (gdje je $i < j$ i $k < l$), |
| (VI) | $i < j \leq k < l$. |

U svakom od tih slučajeva promotrimo doprinose kandidata $A$ i $B$ iz te preferencije, sumi $d$-mjera odmaka za pobjednički poredak (tj. onaj poredak koji minimizira sume $d$-mjera odmaka po svim permutacijama kandidata, te u kojemu je $B \succ A$), te isto tako doprinose tih kandidata (kroz promatranu preferenciju) sumi $\beta^d_{sum}$ nad poretkom koji je identičan kao i pobjednički, ali sa zamijenjenim pozicijama kandidata $A$ i $B$.

Cilj nam je pokazati da svaka preferencija ima manji doprinos sumi $d$-mjera odmaka $\beta^d_{sum}$ za poredak koji sadrži $A \succ B$, nego li za poredak koji pobjeđuje, i po pretpostavci sadrži $B \succ A$. Na taj način ćemo pokazati kako je suma svih doprinosa (pojedinih profila) manja za poredak koji sadrži $A \succ B$, nego li za pobjednički poredak, što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom.

Slučaj (I) možemo vizualizirati na sljedeći način:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cdots$ | $k$ | $\cdots$ | $l$ | $\cdots$ | $i$ | $\cdots$ | $j$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $A$ | $\cdots$ | $B$ | $\cdots$ | $\circ$ | $\cdots$ | $\circ$ | $\cdots$ |

Doprinos te preferencije sumi $d$-mjera odmaka pobjedničkog poretka je jednak

$$\beta^d_i(B) = (i - l)^d, \qquad \beta^d_j(A) = (j - k)^d.$$

S druge strane, doprinos sumi $d$-mjera odmaka poretka sa zamijenjenim pozicijama kandidata A i B iznosi

$$\beta_i^d(A) = (i-k)^d, \qquad \beta_j^d(B) = (j-l)^d.$$

Pokažimo sad da je doprinos sumi $\beta_{sum}^d$ manji za poredak koji sadrži $A \succ B$. Da bi to dokazali, moramo pokazati da je

$$\beta_i^d(A) + \beta_j^d(B) < \beta_i^d(B) + \beta_j^d(A)$$

$$(i-k)^d + (j-l)^d < (i-l)^d + (j-k)^d \tag{3.6}$$

Nejednakost (3.6) je ekvivalentna nejednakosti $x^d + y^d < z^d + w^d$, gdje je $x + y = z + w$, pri čemu je $w = j - k$ najveći među tim brojevima, što je dokazano u Lemi 3.19.

U slučaju (II) doprinosi promatrane preferencije sumama $\beta_{sum}^d$ iznose:

$$\beta_i^d(B) = (l-i)^d, \qquad \beta_j^d(A) = (j-k)^d,$$

$$\beta_i^d(A) = (i-k)^d, \qquad \beta_j^d(B) = (j-l)^d.$$

Želimo dokazati da je

$$\beta_i^d(A) + \beta_j^d(B) < \beta_i^d(B) + \beta_j^d(A)$$

$$(i-k)^d + (j-l)^d < (l-i)^d + (j-k)^d \tag{3.7}$$

Nejednakost (3.7) je ispunjena ako je $(i-k)^d + (j-l)^d < (j-k)^d$, a kako u ovom slučaju vrijedi $j - k = (j-l) + (l-i) + (i-k) > (j-l) + (i-k)$, nejednakost (3.7) vrijedi ako je $x^d + y^d < (x+y)^d$, budući je tada:

$$(j-l)^d + (i-k)^d \;<\; (j-l+i-k)^d \;<\; (j-k)^d.$$

Tvrdnja $x^d + y^d < (x+y)^d$ je dokazana u Lemi 3.20.

U slučaju (III) doprinosi promatrane preferencije sumama $\beta_{sum}^d$ iznose:

$$\beta_i^d(B) = (l-i)^d, \qquad \beta_j^d(A) = (j-k)^d,$$

$$\beta_i^d(A) = (i-k)^d, \qquad \beta_j^d(B) = (l-j)^d.$$

Želimo dokazati da je

$$\beta_i^d(A) + \beta_j^d(B) < \beta_i^d(B) + \beta_j^d(A)$$

$$(i-k)^d + (l-j)^d < (l-i)^d + (j-k)^d \tag{3.8}$$

Kako je u ovom slučaju $i-k < j-k$, i $l-j < l-i$, nejednakost (3.8) uvijek vrijedi. Slučaj (IV) vodi ka analizi ekvivalentnoj onoj u slučaju (III), slučaj (V) ka analizi ekvivalentnoj onoj u slučaju (II), dok slučaj (VI) vodi ka analizi ekvivalentnoj onoj u slučaju (I), čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Dokažimo sada dvije tehničke leme koje smo koristili u dokazu Teorema 3.18:

**Lema 3.19.** *Neka su $x$, $y$, $z$ i $w$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $x+y=z+w$, te neka je $w$ najveći među tim brojevima. Tada za sve realne vrijednosti $d>1$ vrijedi $x^d+y^d<z^d+w^d$.*

*Dokaz.* Iz $x+y=z+w$ slijedi $\frac{x+y}{2}=\frac{z+w}{2}=S$, dok se brojevi $x$, $y$, $z$ i $w$ (bez gubitka općenitosti) mogu zapisati kao $x=S-\delta_1$, $y=S+\delta_1$, $z=S-\delta_2$, $w=S+\delta_2$, za neke realne vrijednosti $\delta_1$ i $\delta_2$. Kako je $w$ najveći među opisanim vrijednostima, slijedi $\delta_1<\delta_2$. Definiramo funkciju $f(t)=(S-t)^d+(S+t)^d$, gdje je $t$ pozitivan realan broj manji od $S$. Tvrdnja leme slijedi iz $f(\delta_1)<f(\delta_2)$, što je pak posljedica monotonog rasta funkcije $f(t)$. Kako bi to dokazali, računamo prvu derivaciju $f'(t)$: $f'(t)=-d(S-t)^{d-1}+d(S+t)^{d-1}$. Sada za svaki $d>1$ vrijedi: $f'(t)>0 \Leftrightarrow (S+t)^{d-1}>(S-t)^{d-1} \Leftrightarrow S+t>S-t$, što je istina za sve $t\in[0,S]$. □

**Lema 3.20.** *Za sve pozitivne realne brojeve $x$, $y$ i $d>1$ vrijedi*

$$x^d+y^d<(x+y)^d.$$

*Dokaz.* Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti $x\le y$. Podijelimo li izraz $x^d+y^d<(x+y)^d$ sa $y^d$, dobivamo $\left(\frac{x}{y}\right)^d+1<\left(1+\frac{x}{y}\right)^d$, gdje je $0<\frac{x}{y}\le 1$. Definirajmo funkciju $f(t)=(1+t)^d-1-t^d$. Lema je dokazana ukoliko je $f(t)>0$ za sve $t\in\langle 0,1]$. Kako je $f(0)=0$, pokazati ćemo kako je $f(t)$ monotono rastuća funkcija. Za derivaciju $f'(t)=d\,(1+t)^{d-1}-d\,t^{d-1}$ vrijedi $f'(t)>0$ ako je $(1+t)^{d-1}>t^{d-1}$, što je istina za sve vrijednosti $d>1$ i $t>0$. □

Sljedeće svojstvo koje ćemo ispitati je *monotonost.*[4]. Za funkciju društvenog izbora kažemo da je monotona, ukoliko vrijedi sljedeće: neka se u profilu biračkih preferencija promijeni samo jedna preferencija, i to na način da je neki kandidat u toj preferenciji plasiran višu poziciju nego li ranije. Funkcija društvenog izbora je monotona ukoliko u rezultatu te funkcije, taj kandidat ne može biti pozicioniran niže nego li prije promjene.

U analizi monotonosti funkcije TdM, prvo ćemo promotriti situaciju sa tri kandidata, a potom i sa više njih. Isto tako, monotonost ćemo najprije ispitati za $d = 2$, pa potom i za ostale vrijednosti parametra $d$.

Promotrimo prvo kakve promjene u matrici $\Delta^d$ (vidi jednadžbu (3.1)), generira opisana promjena jedne preferencije u profilu $\alpha$. Neka je promatrani skup od tri kandidata označen s $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti kako je pozicija kandidata $A$ pomaknuta na gore u jednoj preferenciji profila.

Analizirati ćemo dvije situacije: **(I)** kandidat $A$ je bio plasiran na prvo mjesto u rezultatu funkcije TdM. U tom slučaju kandidat $A$ i dalje mora ostati plasiran na prvom mjestu nakon promjene u jednoj preferenciji. **(II)** Kandidat $A$ je bio plasiran na drugo mjesto u rezultatu funkcije TdM. Tada kandidat $A$ nakon promjene u jednoj preferenciji ne smije pasti na treće mjesto u rezultatu funkcije TdM. Ukoliko je kandidat bio plasiran na posljednjem, trećem mjestu u rezultatu funkcije TdM, tada on ne može pokvariti svoj plasman, pa taj slučaj nije potrebno analizirati.

Kako bi analizirali slučaj (I), dovoljno je promotriti sljedeće promjene jedne preferencije u profilu (ostale promjene preferencije ekvivalentne su jednoj od pobrojanih, budući se dobivaju permutacijom koja kandidata $B$ zamijeni kandidatom $C$ i obrnuto):

**(a)** preferencija $B \succ A \succ C$ prelazi u $A \succ B \succ C$

**(b)** preferencija $B \succ A \succ C$ prelazi u $A \succ C \succ B$

**(c)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $B \succ A \succ C$

**(d)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $C \succ A \succ B$

**(e)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $A \succ B \succ C$

[4]U ovom ćemo radu ispitati *jaku monotonost* Slabija verzija zahtjeva monotonosti, u kojoj analiziramo samo one promjene u kojima kandidat u preferenciji napreduje zamjenom sa nekim drugim kandidatom plasiranim ispred njega, dok su pozicije ostalih kandidata nepromijenjene, slijedi iz jake monotonosti.

**(f)** preferencija $B \succ C \succ A$ prelazi u $A \succ C \succ B$

Profil prije promjene jedne preferencije ćemo označiti s $\alpha$, a nakon promjene s $\alpha'$.

U slučaju (Ia), promotrimo matricu promjena $d$-mjera odmaka $\Delta^d = M^d(\alpha) - M^d(\alpha')$ (i posebno za $d = 2$):

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1+2^d \\ +1 & -1 & +1-2^d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +3 \\ +1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde možemo izračunati promjene u $\beta^2_{sum}$ za sve moguće preferencije, kada profil $\alpha$ pređe u profil $\alpha'$. Takvu promjenu ćemo označiti s $\delta^2_{sum}$:

$$\begin{aligned} \delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= -2 \\ \delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -4 \\ \delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +2 \\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +4 \\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -2 \\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Vidimo kako se $\beta^2_{sum}$ smanjuje za tri preferencije: $A \succ B \succ C$, $A \succ C \succ B$ i $C \succ A \succ B$. Kako analiziramo scenarij (Ia), znamo kako je na profilu $\alpha$ najmanju vrijednost $\beta^2_{sum}$ imala na jednom od prva dva profila. Osim za te dvije preferencije, $\beta^2_{sum}$ se smanjuje i za preferenciju $C \succ A \succ B$, no to je smanjenje manje ili jednako smanjenju minimalne sume, pa se nakon prelaska s profila $\alpha$ na profil $\alpha'$, prva pozicija kandidata $A$ u rezultatu funkcije TdM ne mijenja.

U slučaju (Ic), imamo sljedeću matricu promjene $d$-mjere odmaka:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} 1-2^d & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+2^d & +1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +3 & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuće promjene vrijednosti suma $d$-odmaka po preferencijama su jednake:

$$\begin{aligned}
\delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= -4 \\
\delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -2 \\
\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= -2 \\
\delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +2 \\
\delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= +2 \\
\delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +4
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Kao i u slučaju (Ia), zaključujemo kako kandidat $A$ ostaje pobjednik. U slučaju (Ie), matrica promjene $d$-mjere odmaka glasi:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -2^d & 0 & +2^d \\ +1 & -1 & 1-2^d \\ -1+2^d & +1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & +4 \\ +1 & -1 & -3 \\ +3 & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pripadne promjene vrijednosti suma $d$-odmaka po preferencijama iznose:

$$\begin{aligned}
\delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= -6 \\
\delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -6 \\
\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= 0 \\
\delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6 \\
\delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= 0 \\
\delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +6
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Jasno je da i u ovom slučaju kandidat $A$ ostaje pobjednik, budući se smanjuju vrijednosti suma samo za preferencije u kojima $A$ pobjeđuje. Matrica promjene $d$-mjere odmaka u slučaju (If) iznosi:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -2^d & 0 & +2^d \\ 2^d & 0 & -2^d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & +4 \\ +4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovoga puta promjene vrijednosti suma $d$-odmaka po preferencijama glase:

$$\begin{aligned} \delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= -4 \\ \delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -8 \\ \delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +4 \\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +8 \\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -4 \\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +4 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Argumentacija po kojoj pobjednik i ovoga puta ostaje kandidat $A$ jednaka je kao u slučajevima (Ia) i (Ic). Preostalo nam je još analizirati slučajeve (Ib) i (Id), što zahtjeva malo više posla. Naime, u slučaju (Ib) matrica promjena $d$-mjere odmaka jednaka je:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -1+2^d \\ +2^d & 0 & -2^d \\ 1-2^d & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +3 \\ +4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= 0 \\ \delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -6 \\ \delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +6 \\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6 \\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -6 \\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

No u ovom slučaju nije očigledno da kandidat $A$ ostaje pobjednik. Naime, treba vidjeti može li na profilu $\alpha$ pobjednička preferencija biti $A \succ B \succ C$, a da prelaskom na profil $\alpha'$ pobjednička preferencija po TdM metodi postane preferencija $C \succ A \succ B$. Da bi se to dogodilo mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(C \succ A \succ B) - 6 < \beta^2_{sum}(A \succ B \succ C) < \beta^2_{sum}(C \succ A \succ B), \tag{3.14}$$

$$\beta^2_{sum}(C \succ A \succ B) < \beta^2_{sum}(A \succ C \succ B). \tag{3.15}$$

Općenito, profil $\alpha$ je oblika:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | $C$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $A$ |

(3.16)

gdje su $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{N}$. Dodavanje svake od tih preferencija u profil doprinosi $\beta^2_{sum}$ (neke preferencije) određenim iznosom, koji ćemo označiti s $\beta^2_\Delta$. Te su vrijednosti dane u Tablici 3.3. Odavde sada možemo izraziti nejednakosti (3.14) i (3.15) uz pomoć nepoznanica $x_1$–$x_6$. Tako nejednakost (3.14) zapisujemo:

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_6 - 6 < 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 8x_6 < 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_6$$

Odavde pak slijedi $x_1 + x_3 - 1 < x_5 + x_6 < x_1 + x_3$. Kako su $x_1, x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{N}$, jasno je da ne postoje prirodni brojevi koji mogu ispuniti taj uvjet.

Tablica 3.3: Doprinos dodavanja određene preferencije sumama 2-mjere odmaka

| | $ABC$ | $ACB$ | $BAC$ | $BCA$ | $CAB$ | $CBA$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta^2_\Delta(ABC)$ | 0 | +2 | +2 | +6 | +6 | +8 |
| $\beta^2_\Delta(ACB)$ | +2 | 0 | +6 | +8 | +2 | +6 |
| $\beta^2_\Delta(BAC)$ | +2 | +6 | 0 | +2 | +8 | +6 |
| $\beta^2_\Delta(BCA)$ | +6 | +8 | +2 | 0 | +6 | +2 |
| $\beta^2_\Delta(CAB)$ | +6 | +2 | +8 | +6 | 0 | +2 |
| $\beta^2_\Delta(CBA)$ | +8 | +6 | +6 | +2 | +2 | 0 |

Konačno, u slučaju (Id), matrica promjene $d$-mjere odmaka glasi:

$$\Delta^d = \begin{bmatrix} 1-2^d & -1 & +1 \\ +2^d & 0 & -2^d \\ -1 & +1 & -1+2^d \end{bmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & +1 \\ +4 & 0 & -4 \\ -1 & +1 & +3 \end{bmatrix}.$$

Pripadne promjene vrijednosti suma $d$-odmaka po preferencijama glase:

$$\begin{aligned}
\delta^2_{sum}(A \succ B \succ C) &= 0 \\
\delta^2_{sum}(A \succ C \succ B) &= -6 \\
\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +6 \\
\delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6 \\
\delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -6 \\
\delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Kao i u slučaju (Ib), moramo provjeriti je li moguće da je na profilu $\alpha$ pobjednička preferencija $A \succ B \succ C$, dok na profilu $\alpha'$ pobjednik postaje preferencija $C \succ A \succ B$. Da bi se to dogodilo mora vrijediti

$$\beta^2_{sum}(C \succ A \succ B) - 6 < \beta^2_{sum}(A \succ B \succ C) < \beta^2_{sum}(C \succ A \succ B), \tag{3.18}$$

$$\beta^2_{sum}(C \succ A \succ B) < \beta^2_{sum}(A \succ C \succ B). \tag{3.19}$$

Primijetimo kako su uvjeti (3.18) i (3.19) identični uvjetima (3.14) i (3.15), pa je stoga i daljnja argumentacija ista. Time su analizirani sve mogućnosti u slučaju (I). Prijeđimo sada na analizu slučaja (II), koju ćemo provoditi također po situacijama opisanima u (a)–(f) na stranici 100.

U slučaju (IIa), kada preferencija $B \succ A \succ C$ prelazi u preferenciju $A \succ B \succ C$, vrijednosti promjena $\beta^2_{sum}$ ostaju iste kao i u (3.9), no sada ih promatramo na drugačiji način. Ovoga puta promatramo profile u kojima je TdM pozicionirala kandidata $A$ na drugo mjesto, tj. pobjednička preferencija je $B \succ A \succ C$ ili $C \succ A \succ B$.

Trebamo provjeriti je li moguće da nakon promjene opisane pod (a), kandidat $A$ padne na treće mjesto, tj. da pobjednička preferencija postane $B \succ C \succ A$ ili $C \succ B \succ A$? No za obje te preferencije $\beta^2_{sum}$ raste, i to više ili jednako nego li za preferencije u kojima je kandidat $A$ na drugom mjestu (a od kojih jedna na profilu $\alpha$ minimizira $\beta^2_{sum}$). Istaknimo pri tome da eventualna pobjeda jedne od dvije preostale preferencije u kojima je kandidat $A$ na prvom mjestu ne ruši monotonost, pa ju u ovom slučaju nije potrebno niti analizirati.

Slučaj (IIc) se analizira na sličan način kao i slučaj (IIa). U jednadžbi (3.10) imamo

$$\begin{aligned}\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= -2\\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +2\\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= +2\\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +4\end{aligned}$$

pa opet možemo zaključiti kako preferencija u kojoj je $A$ na trećem mjestu ne može postati pobjednička nakon promjene profila. Nadalje, iz jednadžbi (3.17) slijedi:

$$\begin{aligned}\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +6\\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6\\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -6\\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= 0\end{aligned}$$

Monotonost u ovom slučaju može biti narušena jedino ukoliko preferencija $B \succ A \succ C$ pobjeđuje na profilu $\alpha$, a preferencija $C \succ B \succ A$ na profilu $\alpha'$. U tom slučaju mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(C \succ B \succ A) - 6 \;<\; \beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) \;<\; \beta^2_{sum}(C \succ B \succ A)$$

$$8x_1 + 6x_2 + +6x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 6 < 2x_1 + 6x_2 + 2x_4 + 8x_5 + 6x_6 < 8x_1 + 6x_2 + +6x_3 + 2x_4 + 2x_5$$

$$x_1 + x_3 \;<\; x_5 + x_6 \;<\; x_1 + x_3,$$

što je nemoguće ispuniti za $x_1, x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{N}$. Dakle, ni u ovom slučaju nije moguće konstruirati profil na kojemu bi TdM narušila monotonost. U slučaju (IIe), iz jednadžbe (3.11) imamo:

$$\begin{aligned}\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= 0\\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6\\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= 0\\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +6\end{aligned}$$

dok u slučaju (IIf) iz jednadžbe (3.12) slijedi:

$$\begin{aligned}\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +4\\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +8\\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -4\\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= +4\end{aligned}$$

Na identičan način kao i u prethodnim slučajevima (IIa) i (IIc), zaključujemo kako monotonost ne može biti narušena.

Slučaj (IIb) morati ćemo analizirati na sličan način kao i slučaj (Ib). Naime, iz jednadžbe (3.13) slijedi:

$$\begin{aligned}\delta^2_{sum}(B \succ A \succ C) &= +6\\ \delta^2_{sum}(B \succ C \succ A) &= +6\\ \delta^2_{sum}(C \succ A \succ B) &= -6\\ \delta^2_{sum}(C \succ B \succ A) &= 0\end{aligned}$$

U ovakvoj situaciji moramo ispitati je li moguće da na profilu $\alpha$ pobjednička preferencija bude $B \succ A \succ C$, a da prelaskom na profil $\alpha'$ pobjednička preferencija postane $C \succ B \succ A$ (to je jedina mogućnost kojom bi se u ovom slučaju narušila monotonost)? Da bi to bilo istina, mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) < \beta^2_{sum}(C \succ B \succ A) < \beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) + 6, \tag{3.20}$$

$$\beta^2_{sum}(C \succ B \succ A) < \beta^2_{sum}(C \succ A \succ B) - 6. \tag{3.21}$$

Nadalje, kako bi preferencija $B \succ A \succ C$ bila pobjednička na $\alpha$ još mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) < \beta^2_{sum}(B \succ C \succ A), \tag{3.22}$$

$$\beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) < \beta^2_{sum}(A \succ B \succ C), \tag{3.23}$$

$$\beta^2_{sum}(B \succ A \succ C) < \beta^2_{sum}(A \succ C \succ B). \tag{3.24}$$

Nejednakosti (3.20)–(3.24) zapisujemo uz pomoć općeg profila (3.16) i Tablice 3.3, u kojoj su dani doprinosi određene preferencije promjeni vrijednosti $\beta^2_{sum}$. Iz nejednakosti (3.20) slijedi:

$$x_1 + 2x_3 + x_4 - \frac{3}{2} \ < \ x_2 + 2x_5 + x_6 \ < \ x_1 + 2x_3 + x_4$$

Kako se radi o prirodnim brojevima, tada mora biti:

$$x_2 + 2x_5 + x_6 \ = \ x_1 + 2x_3 + x_4 - 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \ = \ -1 \tag{3.25}$$

Iz nejednakosti (3.21) slijedi

$$x_1 + 2x_2 + x_5 \ < \ x_3 + 2x_4 + x_6 - 3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 \ = \ -3 - \alpha_1, \tag{3.26}$$

Za neki $\alpha_1 \in \mathbb{N}$. Nejednakost (3.22) daje

$$x_4 + x_5 + 2x_6 \ < \ 2x_1 + x_2 + x_3$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \ = \ -\alpha_2, \tag{3.27}$$

za neki $\alpha_2 \in \mathbb{N}$. Nejednakost (3.23) vodi ka

$$x_1 + 2x_2 + x_5 \ < \ x_3 + 2x_4 + x_6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 \ = \ -\alpha_3, \tag{3.28}$$

za neki $\alpha_3 \in \mathbb{N}$. Konačno, iz nejednakosti (3.24) slijedi

$$x_2 + x_5 \ < \ x_3 + x_4$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ = \ -\alpha_4, \tag{3.29}$$

za neki $\alpha_4 \in \mathbb{N}$. Jednadžbe (3.25)–(3.29) možemo rješavati Gaussovom metodom, što nas dovodi do sljedeće matrice:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & -1 & -3-\alpha_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6-2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\alpha_1-\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4-\alpha_1+3\alpha_4 \end{array}\right]$$

Dakle, sustav ima rješenja, ukoliko vrijedi

$$\begin{aligned} -6-2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4 &= 0 \\ 3+\alpha_1-\alpha_3 &= 0 \\ -4-\alpha_1+3\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

No, oduzimanjem treće jednadžbe od prve, dobivamo jednadžbu $-2-\alpha_1-\alpha_2=0$, koja nema rješenja za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$. Zaključujemo kako u slučaju (IIb) nije moguće formirati profil na kojemu bi funkcija društvenog izbora TdM narušavala monotonost.

Kroz analizu slučajeva (I) i (II) dokazana je sljedeća tvrdnja:

**Teorem 3.21.** *Funkcija društvenog izbora TdM je (jako) monotona za $d=2$ na svim profilima s tri kandidata.* □

Uvid dobiven provođenjem dokaza Teorema 3.21 pruža nacrt za konstrukciju nemonotonih profila za druge vrijednosti parametra $d$. U Tablici 3.4 vidimo koliko iznose doprinosi vrijednostima $\beta^d_{sum}$ dodavanja pojedinačnih preferencija profilu $\alpha$. Za $d \neq 2$ vrijednosti u tablici predstavljaju "gradivne elemente" pomoću kojih možemo ciljano graditi određene vrste profila, kao na primjer profile na kojima nije zadovoljen uvjet monotonosti.

Tablica 3.4: Doprinos dodavanja određene preferencije sumama $d$-mjere odmaka

| | $ABC$ | $ACB$ | $BAC$ | $BCA$ | $CAB$ | $CBA$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta^d_\Delta(ABC)$ | $0$ | $+2$ | $+2$ | $+2+2^d$ | $+2+2^d$ | $+2\cdot 2^d$ |
| $\beta^d_\Delta(ACB)$ | $+2$ | $0$ | $+2+2^d$ | $+2\cdot 2^d$ | $+2$ | $+2+2^d$ |
| $\beta^d_\Delta(BAC)$ | $+2$ | $+2+2^d$ | $0$ | $+2$ | $+2\cdot 2^d$ | $+2+2^d$ |
| $\beta^d_\Delta(BCA)$ | $+2+2^d$ | $+2\cdot 2^d$ | $+2$ | $0$ | $+2+2^d$ | $+2$ |
| $\beta^d_\Delta(CAB)$ | $+2+2^d$ | $+2$ | $+2\cdot 2^d$ | $+2+2^d$ | $0$ | $+2$ |
| $\beta^d_\Delta(CBA)$ | $+2\cdot 2^d$ | $+2+2^d$ | $+2+2^d$ | $+2$ | $+2$ | $0$ |

Na primjer, ukoliko promatramo profil na kojemu je pobjednik kandidat $A$, te u kojemu preferenciju $B \succ C \succ A$ zamijenimo preferencijom $B \succ A \succ C$ (slučaj (Ia) u prethodnoj analizi), tada odgovarajuće promjene vrijednosti $\beta^d_{sum}$ iznose:

$$\begin{aligned}
\delta^d_{sum}(A \succ B \succ C) &= -2^d \\
\delta^d_{sum}(A \succ C \succ B) &= -2^d + 2 \\
\delta^d_{sum}(B \succ A \succ C) &= -2 \\
\delta^d_{sum}(B \succ C \succ A) &= +2 \\
\delta^d_{sum}(C \succ A \succ B) &= +2^d - 2 \\
\delta^d_{sum}(C \succ B \succ A) &= +2^d
\end{aligned}$$

Ukoliko želimo odrediti nemonotoni profil, tada na njemu $A \succ C \succ B$ treba biti pobjednička preferencija, dok preferencija $B \succ A \succ C$ treba pobijediti nakon promjene profila. Dakle, razlika

$$\delta^d_{sum}(A \succ C \succ B) - \delta^d_{sum}(B \succ A \succ C) = 4 - 2^d \tag{3.30}$$

mora biti veća od

$$\beta^d_{sum}(B \succ A \succ C) - \beta^d_{sum}(A \succ C \succ B)$$

(uz druge uvjete). iz jednadžbe (3.30) vidimo da $\delta^d_{sum}(A \succ C \succ B) - \delta^d_{sum}(B \succ A \succ C) \to 0$ kada $d \to 2$, te je opisana konstrukcija nemoguća (što je u skladu s rezultatom Teorema 3.21). No za vrijednosti $d \in \langle 1, 2 \rangle$ postoji prostor za izgradnju nemonotonog profila. Jedan takav nemonotoni profil prikazan je u Primjeru 3.5, dok se slične konstrukcije mogu izgraditi i za $d > 2$.

**Primjer 3.5.** *Neka je $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ skup tri kandidata, te neka je $\alpha$ profil nad 1137 glasača dan sljedećom tablicom:*

| *400* | *520* | *217* |
|---|---|---|
| $B$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $C$ | $A$ |
| $A$ | $B$ | $C$ |

*Tada za $d = 1.5$ funkcija društvenog izbora TdM nije monotona na tom profilu.*

Matrica $d$-mjere odmaka na tom profilu glasi

$$M^{1.5}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1348.37 & 920 & 1687.78 \\ 1470.78 & 1137 & 1745.14 \\ 1533.77 & 217 & 920 \end{bmatrix}$$

Pobjednička preferencija je $A \succ C \succ B$, gdje je $\beta^{1.5}_{sum}(A \succ C \succ B) = 3310.51$. Za preferenciju $B \succ A \succ C$ vrijedi $\beta^{1.5}_{sum}(B \succ A \succ C) = 3310.78$. ukoliko u profilu promijenimo jednu preferenciju $B \succ C \succ A$ u $B \succ A \succ C$ (što znači da je kandidat $A$ pozicioniran više nego li ranije), dobivamo $\beta^{1.5}_{sum}(A \succ C \succ B) = 3309.68$ i $\beta^{1.5}_{sum}(B \succ A \succ C) = 3308.78$. Dakle, preferencija $B \succ A \succ C$ postaje pobjednik. To znači da je nakon promjene kandidat $A$ pozicioniran niže u pobjedničkoj preferenciji, pa funkcija društvenog izbora TdM za $d = 1.5$ na tom profilu nije monotona.

Takva kombinatorna analiza postaje puno složenija s većim brojem kandidata. Uvjeti, poput (3.20)–(3.24) zahtijevaju 24 (4!) varijabli u slučaju s četiri kandidata, dok broj varijabli raste eksponencijalno s brojem kandidata. Ipak, tako ekstenzivan pristup nije nužan. Već u slučaju s četiri kandidata, mnogo je više prostora za konstrukciju ciljanih promjena na profilu, što se dobro vidi u sljedećem primjeru.

**Primjer 3.6.** *Neka je $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$ skup četiri kandidata, te neka je $\alpha$ profil preferencija 21 glasača, sljedećeg oblika:*

| *10* | *10* | *1* |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $D$ |
| $C$ | $D$ | $A$ |
| $D$ | $C$ | $B$ |

*Tada, za $d = 2$ funkcija društvenog izbora TdM nije monotona na tom profilu.*

Pobjednička preferencija prema TdM na ovom profilu je $A \succ B \succ C \succ D$ (gdje je $\beta^2_{sum}(A \succ B \succ C \succ D) = 56$ i $\beta^2_{sum}(B \succ A \succ D \succ C) = 60$). Nakon što preferenciju $C \succ D \succ A \succ B$ prevedemo u $B \succ A \succ D \succ C$ (što znači da je kandidat $A$ u novoj preferenciji plasiran na višu poziciju), pobjednik prema TdM postaje preferencija $B \succ A \succ D \succ C$ (gdje je $\beta^2_{sum}(A \succ B \succ C \succ D) = 44$ i $\beta^2_{sum}(B \succ A \succ D \succ C) = 42$).

Specifičnost ovog primjera je u tome da pruža nacrt za dokazivanje (manjka) monotonosti funkcije TdM u slučaju s četiri ili više kandidata.

**Teorem 3.22.** *Za svaki $d > 1$ postoji profil $\alpha$ nad skupom od četiri ili više kandidata, takav da funkcija društvenog izbora TdM na tom profilu nije monotona.*

*Dokaz.* Neka je $\alpha$ profil nad $k \geq 4$ kandidata $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$ sljedećeg oblika:

| $m$ | $m$ | $1$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
| $M_2$ | $M_1$ | $M_4$ |
| $M_3$ | $M_4$ | $M_1$ |
| $M_4$ | $M_3$ | $M_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_k$ | $M_k$ | $M_k$ |

gdje se nakon četvrte pozicije u svakoj preferenciji na i-tom mjestu nalazi kandidat $M_i$, te neka je $m \in \mathbb{N}$ neki prirodni broj veći od jedan. Na tom profilu, za sve $d > 1$ vrijedi $\beta^d_{sum}(M_1 \succ M_2 \succ M_3 \succ M_4 \succ ... \succ M_k) < \beta^d_{sum}(M_2 \succ M_1 \succ M_3 \succ M_4 \succ ... \succ M_k)$, zbog toga što je razlika u $\beta^d_{sum}$ za te dvije preferencije sadržana u doprinosu treće preferencije, a koja je manja za prvo navedeni poredak (ta je tvrdnja posljedica nejednakosti $3^d > 2^d + 1$, a koja slijedi iz Leme 3.20 za $x = 1$ i $y = 2$). Stoga je na profilu $\alpha$ pobjednik preferencija $M_1 \succ M_2 \succ M_3 \succ M_4 \succ ... \succ M_k$.
Nakon zamjene preferencije $M_3 \succ M_4 \succ M_1 \succ M_2 \succ ... \succ M_k$ s preferencijom $M_2 \succ M_1 \succ M_4 \succ M_3 \succ ... \succ M_k$, profil $\alpha$ prelazi u profil $\alpha'$ koji izgleda:

| $m$ | $m+1$ |
|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ |
| $M_2$ | $M_1$ |
| $M_3$ | $M_4$ |
| $M_4$ | $M_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M_k$ | $M_k$ |

Jasno je kako je na profilu $\alpha'$ pobjednik preferencija $M_2 \succ M_1 \succ M_4 \succ M_3 \succ ... \succ M_k$.

To slijedi iz činjenice da se dvije preferencije u profilu razlikuju samo u pozicijama kandidata $M_1$ i $M_2$, kojima su zamijenjene pozicije na prvom i drugom mjestu; te u pozicijama kandidata $M_3$ i $M_4$, kojima su zamijenjene pozicije na trećem i četvrtom mjestu. Utoliko su međusobni doprinosi (po jedne) preferencija iznosima $\beta^d_{sum}$, jednaki. Kako u profilu druge preferencije ima za jedan više od prve, slijedi kako je najmanji $\beta^d_{sum}$ upravo onaj nad drugom preferencijom.
Zaključno, nakon zamjene preferencija u kojoj je kandidat $A$ napreduje, istog kandidata funkcija TdM u pobjedničkoj preferenciji smješta na nižu poziciju. Stoga funkcija socijalnog izbora TdM nije monotona za sve $d > 1$ na danom profilu $\alpha$. □

Od trenutka kada je Arrow dokazao svoj teorem nemogućnosti, funkcije društvenog izbora redovito su testirane zadovoljavaju li svojstvo *nezavisnosti od nevažnih alternativa*, ili svojstvo *binarne nezavisnosti* (Definicija 1.11).[1]

Za funkciju društvenog izbora kažemo da zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nevažnih alternativa, ukoliko međusobni poredak dva kandidata u rezultatu funkcije društvenog izbora ovisi jedino o međusobnim porecima ta dva kandidata u preferencijama zadanog profila – tj. njihov međuodnos u finalnom poretku ne ovisi o ostalim (”*nevažnim*”) kandidatima. Dakle ukoliko je, recimo, kandidat $A$ rangiran više puta ispred kandidata $B$, nego li što je kandidat $B$ rangiran ispred kandidata $A$ na promatranom profilu, tada je kandidat $A$ plasiran ispred kandidata $B$ u poretku koji je rezultat funkcije društvenog izbora (naravno, ukoliko funkcija društvenog izbora zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nevažnih alternativa).

U svrhu odgovora na pitanje zadovoljava li funkcija društvenog izbora TdM svojstvo nezavisnosti od nevažnih alternativa, dokažimo sljedeću propoziciju:

**Propozicija 3.23.** *Funkcija društvenog izbora TdM je invarijantna na uklanjanje (ili dodavanje) nekog broja maksimalnih simetričnih pod-profila profilu $\alpha$.*

Maksimalni simetrični po$d$-profil na skupu od $k$ kandidata jer profil koji sadrži točno $k$ preferencija, u kojima se svaki kandidat nalazi na svakom mjestu poretka točno jedanput, te su dobiveni cikličkom permutacijom početne preferencije. Na primjer, na skupu od $k = 4$ kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, jedan od maksimalno simetričnih po$d$-profila (između njih $(k-1)! = 6$) je profil:

| 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|
| A | D | C | B |
| B | A | D | C |
| C | B | A | D |
| D | C | B | A |

U Definiciji 2.3 nalazimo maksimalni simetrični po$d$-profil definiran na skupu od tri kandidata, kojeg nazivamo Condorcetova trojka.

*Dokaz.* Dodavanjem maksimalno simetričnog po$d$-profila, svaki kandidat dobiva po jedan dodatni plasman na svaku od pozicija u strogom linearnom poretku. Zbog toga sve vrijednosti u $i$-tom stupcu matrice $d$-mjere odmaka $M^d$, $\beta_i^d(M_j)$ rastu za istu vrijednost. Prema tome, sve sume $d$-mjera odmaka generirane nekim strogim linearnim poretkom rastu za istu vrijednost (a koja je jednaka zbroju vrijednosti za koje rastu elementi u stupcima matrice $d$-mjera odmaka), što dokazuje tvrdnju. $\square$

Maksimalno simetrični po$d$-profili imaju dvije karakteristične osobine, važne za ovaj rad. Prva je iskazana u prethodnoj Propoziciji: uklanjanje ili dodavanje takvog pod profila ne utječe na rezultat funkcije društvenog izbora TdM. Druga nama bitna karakteristika jest vrijednost duela kandidata u takvom profilu. Na primjer, u prethodnom primjeru maksimalno simetričnog profila s četiri kandidata dueli kandidata daju sljedeće vrijednosti: $A : C = 2 : 2$, $B : D = 2 : 2$. no isto tako imamo $A : B = 3 : 1$, te $B : C = 3 : 1$. Vidimo kako su kod parnog broja kandidata, neki dueli izjednačeni, a neki nisu. Kod neparnog broja kandidata dueli između bilo koja dva kandidata neće biti izjednačeni; kako profil ima neparan broj preferencija tako i duel za svaka dva kandidata mora biti u korist jednog od njih. Općenito, možemo zaključiti kako svaki maksimalno simetričan pod profil (bez obzira na broj kandidata) sadrži parove kandidata čiji duel nije izjednačen.

Neposredna posljedica ova dva svojstva je ta da funkcija društvenog izbora TdM ne zadovoljava aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa (IIA). Naime, prema IIA, rezultat funkcije društvenog izbora bi trebao ovisiti samo o međusobnom odnosu pojedinih kandidata u profilu, tj. o njihovim duelima. No dodavanjem (ili oduzimanjem) maksimalnih simetričnih pod profila, možemo mijenjati rezultate duela između kandidata, a da pri tome ne utječemo na rezultat funkcije društvenog izbora TdM. Time je dokazana sljedeća propozicija:

**Propozicija 3.24.** *Funkcija društvenog izbora TdM ne zadovoljava aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa za sve vrijednosti parametra* $d > 1$*.*

Sljedeći prirodni korak je analizirati zadovoljava li funkcija društvenog izbora TdM aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA) (Definicija 1.12). Iako je dokazano kako je IIIA aksiom koji je nužan za karakterizaciju Borda izračuna [23], pri čemu smo pokazali kako funkcija društvenog izbora TdM nije ekvivalentna Borda izračunu, sljedeći rezultat pokazuje zanimljiv odnos između funkcije društvenog izbora TdM i Borda izračuna.

**Teorem 3.25.** *Funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA) za* $d = 2$ *na skupu od tri kandidata.*

Dokaz ovog teorema je kombinatoran, i prati metodologiju korištenu u [13]. Kako je funkcija društvenog izbora TdM invarijantna na uklanjanje maksimalno simetričnih pod profila (koje u slučaju s tri kandidata nazivamo Condorcetovim trojkama), kombinatorna analiza se može reducirati na profile bez Condorcetovih trojki. Štoviše, bez smanjenja općenitosti nekoliko klasa profila (obzirom na uklanjanje Condorcetove trojke)[5] može se analizirati na jednom predstavniku klase, ukoliko se ostali reducirani profili mogu dobiti iz analiziranoga nekom permutacijom skupa kandidata. Posljedično, najveći profil koji treba analizirati sadrži četiri preferencije; dvije iz prve Condorcetove trojke, i dvije iz druge Condorcetove trojke. Tablica 3.5 sadrži sve klase profila koji se reduciraju na profile s dvije preferencije.

Profili u Tablici 3.5 jednaki su do na permutaciju kandidata. Postoji 15 različitih dvostupčanih profila, što je jednako $\binom{6}{2}$, odnosno broju načina na koje možemo izabrati dvije preferencije od njih šest. Na isti način u Tablicama 3.6 i 3.7 pobrojani su svi predstavnici klasa profila koji se reduciraju na profile s tri, odnosno četiri preferencije.

U Tablici 3.6 imamo ukupno 18 profila, što je jednako $\binom{6}{3} - 2$. Dakle, svi profili koji sadržavaju tri preferencije, osim Condorcetovih trojki. U Tablici 3.7 nalazi se 9 profila s

[5] Uklanjanje Condorcetovih trojki inducira klase ekvivalencije na skupu svih profila nad skupom od tri kandidata. Naime, ako uvedemo relaciju među profilima $\alpha \sim \alpha' \leftrightarrow$ "profil $\alpha$ se može dobiti iz profila $\alpha'$ dodavanjem ili uklanjanjem nekog broja Condorcetovih trojki", lako se može pokazati kako je tako definirana relacija ekvivalencija.

Tablica 3.5: Klase profila reduciranih na dvije preferencije

$$1.\quad \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & A \\ \hline B & C \\ \hline C & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & B \\ \hline A & C \\ \hline C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & C \\ \hline A & B \\ \hline B & A \\ \hline\end{array}$$

$$2.\quad \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline B & B \\ \hline C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & A \\ \hline C & C \\ \hline A & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline A & A \\ \hline C & B \\ \hline\end{array}$$

$$3.\quad \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & B \\ \hline B & A \\ \hline C & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline C & A \\ \hline B & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline C & B \\ \hline A & A \\ \hline\end{array}$$

$$4.\quad \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & C \\ \hline B & A \\ \hline C & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline A & B \\ \hline C & A \\ \hline B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & C \\ \hline A & B \\ \hline C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline B & A \\ \hline C & B \\ \hline A & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & B \\ \hline A & C \\ \hline B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline n & m \\ \hline C & A \\ \hline B & C \\ \hline A & B \\ \hline\end{array}$$

četiri preferencije, pri čemu je $9 = \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}$, odnosno broj načina na koje možemo izabrati dva profila iz jedne Condorcetove trojke i dva profila iz druge Condorcetove trojke. Dokaz Teorema 3.25 sada slijedi iz Lema 3.26 – 3.35.

**Lema 3.26.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

Tablica 3.6: Klase profila reduciranih na tri preferencije

$$1.\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & C \\ \hline B & A & B \\ \hline C & B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & C & C \\ \hline A & B & A \\ \hline C & A & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & A & A \\ \hline B & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & A \\ \hline C & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & B & B \\ \hline C & A & C \\ \hline B & C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & B & B \\ \hline A & C & A \\ \hline B & A & C \\ \hline\end{array}$$

$$2.\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & A \\ \hline B & A & C \\ \hline C & B & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & B & A \\ \hline B & A & C \\ \hline C & C & B \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & C & B \\ \hline A & B & C \\ \hline C & A & A \\ \hline\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & B \\ \hline A & B & C \\ \hline C & C & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & A & C \\ \hline A & C & B \\ \hline B & B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & B & C \\ \hline A & C & B \\ \hline B & A & A \\ \hline\end{array}$$

$$3.\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & B \\ \hline B & A & A \\ \hline C & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline A & C & B \\ \hline C & A & A \\ \hline B & B & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & A & C \\ \hline C & B & B \\ \hline A & C & A \\ \hline\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline B & C & A \\ \hline A & B & B \\ \hline C & A & C \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & A & B \\ \hline B & C & C \\ \hline A & B & A \\ \hline\end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline k & l & m \\ \hline\hline C & B & A \\ \hline A & C & C \\ \hline B & A & B \\ \hline\end{array}$$

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 & m+n & 4m+4n \\ n+4m & m & n \\ 4n+m & n & m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 2m, & \beta^2_{sum}(ACB) &= 2n, \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 6m+2n, & \beta^2_{sum}(BCA) &= 8m+6n, \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 2m+6n, & \beta^2_{sum}(CBA) &= 6m+8n. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Preferencije $BAC$, $BCA$, $CAB$ i $CBA$ ne mogu biti rezultat funkcije TdM, budući je $\beta^2_{sum}$ za svaku od tih preferencija veći od $\beta^2_{sum}(ABC)$.

Tablica 3.7: Klase profila reduciranih na četiri preferencije

1.

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $A$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $B$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $B$ | $A$ |
| $C$ | $A$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $C$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | $C$ | $C$ | $B$ |
| $A$ | $B$ | $A$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $B$ | $A$ |

2.

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $B$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $C$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $C$ | $A$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $B$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | $A$ | $A$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $C$ | $B$ |
| $A$ | $C$ | $B$ | $A$ |

3.

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $B$ | $C$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $B$ |
| $A$ | $C$ | $C$ | $A$ |

$\sim$

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $A$ | $C$ | $B$ |
| $B$ | $C$ | $A$ | $C$ |
| $A$ | $B$ | $B$ | $A$ |

Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$ na profilu $\alpha_1$, zbog IIIA u rezultatu funkcije TdM $A \succ B$. No to uvijek vrijedi, budući funkcija TdM zadovoljava Paretov aksiom. Isti zaključak se izvodi i za elemente $A$ i $C$. Konačno, kad uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz IIIA slijedi

$$n > m \tag{3.32}$$

zbog čega mora vrijediti $B \succ C$ u rezultatu funkcije TdM. funkcija TdM bi narušila IIIA ukoliko bi za profil $\alpha_1$ rezultat bila preferencija $ACB$. No iz $\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC)$ slijedi $n < m$, što je u kontradikciji s uvjetom (3.32). $\square$

**Lema 3.27.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta.

Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 4m & m+n & 4n \\ m+n & 0 & m+n \\ 4n & m+n & 4m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 8m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 6m+2n \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 6m+2n \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 2m+6n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 2m+6n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8n \end{aligned} \tag{3.33}$$

Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$ na profilu $\alpha_1$, zbog IIIA i za

$$n > m, \tag{3.34}$$

vrijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora biti $A \succ B$.[6] Promotrimo može li TdM za rezultat dati preferenciju koja sadrži $B \succ A$. Iz (3.33) vidimo kako preferencije $BAC$, $BCA$ ili $CBA$ mogu biti tražena preferencija, no tada mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

$$\beta^2_{sum}(BCA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m.$$

Svi ti slučajevi su u kontradikciji s uvjetom (3.34). Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $C$, iz IIIA slijedi da za

$$n > m, \tag{3.35}$$

pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ C$. Ako želimo da rezultat funkcije TdM sadržava $C \succ A$, trebamo provjeriti mogu li preferencije $BCA$, $CAB$ ili $CBA$ minimizirati

[6]Uvjete (3.34), (3.35) i (3.36) možemo postaviti bez smanjenja općenitosti zbog simetrije promatranog profila.

sumu $d$-mjera odmaka. U tim slučajevima bi imali:

$$\beta^2_{sum}(BCA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

tako da sve te opcije narušavaju uvjet (3.35). Konačno, kada uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz IIIA slijedi da

$$n > m \tag{3.36}$$

povlači kako pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ C$. TdM bi u ovom slučaju narušio IIIA ukoliko bi pobjednička preferencija bila $ACB$, $CAB$ ili $CBA$. No iz $\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC)$, $\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC)$ ili $\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC)$ slijedi $n < m$, što je u kontradikciji s uvjetom (3.36). □

**Lema 3.28.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} m & n & m+4n \\ n & m & 4m+n \\ 4m+4n & m+n & 0 \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 2m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 6m+2n \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2n \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 2m+6n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 8m+6n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 6m+8n \end{aligned} \tag{3.37}$$

Preferencije $ACB$, $BCA$, $CAB$ i $CBA$ ne mogu biti rezultat funkcije TdM, budući je $\beta^2_{sum}$ za svaku od tih preferencija veći od $\beta^2_{sum}(ABC)$. Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$ na profilu $\alpha_1$, zbog IIIA i za

$$n > m, \tag{3.38}$$

vrijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora biti $A \succ B$.[7] Promotrimo može li preferencija koja sadrži $B \succ A$ biti rezultat funkcije TdM. Iz (3.37) slijedi da to može biti samo preferencija $BAC$, no tada mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad n < m,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.38). Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $C$, zaključujemo kako je $A$ uvijek plasiran ispred $C$ budući TdM zadovoljava Paretov aksiom, pa TdM u tom slučaju ne može narušiti IIIA. Isti zaključak vrijedi i za kandidate $B$ i $C$. □

**Lema 3.29.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $n$ | $m$ |
|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta.

[7] Uvjet (3.38) možemo postaviti bez smanjenja općenitosti zbog simetrije promatranog profila.

Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} m & n & m+4n \\ 4m+n & m & n \\ 4n & m+n & m4 \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2m+2n \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 8m+2n \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6m+6n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 2m+8n \end{aligned} \tag{3.39}$$

Preferencije $BAC$, $BCA$ i $CBA$ ne mogu biti rezultat funkcije TdM budući je $\beta^2_{sum}$ za svaku od tih preferencija veći od $\beta^2_{sum}(ACB)$. Kada uspoređujemo kandidate A i B, zaključujemo kako IIIA ne može biti narušen, budući TdM zadovoljava Paretov aksiom. Pri usporedbi kandidata A i C, iz IIIA slijedi kako za

$$2n > m, \tag{3.40}$$

pobjednička preferencija sadrži $A \succ C$. Kako bi rezultat funkcije TdM sadržavao $C \succ A$, preferencija $CAB$ bi morala minimizirati sumu $d$-mjera odmaka. U tom bi slučaju vrijedilo:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad 2n < m,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.40). S druge strane, ako vrijedi $2n < m$, tada pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ A$. Za narušavanje IIIA tada jedna od preferencija $ACB$ ili $ABC$ mora minimizirati sumu $d$-mjera odmaka. No imamo:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Leftrightarrow \quad 2n > m,$$

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Leftrightarrow \quad n > m.$$

Oba dva uvjeta su u kontradikciji s $2n < m$. Konačno, kada uspoređujemo kandidate $B$

i $C$, iz IIIA slijedi da za

$$n > 2m \tag{3.41}$$

$B \succ C$ mora biti sadržan u pobjedničkoj preferenciji. TdM bi kršio IIIA ukoliko bi pobjednička preferencija bila $ACB$ ili $CAB$. Ali iz $\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC)$ slijedi $n < 2m$, a iz $\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC)$ slijedi $n < m$. Oba uvjeta su u kontradikciji s uvjetom (3.41). S druge strane,, ukoliko vrijedi $n < 2m$, iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ B$. IIIA bi bio narušen ukoliko bi funkcija TdM kao rezultat dala preferenciju $ABC$. No tada iz $\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(ACB)$ slijedi $2m < n$ što je u kontradikciji s $n < 2m$. Zaključno, funkcija TdM na ovoj klasi profila ne može narušiti IIIA. $\square$

**Lema 3.30.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l+4m & k+m & 4k+l \\ k+4l+m & l & k+m \\ 4k & k+l+m & 4l+4m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l+8m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k+2l+6m \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2k+8l+6m \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k+6l+2m \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k+2m \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8k+2l \end{aligned} \tag{3.42}$$

Preferencije $BAC$ i $BCA$ ne mogu biti pobjednici po TdM metodi zbog toga jer vrijedi: $\beta^2_{sum}(BAC) > \beta^2_{sum}(ACB)$ i $\beta^2_{sum}(BCA) > \beta^2_{sum}(CAB)$. Kada uspoređujemo kandidate A i B, iz IIIA i pretpostavke

$$k + l > m, \tag{3.43}$$

slijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $A \succ B$. Pogledajmo može li rezultat funkcije TdM biti preferencija koja sadrži $B \succ A$. Iz (3.42) slijedi da samo $CBA$ može biti takva preferencija, no tada vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(CAB)$$

$$8k + 2l < 6k + 2m \quad \Leftrightarrow \quad k + l < m,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.43). Ukoliko pak pretpostavimo

$$k + l < m, \tag{3.44}$$

iz IIIA slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ A$. Provjerimo može li tada pobjednička preferencija biti $ABC$, $ACB$ ili $CAB$.

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Rightarrow \quad l + 2m < 2k$$

$$\Rightarrow \quad 2k \; > \; l + 2m \; > \; l + 2(k + l) \; = \; 2k + 3l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Rightarrow \quad m < k \quad \Rightarrow \quad k \; > \; m \; > \; k + l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Rightarrow \quad m < k + l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Dakle, uspoređujući kandidate A i B, IIIA na ovoj klasi profila ne može biti opovrgnut. Kada uspoređujemo kandidate A i C, iz IIIA i pretpostavke

$$2k > l + 2m, \tag{3.45}$$

slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ C$. Provjerimo može li u rezultatu funkcije TdM vrijediti obrnuto, $C \succ A$. Takve preferencije su $CAB$ i $CBA$. No vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad 2k < l + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad 2k < l + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Ukoliko pak pretpostavimo

$$2k < l + 2m, \tag{3.46}$$

tada iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ A$. Preferencije (mogući pobjednici) koje sadrže $A \succ C$ su $ABC$ i $ACB$. No tada vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad 2k > l + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Rightarrow \quad 2k > l + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Dakle, niti preko kandidata A i C nije moguće narušiti IIIA. Konačno, usporedimo kandidate B i C. Uz pretpostavku

$$k > 2l + m \tag{3.47}$$

iz IIIA slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ C$. Preferencije koje ne sadrže taj poredak (među preferencijama koje mogu pobijediti na danoj klasi profila) su $ACB$, $CAB$ i $CBA$. No za te preferencije vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k < 2l + m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k < l + m$$

$$\Rightarrow \quad k \;>\; 2l + m \;=\; l + (l + m) \;>\; l + k \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k < \frac{l}{2} + m$$

$$\Rightarrow \quad k \;>\; 2l + m \;>\; \frac{l}{2} + m \;>\; k \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Ukoliko pak, pretpostavimo

$$k < 2l + m \tag{3.48}$$

prema IIIA pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ B$. Među preferencijama koje mogu biti pobjedničke na ovoj klasi profila, jedino preferencija $ABC$ ne zadovoljava taj uvjet. Provjerimo može li upravo ta preferencija biti rezultat funkcije TdM:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad 2l + m < k \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Zaključujemo kako je na ovoj klasi profila IIIA ispunjen za sve kombinacije kandidata. □

**Lema 3.31.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l & k+m & 4k+l+4m \\ k+4l+4m & l+m & k \\ 4k+m & k+l & 4l+m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l + 2m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k + 2l \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 6k + 8l + 6m \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k + 6l + 8m \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k + 2m \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 6k + 2l + 6m \end{aligned} \tag{3.49}$$

Preferencije $BAC$, $BCA$ i $CBA$ ne mogu biti rezultat funkcije TdM, budući je $\beta^2_{sum}(BAC) > \beta^2_{sum}(ACB)$, $\beta^2_{sum}(BCA) > \beta^2_{sum}(ACB)$ i $\beta^2_{sum}(CBA) > \beta^2_{sum}(ACB)$.

Pri uspoređivanju kandidata $A$ i $B$, zbog IIIA mora biti $A \succ B$, no to je uvijek ispunjeno jer TdM zadovoljava Paretov aksiom.

Kada usporedimo kandidate $A$ i $C$, uz pretpostavku

$$2k + m > l, \tag{3.50}$$

iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ C$. to će biti narušeno (na ovoj klasi profila) jedino ako je pobjednička preferencija $CAB$. No tada vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad 2k + m < l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

S druge strane, uz pretpostavku

$$2k + m < l, \tag{3.51}$$

iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ A$. Taj će uvjet biti narušen ukoliko je pobjednička preferencija $ABC$ ili $ACB$. No tada imamo:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad l < k \quad \Rightarrow \quad 2k + m < l < k \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad l < 2k + m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Konačno kad uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz pretpostavke

$$k > 2l + m \tag{3.52}$$

i IIIA slijedi kako rezultat funkcije TdM mora sadržavati $B \succ C$. IIIA bi bio narušen ukoliko bi preferencije $ACB$ ili $CAB$ bile pobjedničke. Za njih pak vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k < 2l + m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k < l \quad \Rightarrow \quad 2l + m < k < l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

S druge strane, ako vrijedi

$$k < 2l + m \tag{3.53}$$

tada iz IIIA slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ B$. Jedina od mogućih pobjedničkih preferencija (na ovoj klasi profila) koja to ne zadovoljava je $ABC$. Ukoliko bi $ABC$ bila pobjednička preferencija, vrijedilo bi

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad k > 2l + m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Time je dokazana tvrdnja leme. $\square$

**Lema 3.32.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ |
|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l+m & k & 4k+l+m \\ k+4l & l+m & k+4m \\ 4k+4m & k+l+m & 4l \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l+2m \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k+2l+6m \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2k+8l \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k+6l+2m \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k+8m \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8k+2l+6m \end{aligned} \tag{3.54}$$

Preferencije $BCA$ i $CBA$ ne mogu biti pobjedničke preferencije na ovoj klasi profila zbog $\beta^2_{sum}(BCA) > \beta^2_{sum}(ABC)$ i $\beta^2_{sum}(CBA) > \beta^2_{sum}(ACB)$. Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$, uz pretpostavku

$$k + l > m, \tag{3.55}$$

zbog IIIA u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $A \succ B$. Jedina moguća pobjednička preferencija (na ovoj klasi profila) koja ne zadovoljava taj uvjet je $BAC$. no kad bi $BAC$ bila pobjednička preferencija, tada bi vrijedilo:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k + l < m,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.55). Ako pak pretpostavimo suprotno, tj.

$$k + l < m, \tag{3.56}$$

tada zbog IIIA pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ A$. Između mogućih rezultata funkcije TdM (na ovoj klasi profila), to narušavaju preferencije $ABC$, $ACB$ i $CAB$. No u slučaju pobjede jedne od ovih preferencija vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Rightarrow \quad m < k + l \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Rightarrow \quad m < l \quad \Rightarrow \quad m > k + l > k + m \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Rightarrow \quad k + 2m < l$$

$$\Rightarrow \quad m > k + l > k + k + 2m = 2k + 2m \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $C$, iz pretpostavke

$$2k + m > l, \tag{3.57}$$

i IIIA slijedi kako rezultat funkcije TdM mora sadržavati $A \succ C$. Stoga treba provjeriti može li preferencija $CAB$ biti pobjednička. No tada bi vrijedilo:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad 2k + m < l \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Obrnuto, ukoliko pretpostavimo

$$2k + m < l, \tag{3.58}$$

iz IIIA slijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $C \succ A$. Taj uvjet narušavaju tri preferencije (među onima koje mogu biti pobjedničke na ovoj klasi profila): $ABC$, $ACB$ i $BAC$. Provjerimo može li jedna od tih preferencija biti pobjednička.

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad l < k + m$$

$$\Rightarrow \quad l < k + m < 2k + m < l \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad l < 2k + m \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Za treću preferenciju, $BAC$ vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad 2l < k + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Kako su $k, l, m \in \mathbb{N}$, $k, l, m > 0$ iz uvjeta (3.58) slijedi $k < \frac{l}{2} - \frac{m}{2}$. Sada je:

$$k < \frac{l}{2} - \frac{m}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2l - \frac{m}{2} < \frac{1}{4} \cdot (k + 2m) - \frac{m}{2} = \frac{k}{4} + \frac{m}{2} - \frac{m}{2} = \frac{k}{4}$$

Dakle, za prirodan broj $k$ mora vrijediti $k < \frac{k}{4}$, što nije moguće. Konačno, kada uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz pretpostavke

$$k + 2m > 2l \tag{3.59}$$

i IIIA slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ C$. U ovom slučaju bi IIIA bio narušen ukoliko bi rezultat funkcije TdM bila preferencija $ACB$ ili $CAB$. No tada imamo:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Rightarrow \quad k + 2m < 2l \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC) \;\; \Rightarrow \;\; k + m < l \;\; \Rightarrow \;\; k + 2m > 2l > 2k + 2m \;\; \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Ukoliko pak pretpostavimo

$$k + 2m < 2l \tag{3.60}$$

tada iz IIIA slijedi kako rezultat funkcije TdM mora sadržavati $C \succ B$. Među preferencijama koje mogu biti pobjedničke (na ovoj klasi profila), IIIA će biti narušen ako pobijedi preferencija $ABC$ ili preferencija $BAC$. No tada bi bilo:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Rightarrow \quad 2l < k + 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Rightarrow \quad l < m \quad \Rightarrow \quad k + 2m < 2l < 2m \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Time je dokazana ova lema. □

**Lema 3.33.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l+4m & k+m+n & 4k+l+4n \\ k+4l+m+4n & l+m & k+m \\ 4k+n & k+l+m & 4l+4m+n \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l+8m+2n \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k+2l+6m \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2k+8l+6m+6n \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k+6l+2m+8n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k+2m+2n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8k+2l+6n \end{aligned} \tag{3.61}$$

Preferencije $BAC$ i $BCA$ ne mogu biti rezultat funkcije društvenog izbora TdM zbog $\beta^2_{sum}(BAC) > \beta^2_{sum}(ACB)$ i $\beta^2_{sum}(BCA) > \beta^2_{sum}(CAB)$.
Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$, tada iz IIIA i pretpostavke

$$k + l + 2n > m, \tag{3.62}$$

slijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $A \succ B$. To je narušeno jedino ako je preferencija $CBA$ rezultat funkcije TdM. U tom slučaju imamo:

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Leftrightarrow \quad k + l + 2n < m,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.62). Ukoliko pak pretpostavimo

$$k + l + 2n < m, \tag{3.63}$$

tada prema IIIA u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $B \succ A$. Provjerimo mogu li preferencije u kojima to ne vrijedi biti pobjedničke:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Leftrightarrow \quad l + 2m < 2k + n \quad \Leftrightarrow \quad m < k + \frac{n}{2} - \frac{l}{2}$$

Iz uvjeta (3.63) sada slijedi:

$$k + l + 2n < m < k + \frac{n}{2} - \frac{l}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}l + \frac{3}{2}n < 0,$$

što nije moguće za $n, l \in \mathbb{N}$.

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CBA) \;\Leftrightarrow\; m < k + n \;\Rightarrow\; k + l + 2n < m < k + n \;\Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(CBA) \;\Leftrightarrow\; m < k + l + 2n \;\Rightarrow\Leftarrow$$

Ukoliko uspoređujemo kandidate $A$ i $C$, tada iz IIIA i pretpostavke

$$2k + n > l + 2m, \tag{3.64}$$

slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ C$. Preferencije koje to narušavaju su $CAB$ i $CBA$. Provjerimo mogu li one biti rezultat funkcije TdM:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

što narušava uvjet (3.64). Ukoliko pak pretpostavimo

$$2k + n < l + 2m, \tag{3.65}$$

iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $C \succ A$. Među preferencijama koje mogu pobijediti u ovoj klasi profila, taj uvjet narušavaju preferencije $ABC$ i $ACB$.

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CBA) \quad \Leftrightarrow \quad l + 2m + n < 2k + n \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Leftrightarrow \quad l + 2m + n < 2k + n \quad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Konačno, kada uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz IIIA i pretpostavke

$$k > 2l + m + n \tag{3.66}$$

slijedi $B \succ C$. Taj će uvjet biti narušen ukoliko je pobjednička preferencija $ACB$, $CAB$ ili $CBA$. No tada bi vrijedilo:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k < 2l + m + n,$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k < l + m,$$

što je u oba slučaja u suprotnosti s pretpostavkom (3.66). Treća opcija vodi do:

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

iz čega, zajedno s pretpostavkom (3.66), slijedi $4l + 2m + 3n < 2k + n < l + 2m$ što nije moguće. Ukoliko pak pretpostavimo

$$k < 2l + m + n \tag{3.67}$$

tada iz IIIA slijedi kako u rezultatu funkcije TdM mora vrijediti $C \succ B$. Jedina preferencija koja može pobijediti na ovoj klasi profila, a koja narušava taj uvjet je $ABC$. No za nju pak vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad 2l + m + n < k,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom (3.67). □

**Lema 3.34.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(C)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l + 4m + n & k + m & 4k + l + n \\ k + 4l + m & l + n & k + m + 4n \\ 4k + 4n & k + l + m + n & 4l + 4m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l + 8m + 2n \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k + 2l + 6m + 6n \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2k + 8l + 6m \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k + 6l + 2m + 2n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k + 2m + 8n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8k + 2l + 6n \end{aligned} \tag{3.68}$$

Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$, iz IIIA i pretpostavke

$$k + l > m + n, \tag{3.69}$$

slijedi kako na profilu treba pobijediti preferencija za koju vrijedi $A \succ B$. Taj je uvjet narušen ako pobijedi preferencija $BAC$, $BCA$ ili $CBA$. No tada je:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k + l < m + n,$$

$$\beta^2_{sum}(BCA) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad k + l < m + n,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad \Leftrightarrow \quad k + l < m + n,$$

što je u kontradikciji s uvjetom (3.69). Ukoliko pak pretpostavimo

$$k + l > m + n, \tag{3.70}$$

tada iz IIIA slijedi kako u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $B \succ A$. Preferencije koje narušavaju taj uvjet su $ABC$, $ACB$ i $CBA$, no prethodne tri nejednadžbe osiguravaju kako uz pretpostavku (3.70) aksiom IIIA ne može biti narušen. Ukoliko uspoređujemo kandidate $A$ i $C$, tada iz IIIA i pretpostavke

$$2k + n > l + 2m, \tag{3.71}$$

slijedi kako rezultat funkcije TdM mora sadržavati $C \succ A$. Preferencije koje narušavaju taj uvjet su $BCA$,$CAB$ i $CBA$, no za njih vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(BCA) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + n < l + 2m,$$

što narušava pretpostavku (3.71). Ujedno, te tri nejednadžbe ujedno osiguravaju da IIIA ne može biti narušen (pomoću preferencija $BAC$,$ACB$ i $ABC$) ukoliko negiramo pretpostavku (3.71). Konačno, kada uspoređujemo kandidate $B$ i $C$, iz IIIA i pretpostavke

$$k + 2n > 2l + m \tag{3.72}$$

slijedi da u pobjedničkoj preferenciji mora vrijediti $B \succ C$, što je narušeno ukoliko pobijedi preferencija $ACB$, $CAB$ ili $CBA$. No u tom slučaju vrijedi:

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k + 2n < 2l + m,$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Leftrightarrow \quad k + 2n < 2l + m,$$

$$\beta^2_{sum}(CBA) < \beta^2_{sum}(BCA) \quad \Leftrightarrow \quad k + 2n < 2l + m,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom (3.72). Iste nejednadžbe osiguravaju da profili $ABC$, $BAC$ ili $BCA$ ne mogu pobijediti ukoliko negiramo pretpostavku (3.72), čime je dokazana ova lema. □

**Lema 3.35.** *Neka je $\alpha_1$ profil nad skupom od tri kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ oblika*

| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ | $\xi(B)$ |
| $\xi(B)$ | $\xi(A)$ | $\xi(C)$ | $\xi(A)$ |
| $\xi(C)$ | $\xi(B)$ | $\xi(B)$ | $\xi(C)$ |

*gdje je $\xi$ neka permutacija skupa $\mathcal{M}$. Tada za svaki profil $\alpha$ koji se može dobiti kao unija profila $\alpha_1$ i nekog broja kopija Condorcetovih trojki vrijedi da funkcija društvenog izbora TdM zadovoljava IIIA za $d = 2$ na profilu $\alpha$.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, dokaz leme možemo provesti za permutaciju identiteta. Za $d = 2$ odredimo matricu $d$-odmaka $M^2(\alpha_1)$:

$$M^2(\alpha_1) = \begin{bmatrix} l+n & k+m & 4k+l+4m+n \\ k+4l+4m & l+m+n & k+4n \\ 4k+m+4n & k+l+n & 4l+m \end{bmatrix}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \beta^2_{sum}(ABC) &= 6l+2m+2n \\ \beta^2_{sum}(ACB) &= 2k+2l+6n \\ \beta^2_{sum}(BAC) &= 2k+8l+6m \\ \beta^2_{sum}(BCA) &= 6k+6l+8m+2n \\ \beta^2_{sum}(CAB) &= 6k+2m+8n \\ \beta^2_{sum}(CBA) &= 8k+2l+6m+6n \end{aligned} \tag{3.73}$$

Preferencije $BCA$ i $CBA$ ne mogu biti rezultat funkcije TdM zbog $\beta^2_{sum}(BCA) > \beta^2_{sum}(ABC)$ i $\beta^2_{sum}(CBA) > \beta^2_{sum}(ACB)$. Kada uspoređujemo kandidate $A$ i $B$, iz IIIA i pretpostavke

$$k + l + 2m > n, \tag{3.74}$$

slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ B$. Jedina preferencija koja ne sadrži taj redoslijed (među preferencijama koje mogu pobijediti u ovoj klasi profila) je preferencija $BAC$. No za nju imamo:

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad \Leftrightarrow \quad k + l + 2m < n,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom (3.74). Ukoliko pak pretpostavimo

$$k + l + 2m < n, \tag{3.75}$$

tada iz IIIA slijedi kako pobjednička preferencija mora sadržavati $B \succ A$. Stoga trebamo provjeriti može li jedna od preferencija $ABC$, $ACB$ i $CAB$ biti pobjednička na danoj klasi profila.

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Leftrightarrow \quad n < k + l + 2m \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(BAC) \;\Leftrightarrow\; n < l + m \;\Rightarrow\; k + l + 2m < n < l + m \;\Rightarrow\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad \Leftrightarrow \quad k + 2n < 2l + m \quad \Leftrightarrow \quad n < l + \frac{m}{2} - \frac{k}{2}$$

Iz uvjeta (3.75) sada slijedi:

$$k + l + 2m < n < l + \frac{m}{2} - \frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}m < 0,$$

što nije moguće za $k, m \in \mathbb{N}$.

Što se odnosa kandidata $A$ i $C$ tiče, iz IIIA uz pretpostavku

$$2k + m + n > l, \tag{3.76}$$

slijedi da pobjednička preferencija mora sadržavati $A \succ C$. Jedina preferencija (među preferencijama koje mogu pobijediti na ovoj klasi profila) koja to narušava je $CAB$. No, da bi ta preferencija minimizirala sumu $d$-mjera odmaka, mora vrijediti:

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(ACB) \quad \Leftrightarrow \quad k + l + 2m < n,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom (3.76). No, ukoliko pretpostavimo da vrijedi

$$2k + m + n < l, \tag{3.77}$$

tada iz IIIA slijedi kako rezultat funkcije TdM mora sadržavati $C \succ A$. U tom slučaju moramo provjeriti može li sumu $d$-mjera odmaka minimizirati neka od sljedećih preferencija: $ABC$, $ACB$ ili $BAC$.

$$\beta^2_{sum}(ABC) < \beta^2_{sum}(CAB) \;\Leftrightarrow\; l < k + n \;\Rightarrow\; 2k + m + n < l < k + n \;\Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad\Leftrightarrow\quad l < 2k + m + n \quad\Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(BAC) < \beta^2_{sum}(CAB) \quad\Leftrightarrow\quad 2l + m < k + 2n \quad\Leftrightarrow\quad l < \frac{k}{2} + n - \frac{m}{2}$$

Iz uvjeta (3.77) sada slijedi:

$$2k + m + n < l < \frac{k}{2} + n - \frac{m}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}m < 0,$$

što nije moguće za $k, m \in \mathbb{N}$.

Konačno, za odnos kandidata $B$ i $C$, uz pretpostavku

$$k + 2n > 2l + m \tag{3.78}$$

iz IIIA slijedi da u rezultatu funkcije TdM mora biti $B \succ C$. Aksiom IIIA bi bio narušen ukoliko bi pobjednička preferencija bila $ACB$ ili $CAB$. No tada imamo :

$$\beta^2_{sum}(ACB) < \beta^2_{sum}(ABC) \quad\Leftrightarrow\quad k + 2n < 2l + m \quad\Rightarrow\!\Leftarrow$$

$$\beta^2_{sum}(CAB) < \beta^2_{sum}(BAC) \quad\Leftrightarrow\quad k + 2n < 2l + m \quad\Rightarrow\!\Leftarrow$$

Ste nejednadžbe se koriste kako bi prilikom negiranja pretpostavke (3.78) dokazali da preferencije $ABC$ i $BAC$ ne mogu biti rezultat funkcije društvenog izbora TdM. □

Ovim Lemama je dokazan Teorem 3.25 (strana 115), odnosno dokazali smo kako funkcija društvenog izbora TdM za $d = 2$ i na skupu od tri kandidata zadovoljava aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet. Taj je rezultat posebno zanimljiv zbog karakterizacije Borda izračuna, upravo pomoću tog aksioma. Iako postoji više karakterizacija koje bi se u ovom slučaju mogle iskoristiti [27, 31, 33], upotrijebiti ćemo onu koju je 2017. godine dao Mihara.[8] [23]

Odlučili smo iskoristiti baš tu karakterizaciju, budući se temelji upravo na aksiomima teorije društvenog izbora koje smo proučavali u ovom radu. Prema njoj, funkcija društvenog izbora je Borda izračun ako i samo ako zadovoljava sljedeća tri aksioma teorije društvenog izbora: neutralna je, monotona i zadovoljava IIIA.[9]

Upravo ta svojstva smo ispitali i dokazali za funkciju društvenog izbora TdM. Sama neutralnost (vidi Definiciju 1.5), odnosno simetrično tretiranje svih kandidata trivijalno slijedi iz definicije funkcije društvenog izbora TdM. Monotonost funkcije TdM za $d = 2$ i tri kandidata dokazana je u Teoremu 3.21. Također, za $d = 2$ i tri kandidata u Teoremu 3.25 dokazano je kako TdM zadovoljava i aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA).

Time je dokazana vrlo zanimljiva (djelomična) karakterizacija funkcije društvenog izbora TdM: u slučaju s tri kandidata, i za vrijednost $d = 2$ funkcija TdM ekvivalentna je Borda izračunu. No ukoliko se poveća broj kandidata (Primjer 3.6) ili promjeni vrijednost parametra $d$ kojim definiramo poželjnu / prihvatljivu mjeru kompromisa (Primjer 3.5) funkcija TdM više nije ekvivalentna Borda izračunu. Radi se o prilično zanimljivom fenomenu, koji ostavlja prostora za daljnje istraživanje.

[8]Mogućnosti aksiomatske karakterizacije Borda izračuna su uistinu brojne, i u ovom radu su izdvojene tek one koje su svojim pristupom vezane uz temu rada. Saari u [32] navodi: *"Pretpostavimo da izborno pravilo ne dozvoljava određene vrste izbornih rezultata. Takvi rezultati koji nedostaju formiraju određena pravila; primjerice, Borda izračun nikada ne rangira Condorcetovog gubitnika ispred Condorcetovog pobjednika. Jednostavno je potom pretvoriti neki nedozvoljeni izborni rezultat u "aksiomatsku karakterizaciju". Budući Borda izračun dozvoljava najmanji broj vrsta izbornog rezultata, nad različitim podskupima kandidata, samim time sadržava najveći broj "svojstava" koja omogućavaju generiranje različitih novih "aksiomatskih karakterizacija" Borda izračuna."*

[9]Mihara u samom radu koristi druge nazive za iste aksiome. Umjesto monotonosti u [23] Mihara traži da je funkcija društvenog izbora "*Positively Responsive*", što je samo drugi naziv za isto svojstvo. Također, Mihara traži da funkcija zadovoljava "*Positional Cancellation*". To je svojstvo definirano na drugačiji način nego li IIIA, no u samom radu Mihara ukazuje na ekvivalentnost ta dva aksioma.

# Poglavlje 4

# Zaključak

Na početku rada na istraživanju i modeliranju pojma kompromisa, a u okviru ovog rada, postavili smo sljedeće ciljeve: kao glavni cilj rada postavljeno je modeliranje pojma kompromisa u okviru teorije ordinalnih preferencija agenata, te analiza posljedica koje slijede iz odgovarajuće formalne definicije. Kako bi se ostvario taj cilj, postavljeni su i pod ciljevi istraživanja:

**C1** Modelirati mjeru kompromisa na profilima ordinalnih preferencija agenata.

**C2** Analizirati svojstva koja prema mjeri (iz C1) imaju etablirane funkcije društvenog odabira (Borda izračun, većinski izračun, Condorcetova metoda).

**C3** Ispitati mogu li se preko optimizacije kompromisa definirati nove funkcije društvenog odabira.

**C4** Izrada programske podrške za računanje mjere kompromisa uz implementaciju etabliranih funkcija društvenog odabira i novih funkcija odabira definiranih u ovom radu.

U svrhu postizanja postavljenih ciljeva, postavljena su i istraživačka pitanja na koja ovim radom želimo pružiti odgovor:

**IP1** Pod kojim je uvjetima jednostavna funkcija društvenog odabira koja proizlazi iz (naivne) optimizacije mjere kompromisa ekvivalentna već postojećim funkcijama društvenog odabira?

**IP2** Koje aksiome teorije funkcija društvenog odabira zadovoljava funkcija koja proizlazi iz pohlepne optimizacije mjere kompromisa?

**IP3** Koje aksiome teorije funkcija društvenog odabira zadovoljava funkcija koja proizlazi iz potpune optimizacije mjere kompromisa?

Cilj C1 ostvaren je u početnom dijelu ovog rada. Nakon pregleda dosadašnjih istraživanja (Poglavlje 1.1) u kojemu je cilj C1 stavljen u kontekst obavljenih istraživanja u tom području teorije odlučivanja, te Poglavlja 2.1 u kojemu je dana motivacija za analizu pojma kompromisa iz perspektive koja je korištena u ovom radu, u Definiciji 2.1 pružena je stroga formalna definicija pojma "$d$-mjere odmaka od kompromisa" kojim se kvantitativno opisuju odnosi u teoriji društvenog izbora nad strogim linearnim preferencijama (agenata) koje neformalno nazivamo "kompromisom". Nakon same formalne definicije, u Poglavlju 2.2, analiziran je odnos između novo definiranog pojma i svojstva neodređenosti koje je nužno sadržano u analizi pojma kompromisa.

Drugi zadani cilj ovog rada, C2, sustavno je obrađen u Poglavlju 2.5 i Poglavlju 2.6. U Poglavlju 2.5 uspoređena su svojstva Borda i većinskog izračuna u odnosu na definiranu $d$-mjeru odmaka od kompromisa. Usporedba je napravljena kroz analizu $d$-mjere odmaka od kompromisa oko izbora pobjednika po jednoj i drugoj metodi. Uobičajeno je (neformalno) prihvaćanje Borda izračuna kao metode koja je bliža kompromisu (pri određivanju pobjednika) u odnosu na većinski izračun, što se tumači činjenicom da Borda izračun prilikom određivanja pobjednika u obzir uzima plasmane svih kandidata u svim preferencijama, dok s druge strane, većinski izračun u obzir uzima samo broj prvoplasiranih pozicija određenog kandidata u preferencijama na danom profilu.

Provedena analiza donekle je opravdala takvo shvaćanje, u kontekstu kompromisa kao minimizacije $d$-mjere odmaka od kompromisa, kako je definiran u ovom radu. Naime, u Teoremu 2.6 dokazano na skupu od tri kandidata, Borda pobjednik, ukoliko se razlikuje od većinskog pobjednika, uvijek ima manju $d$-mjeru odmaka od kompromisa oko plasmana na prvo mjesto.

No taj zaključak ipak nije općenit. Ukoliko opisane funkcije društvenog izbora promatramo na skupovima s četiri ili više kandidata, tada Teorem 2.18 i Teorem 2.20 pokazuju kako je moguća egzistencija profila na kojemu većinski pobjednik ima manju $d$-mjeru odmaka od kompromisa oko plasmana na prvo mjesto, od Borda pobjednika. Ti rezultati slijede iz veće slobode pri formiranju profila koje omogućuje veći broj kandidata. Borda pobjednik tako može u većem broju preferencija biti pozicioniran na zadnje mjesto, čime se značajno utječe na mjeru $d$-odmaka od kompromisa u odnosu na pobjedničku poziciju. Stoga nas ta analiza uči kako je potrebno preispitati intuitivne i neformalne doživljaje o karakteristikama pojedinih funkcija društvenog izbora (ovoga puta o odnosu Borda izračuna i pojma kompromisa), koje su često zasnovane na intuitivnom (i često neutemeljenom) poopćavanju svojstva koje percipiramo na manjim skupovima (primjerice na skupovima s tri kandidata) koji su zbog svoje veličine lakši za shvaćanje.

U Poglavlju 2.6 analiziran je odnos druge dvije etablirane funkcije društvenog izbora, Borda izračun i Condorcetova metoda, u odnosu na $d$-mjeru odmaka od kompromisa oko izbora pobjednika. Rezultati te analize nisu toliko jednoznačni, kao li oni iz prethodnog poglavlja. Naime, kako je pokazano u Propoziciji 2.21, pa potom i u analizi koja prethodi Primjeru 2.7, već i na skupu od tri kandidata, egzistiraju profili na kojima Borda pobjednik ima manju $d$-mjeru odmaka od kompromisa o prvom mjestu, ali i profili na kojima je u takvoj poziciji Condorcetov pobjednik.

Osnovni razlog za tu situaciju je u različitom odnosu koje te dvije funkcije imaju u odnosu na postupak uklanjanja (dodavanja) maksimalno simetričnih pod profila. Naime, dok su Borda izračun, većinski izračun i $d$-mjera odmaka invarijantni na uklanjanje ili dodavanje Condorcetovih trojki (Propozicije 2.4 i 2.5),[1] Condorcetova metoda nije. Svaka Condorcetova trojka mijenja odnose duela između (svih) kandidata, što omogućava manipulacije profilima s ciljem mijenjanja Condorcetovog pobjednika, pri čemu sve ostale promatrane veličine (Borda pobjednik, većinski pobjednik i $d$-mjera odmaka) ostaju iste.

Taj rezultat daje motivaciju i za daljnje istraživanje u tom smjeru; pitanje invarijantnosti na uklanjanje maksimalno simetričnih pod profila moguće je aksiomatizirati, te analizirati klase funkcija društvenog izbora u odnosu na zadovoljavanje tako definiranog aksioma. Vjerujemo kako je to otvoreno pitanje i smjer za daljnje istraživanje koji može polučiti zanimljive nove rezultate.

Treći zadani cilj ovog rada, C3, obrađen je u Poglavlju 3. Osnovna ideja ovog cilja istraživanja bilo je ispitivanje načina na koje je, kroz definiciju novih funkcija društvenog izbora, moguće minimizirati $d$-mjeru odmaka od kompromisa, odnosno maksimizirati kompromis na određenom profilu, u kontekstu definicija formiranih ovim radom.

Minimizaciji $d$-mjere odmaka od kompromisa pristupilo se na nekoliko različitih načina.

[1] Pod profili nazvani *Condorcetovim trojkama* koji se koriste u analizi u Poglavljima 2.5 i 2.6 restrikcija su pojma maksimalno simetričnog po$d$-profila, a koji je opisan u Propoziciji 3.23

U Poglavlju 3.1 definirana je funkcija društvenog izbora SdM (Definicija 3.1) koja se temelji na minimizaciji $d$-mjere odmaka od kompromisa oko prvog mjesta. U okviru razrade tog cilja, postavljeno je i istraživačko pitanje IP1, čiji je odgovor dan analizom funkcije društvenog izbora SdM. Kroz Propoziciju 3.2, Teorem 3.3, Teorem 3.4, Propoziciju 3.5 i Propoziciju 3.6 dokazano je kako funkcija društvenog izbora SdM zadovoljava aksiome anonimnosti, neutralnosti, (jake) monotonosti, Paretov aksiom, aksiom učvršćenja, te aksiom neprekinutosti. Tim rezultatima dokazano je kako SdM zadovoljava uvjete Youngove karakterizacije (Teorem 3.7), te da je za svaku vrijednost parametra $d > 1$, ekvivalentna nekoj od bodovnih pozicijskih funkcija društvenog izbora.[2]

Drugi način na koji smo pristupili minimizaciji $d$-mjere odmaka od kompromisa jest kroz upotrebu pohlepnih (*greedy*) metoda minimizacije (Poglavlje 3.2). Osnovna metoda pohlepne minimizacije jest korištenje punog opsega informacije koju pruža definicija $d$-mjere odmaka o kompromisu oko smještanja $i$-tog kandidata na $j$-tu poziciju u rezultatu funkcije društvenog izbora, što je provedeno u Definiciji 3.10 definiranjem funkcije društvenog izbora GdM. Tražeći odgovor na drugo postavljeno istraživačko pitanje IP2, o tome koja svojstva zadovoljava tako definirana funkcija, pokazali smo kako GdM ne zadovoljava temeljni aksiom teorije društvenog izbora, Paretov aksiom.[3]

Zbog toga smo u nastavku analize potražili način unaprjeđivanja funkcije društvenog izbora temeljenog na pohlepnoj minimizaciji, te ga ponudili u formi nove funkcije društvenog izbora, CGdM, koja se temelji na tzv. pohlepnoj minimizaciji kumulativne vrijednosti $d$-mjere odmaka od kompromisa (Definicija 3.12). Za funkciju CGdM dokazana su sljedeća svojstva: dobro asimptotsko ponašanje (Teorem 3.13), zadovoljavanje Paretovog aksioma nad skupom od tri kandidata (Teorem 3.14) te zadovoljavanje aksioma slabe monotonosti nad skupom od tri kandidata (Teorem 3.15). Ujedno, kroz konstrukciju Primjera 3.3 pokazali smo na koji način se može konstruirati profil na kojemu je narušena jaka monotonost funkcije CGdM za svaku vrijednost parametra $d > 1$. Time je dan odgovor i na drugo istraživačko pitanje, IP2.

U Poglavlju 3.3 cilju istraživanja C3 pristupili smo kroz definiciju funkcije društvenog iz-

[2] Kažemo "nekoj" od bodovnih pozicijskih funkcija društvenog izbora, budući bodovni vektor koji definira bodovnu pozicijsku funkciju društvenog izbora u ovom slučaju ovisi o izboru parametra $d > 1$ (Teorem 3.8).

[3] Paretov aksiom traži od funkcije društvenog izbora da ukoliko je jedan kandidat plasiran ispred drugog kandidata u svim preferencijama nekog profila, tada mora biti tako plasiran i u rezultatu funkcije društvenog izbora.

bora TdM preko potpune minimizacije $d$-mjere odmaka od kompromisa (Definicija 3.16). Ideja tog pristupa je u minimizaciji sume svih $d$-mjera odmaka određenog kandidata (u finalnom poretku) u odnosu na mjesto na koje je pozicionirana u tom poretku. Minimizacija se provodi obzirom na sve moguće permutacije (poretke) kandidata.[4]

U svrhu analize tako definirane funkcije društvenog izbora, postavljeno je i istraživačko pitanje IP3. Odgovor na to pitanje pružen je kroz Teorem 3.17 (kojim je dokazano dobro asimptotsko ponašanje funkcije TdM), Teorem 3.18 (kojim je dokazano da funkcija TdM zadovoljava Paretov aksiom za svaku vrijednost parametra $d > 1$), te Teorem 3.21 (kojim je dokazano kako je funkcija TdM strogo monotona nad skupom od tri kandidata i za $d = 2$. Nadalje, Teoremom 3.22 je dokazano kako TdM nije monotona ukoliko je broj kandidata veći ili jednak od četiri, te je objašnjena konstrukcija nemonotonih profila za $d \neq 2$ (analiza koja prethodi Primjeru 3.5).

Posljednji dio analize funkcije društvenog izbora TdM posvećen je aksiomu nezavisnosti od nevažnih alternativa (IIA), te aksiomu nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA). Zaključak kako TdM ne može zadovoljavati aksiom nezavisnosti od nevažnih alternativa slijedi iz činjenice da je TdM invarijantna na uklanjanje maksimalno simetričnih pod profila (Propozicija 3.23).[5] No, prilikom analiziranja nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA), dokazan je zanimljiv rezultat (Teorem 3.25): za $d = 2$, nad skupom od tri kandidata, funkcija društvenog izbora TdM ekvivalentna je Borda izračunu. Taj rezultat slijedi iz karakterizacije Borda izračuna koju je dao Mihara [23], budući za $d = 2$ nad skupom od tri kandidata, TdM zadovoljava aksiome neutralnosti, monotonosti i nezavisnosti od nevažnih alternativa s obzirom na intenzitet (IIIA).

Budući povećanjem broja kandidata, ili promjenom društveno prihvaćene mjere kompromisa, $d$, funkcija TdM prestaje biti ekvivalentna Borda izračunu, uočavamo zanimljivu

[4] Takav pristup definiranju funkcija društvenog izbora već je poznat. Najpoznatiji je rad Johna Georgea Kemenyja, u kojemu predstavlja metodu minimizacije Kendallove tau-udaljenosti obzirom na sve moguće permutacije (poretke) kandidata. [18, 20] Osnovna razlika između funkcija TdM i Kemenyjeve metode je u veličini koja se minimizira. Dok Kemeny traži minimum tau-udaljenosti, odnosno sumu najmanjeg mogućeg broja zamjena kandidata (tzv. "*bubble sort*" proveden na zadanom profilu) kako bi se dobila ciljana permutacija, funkcija društvenog izbora TdM minimizira sumu *potencija* udaljenosti, kod kojih iznos potencije $d > 1$ predstavlja društveni izbor prihvatljive mjere kompromisa.

[5] Invarijantnost na uklanjanje maksimalnog simetričnog pod profila je svojstvo koje TdM dijeli s mnogim funkcijama društvenog izbora, poput Borda i većinskog izračuna. Utoliko rezultat nezadovoljavanja aksioma IIA ne čudi, pogotovo stoga što je upravo taj aksiom od svog nastanka do danas često kritiziran kao (pre)restriktivni dio Arrowljevog teorema nemogućnosti.

i neuobičajenu situaciju (u teoriji društvenog izbora) s dvije funkcije koje su ekvivalentne isključivo na određenom suženju domene. Budući konstrukcija funkcije TdM za $d = 2$ (minimizacija određene sume kvadratnih izraza) neodoljivo podsjeća na metodu najmanjih kvadrata (kao klasičnu metodu numeričke matematike), ostaje otvoren prostor za istraživanje mogućih poveznica ovih teoretskih grana.

Programska rješenja potrebna za realizaciju ovog rada (cilj C4) predstavljena su u Dodatku A ovog rada.

Konačno, istaknimo i kako je ovaj rad otvorio mogućnost istraživanja pojma kompromisa, u okviru teorije društvenog izbora nad ordinalnim preferencijama, i kroz aksiomatski pristup. Funkcije društvenog izbora koje su definirane u ovom radu, kao i njihova (analizirana) svojstva, daju temelja za formuliranje aksioma kompromisnosti, opet kao verzije paradoksa prebrajanja. To otvoreno područje daljnjeg istraživanja omogućilo bi formalnu definiciju pojma kao punopravnog aksioma teorije društvenog izbora.

## Zahvala

Ovaj rad je napisan uz podršku Veleučilišta Velika Gorica i Hrvatske zaklade za znanost pod projektom HRZZ-UIP-2017-05-9219.

# Bibliografija


[1] Arrow, K.J. *"Social choice and individual values"*, drugo izdanje, Yale University Press, New Haven (1963)

[2] Bassett, G.W., Persky, J. *"Robust Voting"*, Public Choice 99, str. 299-310, (1999)

[3] de Borda, J.C. *"Mémoire sur les élections au scrutin, Mémoire de l'Académie Royale"*, Histoire de l'Académie des Sciences, Paris, str. 657–665 (1781)

[4] Bouyssou, D., Marchant, T. i Perny, P. odlomak *"Social Choice Theory and Multicriteria Decision Aiding"* iz *"Decision-making Process: Concepts and Methods"*, ch. 19, str. 741-770, ISTE Ltd and John Wiley & Sons (2009)

[5] Brams, S., Kilgour, D.M. *"Fallback Bargaining"*, Group Decision and Negociation, Vol. 10, str. 287-316 (2001)

[6] Brams, S., Steven J. i Fishburn, P.C. odlomak *"Voting procedures"* iz *"Handbook of Social Choice and Welfare"*, K. J. Arrow i A. K. Sen i K. Suzumura, ed. 1, vol. 1, ch. 4, str. 173-236, Elsevier (2003)

[7] Bartholdi, J., Tovey, C.A., Trick, M.A. *"Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election"*, Social Choice and Welfare, Vol. 6, str. 157-165 (1989)

[8] Cebi, S., Kahraman, C. *"A new weighted fuzzy information axiom method in production research"*, Journal of Enterprise Information Management, Vol. 32, str. 170-190 (2019)

[9] Chatterji, S., Sen, A. i Zeng, H. *"A characterization of single-peaked preferences via random social choice functions: A characterization of single-peaked preferences"*, Theoretical Economics 11(2) str. 711-733 (2016)

[10] Condorcet, M.J.A.N., Marque de, *"Essai sur l'application de l'analyse à la probabilitié des décisions rendues à la pluralité des voix"*, Paris: l'Imprimerie Royale; (1785) prijevod u Mclean and Urken (1995), str. 91–113.

[11] Felsenthal, D.S., *"Review of paradoxes afflicting procedures for electing a single candidate"* poglavlje u *"Electoral systems: paradoxes, assumptions, and procedures"*, Springer Verlag, New York, str. 19-92 (2012)

[12] Hatzivelkos, A. *"The Mathematical Look at a Notion of the Compromise and Its Ramifications"*, Central European Conference on Information and Intelligent Systems, str. 301-308 (2017)

[13] Hatzivelkos, A. *"Borda and plurality comparison with regard to compromise as a Sorites paradox"*, Interdisciplinary Description of Complex Systems, Vol. 16, str. 465-484 (2018)

[14] Hatzivelkos, A. *"Axiomatic approach to the notion of compromise"*, Proceedings of the 21st International Conference on Group Decision and Negotiation, str. 191-203 (2021)

[15] Hatzivelkos, A., Maretić, M. *"Evaluating Compromise in Social Choice Functions"*, Journal of Information and Organizational Sciences, Vol. 46, 2; str. 377-389 doi:10.31341/jios.46.2.7 (2022)

[16] Chichilnisky, G. *"Social Aggregation Rules and Continuity"*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 97, No. 2, str. 337-352 (1982)

[17] Hyde, D. *"Sorites Paradox"*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ur.), forthcoming `http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/sorites-paradox/`

[18] Kemeny, J. *"Mathematics without numbers"*, Daedhalus, Vol. 88, str. 577-591 (1959)

[19] Kemeny, J. Snell, I. *"Mathematical models in the social sciences"*, Boston: Ginn (1962)

[20] Kendall, M. *"A New Measure of Rank Correlation"*, Biometrika. 30. str. 81–89. (1938) DOI:10.2307/2332226

[21] Li, D.F. *"Compromise ratio method for fuzzy multi-attribute group decision making"*, Applied Soft Computing, Vol. 7, str. 807-817 (2007)

[22] Merlin, V., Özkal Sanver, İ., Sanver, M. Remzi *"Compromise Rules Revisited"*, Group Decision and Negotiation, Vol. 28, str. 63–78 (2019)

[23] Mihara, H.R. *"Characterizing the Borda ranking rule for a fixed population"*, MPRA Paper 78093, University Library of Munich, Germany (2017.)

[24] Nurmi, H. *"Voting Paradoxes and How to Deal with Them"*, Springer Verlag, (1999)

[25] Pacuit, E. *"Voting Methods"*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/voting-methods/`

[26] Ratliff, T.C., *"Lewis Carroll, Voting, and the Taxicab Metric"*, The College Mathematics Journal, 41:4, str. 303-311, (2010)

[27] Saari, D.G. *"The Borda Dictionary"*, Social Choice and Welfare, vol. 7, str. 279-317 (1990)

[28] Saari, D.G. *"Basic Geometry of Voting"*, Springer-Verlag, New York, (1995)

[29] Saari, D.G. *"Connecting And Resolving Sen's And Arrow's Theorems"*, Social Choice and Welfare, vol. 15, str. 239-261 (1998)

[30] Saari, D.G. *"Explaining All Three-Alternative Voting Outcomes"*, Journal of Economic Theory, vol. 87, str. 313-355 (1999)

[31] Saari, D.G. *"Mathematical structure of voting paradoxes"*, Economic Theory, vol. 15, str. 1-53 (2000)

[32] Saari, D.G. *"Handbook of Social Choice and Welfare: Geometry of Voting"*, Springer-Verlag, New York, (2011)

[33] Saari, D.G. *"A Simple Characterization of Borda Rule for Fixed Electorate"*, SSRN Electronic Journal, url = http://www.ssrn.com/abstract=2917013, (2017)

[34] Özkal-Sanver, I. i Sanver, M.R. *"Efficiency in the Degree of Compromise: A New Axiom for Social Choice Theory"*, Group Decision and Negotiation, Vol. 13, str. 375–380, (2004)

[35] Sertel, M.R. *"Lecture Notes in Microeconomics"*, Bogazici University, unpublished (1986)

[36] Sertel, M.R. i Yilmaz, B. *"The Majoritarian Compromise is Majoritarian Optimal and Subgame Perfect Implementable"*, Social Choice and Welfare 16, str 615-627 (1999)

[37] Vadde, S., Allen, J.K., Mistree, F. *"Compromise decision support problems for hierarchical design involving uncertainty"*, Computers & Structures, Vol. 52, str. 645-658 (1994)

[38] Young, H.P. *"Social Choice Scoring Functions"*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 28, No. 4 , str. 824-838 (1975)

[39] Young, H.P. *"Optimal Voting Rules"*, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 9, No. 1 , str. 51-64 (1995)

[40] Yu, G.F., Fei, W., Li, D.F. *"A Compromise-Typed Variable Weight Decision Method for Hybrid Multiattribute Decision Making"*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 27, str. 861-872 (2019)

# Dodatak A

# Programska rješenja

Programska podrška u ovom radu, čiji je razvoj i jedan od ciljeva rada (C4), implementirana je u okviru programskog paketa *Wolfram Mathematica*. Stoga je za upotrebu navedenih programskih rješenja potrebno korištenje tog programskog paketa. Programska rješenja koja su korištena za računanje rezultata funkcija društvenog izbora u ovom radu dostupna su putem platforme *Github* na poveznici: https://github.com/hatzivelkos/socho

U ovom ćemo dodatku ukratko objasniti na koji su način strukturirana programska rješenja koja računaju vrijednosti funkcija društvenog izbora te kako se koriste.

Za početak treba istaknuti kako su funkcije društvenog izbora koje promatramo u ovom radu, definirane nad skupom svih mogućih strogih linearnih poredaka kandidata, koji označavamo s $\mathcal{L}(\mathcal{M})^n$. Tako na primjer, za skup kandidata $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, skup svih strogih linearnih poredaka glasi:

$$\{A \succ B \succ C,\ B \succ C \succ A,\ C \succ A \succ B,\ A \succ C \succ B,\ C \succ B \succ A,\ B \succ A \succ C,\}.$$

Broj elemenata takvog skupa raste faktorijelno s brojem kandidata, odnosno s obzirom na kardinalni broj skupa kandidata $|\mathcal{M}|$, jer je broj mogućih poredaka upravo jednak $|\mathcal{M}|!$.

Stoga je za potrebe ovog rada napravljeno programsko rješenje koje generira rezultat funkcije društvenog izbora za tri, odnosno četiri kandidata. Kod četiri kandidata funkcije društvenog izbora bilježe 4!, odnosno 24 ulazne varijable.

Ulazni podatak za funkciju društvenog izbora je tada *profil* koji opisuje koliko je birača kao svoj izbor odabralo određeni poredak.[1] Za navedeni primjer od tri kandidata, profil

[1]Kao oznaku za profil u ovom radu koristimo (indeksirano) malo grčko slovo $\alpha$.

možemo prikazati sljedećom tablicom:

Tablica A.1: Opći prikaz profila $\alpha$ nad skupom od tri kandidata

| $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $C$ | $B$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $B$ | $A$ | $C$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ |

Dakle, ulazni podatak za funkciju društvenog izbora koja je definirana nad skupom od tri kandidata je uređena šestorka $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ koja jedinstveno određuje profil preferencija $\alpha$.

U slučaju profila preferencija s četiri kandidata, broj mogućih stogih linearnih poredaka raste na dvadeset i četiri. Stoga je ulazni podatak za funkciju društvenog izbora uređena dvadesetčetvorka. Opći profil koji determinira navedeni ulazni podataka, a koji je korišten u programskim rješenjima naveden je u Tablici A.2.

Tablica A.2: Opći prikaz profila $\alpha$ nad skupom od četiri kandidata

| $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ | $i_7$ | $i_8$ | $i_9$ | $i_{10}$ | $i_{11}$ | $i_{12}$ | $i_{13}$ | $i_{14}$ | $i_{15}$ | $i_{16}$ | $i_{17}$ | $i_{18}$ | $i_{19}$ | $i_{20}$ | $i_{21}$ | $i_{22}$ | $i_{23}$ | $i_{24}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $D$ | $C$ | $B$ | $A$ | $C$ | $D$ | $B$ | $A$ | $D$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $D$ | $C$ | $A$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $B$ | $A$ | $D$ | $C$ | $B$ | $A$ | $C$ | $D$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $D$ | $D$ | $A$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $D$ | $D$ | $B$ | $A$ | $C$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $D$ | $C$ | $A$ | $B$ | $B$ | $D$ | $A$ | $C$ | $C$ | $D$ | $A$ | $B$ |
| $D$ | $C$ | $B$ | $A$ | $C$ | $D$ | $B$ | $A$ | $D$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $D$ | $C$ | $A$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $A$ |

Kako smo se u ovom radu (zbog kombinatorne kompleksnosti) ograničili na one rezultate funkcija društvenog izbora koji su strogi linearni poretci danih kandidata, rezultat funkcije društvenog izbora je jedan od navedenih strogih linearnih poredaka.

Samo računanje izlazne vrijednosti za pojedine funkcije društvenog izbora slijedi definicije navedene u ovom radu: za Borda izračun Definiciju 1.1, za Condorcetov izračun Definiciju 1.3, za izračun funkcije SdM Definiciju 3.1, za izračun GdM funkcije Definiciju 3.10, za izračun funkcije CGdM Definiciju 3.12 te za računanje funkcije TdM Definiciju 3.16.

Tako se, na primjer, za računanje izlazne vrijednosti funkcije društvenog izbora Condorcetov izračun, koje je implementirano u datoteci `Condorcet_basic.nb`, definiraju varijable u kojima računamo rezultate duela između svaka dva kandidata. Potom se testira impliciraju li ti rezultati duela (tranzitivni) strogi linearni poredak kandidata. Ukoliko da, takav se poredak navodi kao izlazni rezultat programa.

S druge strane, primjerice, kod računanja vrijednosti funkcije društvenog izbora TdM, koje je implementirano u datoteci `TNdK_basic.nb`, definiramo sve vrijednosti sume $d$-mjera koje su rezultat svakog pojedinog poretka (permutacije) kandaidata, pohranjujući vrijednosti tih suma u zasebne varijable. Potom određujemo najmanju takvu vrijednost, te pripadni poredak kandidata navodimo kao izlazni rezultat programa.

Slijedi pregled programskih rješenja korištenih u izradi ovog rada, koja su dostupna putem platforme *Github* na adresi: https://github.com/hatzivelkos/socho

- `borda_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora Borda izračun.

- `borda_win_basic.nb`

  Program kojim se računa prvoplasirani kandidat u pobjedničkoj preferenciji koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora Borda izračun.

- `Condorcet_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora Condorcetov izračun.

- `Condorcet_win_basic.nb`

  Program kojim se računa prvoplasirani kandidat u pobjedničkoj preferenciji koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora Condorcetov izračun.

- `vecinski_win_basic.nb`

  Program kojim se računa prvoplasirani kandidat u pobjedničkoj preferenciji koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora većinski izračun.

- `SdK_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora SdM (vidi stranicu 74).

- `GdK_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora GdM (vidi stranicu 82).

- `CGdK_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora CGdM (vidi stranicu 85).

- `TNdK_basic.nb`

  Program kojim se računa preferencija, koju za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora TdM (vidi stranicu 93).

- `TNdK_win_basic.nb`

  Program kojim se računa prvoplasirani kandidat u pobjedničkoj preferenciji koju, za dani profil nad skupom od tri kandidata, računa funkcija društvenog izbora TdM.

- `TNdK_4_basic.nb`

  Program kojim se računa pobjednička preferencija koju, za dani profil nad skupom od četiri kandidata, računa funkcija društvenog izbora TdM.

- `dvostupcana_simulacija.nb`

  Program kojim se računaju pobjedničke preferencije koje na klasi profila, koji se uklanjanjem maksimalno simetričnih pod profila reduciraju na dvostupčani profil, biraju funkcije društvenog izbora Borda izračun, GdM i TdM (sve su navedene funkcije društvenog izbora invarijantne na uklanjanje maksimalnog simetričnog pod profila iz profila preferencija na kojemu ih računamo). Izlazni rezultat programa je grafički prikaz područja na kojima se bira određeni pobjednički profil za svaku od navedenih funkcija društvenog izbora. Usporedba rezultata za pojedine funkcije društvenog izbora omogućava identifikaciju profila na kojima se pojavljuju razlike u rezultatu.

- `dvostupcana_win_simulacija.nb`

  Program kojim se računaju prvoplasirani kanidati u pobjedničkoj preferenciji koje na klasi profila, koji se uklanjanjem maksimalno simetričnih pod profila reduciraju na dvostupčani profil, biraju funkcije društvenog izbora Borda izračun, GdM i TdM. Izlazni rezultat programa je grafički prikaz područja na kojima se bira određeni pobjednički kandidat za svaku od navedenih funkcija društvenog izbora.

- `trostupcana_simulacija.nb`
  Program kojim se računaju pobjedničke preferencije koje na klasi profila, koji se uklanjanjem maksimalno simetričnih pod profila reduciraju na trostupčani profil, biraju funkcije društvenog izbora Borda izračun, GdM i TdM. Izlazni rezultat programa je grafički prikaz područja na kojima se bira određeni pobjednički profil za svaku od navedenih funkcija društvenog izbora. Usporedba rezultata za pojedine funkcije društvenog izbora omogućava identifikaciju profila na kojima se pojavljuju razlike u rezultatu.

- `trostupcana_win_simulacija.nb`
  Program kojim se računaju prvoplasirani kanidati u pobjedničkoj preferenciji koje na klasi profila, koji se uklanjanjem maksimalno simetričnih pod profila reduciraju na trostupčani profil, biraju funkcije društvenog izbora Borda izračun, GdM i TdM. Izlazni rezultat programa je grafički prikaz područja na kojima se bira određeni pobjednički kandidat za svaku od navedenih funkcija društvenog izbora.

- `cetverostupcana_win_simulacija.nb`
  Program kojim se računaju prvoplasirani kanidati u pobjedničkoj preferenciji koje na klasi profila, koji se uklanjanjem maksimalno simetričnih pod profila reduciraju na četvero stupčani profil, biraju funkcije društvenog izbora Borda izračun, GdM i TdM. Izlazni rezultat programa je grafički prikaz područja na kojima se bira određeni pobjednički kandidat za svaku od navedenih funkcija društvenog izbora.

# Životopis

Aleksandar Hatzivelkos rođen je u Zagrebu, Hrvatska 1974. godine. Nakon osnovne i srednje škole (MIOC „Vladimir Popović“), 1993. godine upisuje studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom studija bio je demonstrator iz predmeta Elementarna matematika, te je dobitnik Rektorove nagrade za najbolji studentski rad „Geometrija kvazigrupa i petlji“. Godine 2002. stječe zvanje diplomiranog inženjera matematike. Godine 2018. upisuje doktorski studij na Fakultetu organizacije i informatike Sveučilišta u Zagrebu.

Nakon studija matematike, 2003. godine zapošljava se kao znanstveni novak na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, na kojemu ostaje do 2011. godine. Potom počinje raditi kao asistent na Veleučilištu Velika Gorica. Godine 2013. izabran je na mjesto predavača, a 2019. na mjesto višeg predavača. Na Veleučilištu Velika Gorica drži nastavu iz matematičke grupe predmeta, te iz Simboličke logike. Paralelno održava nastavu i na Visokoj školi za informacijske tehnologije (Diskretna matematika i Matematička logika u računarstvu), te na Visokom učilištu Algebra (Matematika i Matematička analiza). Autor je više stručnih i znanstvenih radova, recenziranih priručnika za nastavu u visokom školstvu.

## Objavljeni znanstveni radovi

Hatzivelkos, A., Maretić, M. *”Evaluating Compromise in Social Choice Functions”*, Journal of Information and Organizational Sciences, Vol. 46, 2; str. 377-389
doi:10.31341/jios.46.2.7 (2022)

Hatzivelkos, A. *Borda and Plurality Comparison with Regard to Compromise as a Sorites Paradox.* // Interdisciplinary description of complex systems, 16 (2018), 3-B; 465-484
doi:10.7906/indecs.16.3.18

Hatzivelkos, A. *Properties of the heat energy allocation models in systems with partial distribution of heat allocators.* // WSEAS transactions on heat and mass transfer, 11 (2016), 87-106. (https://www.bib.irb.hr/849842)

Hatzivelkos, A. *Model for Energy Allocation in Heating Systems with Partial Distribution of Heat Allocators.* // Interdisciplinary description of complex systems, 12 (2014), 46-60
doi:10.7906/indecs.12.1.3

## Radovi u zbornicima skupova

Hatzivelkos, A. *Axiomatic approach to the notion of compromise.* // Proceedings of the 21st International Conference on Group Decision and Negotiation / Fang, L., Morais, D.C., Horita, M. (ur.). Toronto: Ryerson University, str. 191-203. (2021) (https://www.bib.irb.hr/1130963)

Hatzivelkos, A. *The Mathematical Look at a Notion of the Compromise and Its Ramifications.* // Central European Conference on Information and Intelligent Systems / Strahonja, V., Kirinić, V. (ur.). Varaždin: Faculty of Organization and Informatics, University of Zagreb, str. 301-308 (2017)

Hatzivelkos, A. *Heat Energy Allocation Models: Croatian Case Study.* // WSEAS TRANSACTIONS ON ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT / Vincenzo, N. (ur.). Greece: WSEAS press, str. 278-289. (2016)

## Sažeci u zbornicima skupova

Hatzivelkos, A. *On p-Disapproval voting characterization.* // Logic and Applications 2022 Book of Abstracts / Šikić, Z., Scedrov, A., Ghilezan, S., Ognjanović, Z., Studer, T. (ur.). Dubrovnik: Inter University Center Dubrovnik, str. 62-63 (2022)

Hatzivelkos, A., Maretić, M. *A Note about Disapproval Voting.* // Logic and Applications 2021 Book of Abstracts / Šikić, Z., Scedrov, A., Ghilezan, S., Ognjanović, Z., Studer, T. (ur.). Dubrovnik: Inter University Center Dubrovnik, str. 75-77 (2021)

Hatzivelkos, A. *Axiomatic modelling of notion of compromise in social choice theory.* // Logic and Application Book of Abstracts / Šikić, Z., Scedrov, A., Ghilezan, S., Ognjanović, Z., Studer, T. (ur.). Dubrovnik: Inter University Center Dubrovnik, str. 44-45 (2020)

Hatzivelkos, A., Stojanović, B. *Minimization of the d-measure of divergence from the compromise.* // Book of Abstracts of the 8-th International Conference on Logic and Applications / Šikić, Z., Scedrov, A., Ghilezan, S., Ognjanović, Z., Studer, T. (ur.). Dubrovnik: Inter University Centre Dubrovnik, str. 17-18 (2019)