Problem optimizacije proizvodnje papirnate i plastične ambalaže - studija slučaja

Ivančić, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Filip Ivančić

PROBLEM OPTIMIZACIJE PROIZVODNJE PAPIRNATE I PLASTIČNE AMBALAŽE – STUDIJA SLUČAJA

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Filip Ivančić

JMBAG: 0016143365

Studij: Poslovni sustavi

PROBLEM OPTIMIZACIJE PROIZVODNJE PAPIRNATE I PLASTIČNE AMBALAŽE – STUDIJA SLUČAJA

ZAVRŠNI RAD

Mentorica:

Izv. prof. dr. sc. Nikolina Žajdela Hrustek

Varaždin, rujan 2023.

Filip Ivančić

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor potvrdio prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

Ovaj završni rad bavi se problemom optimizacije proizvodnje papirnate i plastične ambalaže na stvarnim primjerima iz poduzeća Muraplast d.o.o.. U teorijskom dijelu rada objašnjen je sam pojam linearnog programiranja i operacijskih istraživanja kao znanstvene discipline te je prikazana kratka povijest stvaranja operacijskih istraživanja i linearnog programiranja kako u svijetu, tako i u Hrvatskoj. U daljnjim poglavljima u radu su opisani problemi linearnog programiranja te osnovni teoremi. Objašnjeni su pojmovi standardnih i općih problema linearnog programiranja i kanonskog problema linearnog programiranja te je prikazan postupak rješavanja samih problema. U teoretskom dijelu završnog rada objašnjena je simpleks metoda i način na koji se ona primjenjuje, te analiza osjetljivosti i njezine prednosti.

U praktičnom dijelu kratko su prikazane osnovne informacije o poduzeću Muraplast d.o.o. te je opisan proizvodni asortiman samog poduzeća. U nastavku praktičnog dijela rada prikazano je rješavanje problema optimizacije nekoliko proizvoda iz asortimana proizvodnog poduzeća i to pomoću standardnog problema linearnog programiranja za maksimum. Na kraju se iznose zaključci i preporuke na temelju dobivenih rezultata.

Ključne riječi: simpleks algoritam, linearno programiranje, optimizacija, operacijska istraživanja, analiza osjetljivosti

Sadržaj

1. Uvod

Tema ovog završnog rada nosi naziv *Problem optimizacije proizvodnje papirnate i plastične ambalaže – studija slučaja* te se u radu mogu pronaći osnovni pojmovi vezani uz problem optimizacije, koji za sobom povlače i pojmove linearnog programiranja i operacijskih istraživanja. Cilj rada je predstaviti i pobliže pojasniti navedene pojmove te dati bolji uvid u njih preko stvarnih primjera iz poduzeća Muraplast d.o.o.. Motivacija za pisanje ovog završnog rada leži u činjenici da je linearno programiranje vrlo korisna metoda za rješavanje problema vezanih uz minimiziranje troškova ili maksimiziranje profita koju mogu primijeniti gotovo sva poduzeća te na taj način ostvariti puno bolje poslovne rezultate.

U teorijskom dijelu ovog završnog rada, u drugom poglavlju, objašnjeni su pojmovi linearnog programiranja i operacijskih istraživanja. U nastavku, prikazana je kratka povijest operacijskih istraživanja te navedeni istraživači i praktičari koji su najznačajniji za njihov razvitak. Nakon toga, obrađena su tri osnovna teorema linearnog programiranja i prikazani njihovi dokazi. Zatim slijedi pojašnjenje standardnih problema linearnog programiranja, općih problema linearnog programiranja i kanonskog problema linearnog programiranja, načini na koji se oni rješavaju i njihovi matematički modeli. Zadnje, treće poglavlje teorijskog dijela posvećeno je simpleks algoritmu, njegovim osnovama i način na koji se on primjenjuje. Na kraju je objašnjena analiza osjetljivosti, nabrojene najkorištenije analize i prikazane njezine brojne prednosti.

U praktičnom dijelu rada fokus je usmjeren na poduzeće Muraplast d.o.o. i njihovu proizvodnju. Prvo su prikazane kratke osnove o samome poduzeću i proizvodima koje poduzeće proizvodi, a zatim se krenulo s rješavanjem problema simpleks metodom na temelju stvarnih podataka dobivenih od predstavnika poduzeća. Jedan od prikazanih problema vezan je uz proizvodnju papirnate ambalaže, a drugi uz proizvodnju plastične ambalaže. Isti primjeri poslužili su za prikaz analize osjetljivosti gdje je utvrđena mogućnost za dodatnu zaradu poduzeća. Na kraju u zaključku, iznesena su rješenja problema i osmišljene preporuke. U ovom radu korištena su sva znanja stečena na kolegiju *Operacijska istraživanja 1*, potpomognuta osnovnom i dopunskom literaturom te konzultiranjem relevantnih izvora literature usko vezanih uz samu temu rada. Podaci vezani uz poduzeće Muraplast d.o.o. prikupljeni su dijelom preko intervjua sa samim djelatnicima, a dijelom preko njihove službene web stranice www.muraplast.com. U radu su riješena dva problema vezana uz proizvodnju papirnate i plastične ambalaže pomoću standardnog problema linearnog programiranja za maksimum. Rezultati navedenih problema izneseni su i objašnjeni te su na temelju dobivenih rezultata osmišljene preporuke za poboljšanje.

2. Linearno programiranje

U ovom poglavlju slijedi kratki pregled kroz povijest linearnog programiranja, nabrojani su i izneseni najvažniji teoremi vezani uz linearno programiranje. Također, objašnjeni su standardni, opći i kanonski problemi linearnog programiranja.

2.1. Povijesni razvoj linearnog programiranja

Linearno programiranje je znanstvena disciplina koja spada u granu matematičkog optimiranja, zajedno s cjelobrojnim programiranjem, nelinearnim programiranjem i dinamičkim programiranjem. Uz sve nabrojene vrste programiranja, linearno je programiranje najviše korišteno i najviše obrađivano područje. Ono se bavi problemom optimizacije sustava unutar zadanih ograničenja.

Linearno programiranje jedan je od najvažnijih instrumenata koje se koristi u operacijskim istraživanjima zbog široke mogućnosti primjene na različite oblike problema s kojima se susrećemo u stvarnim sustavima. ***Operacijska istraživanja*** spadaju u znanstvenu disciplinu koja „nastoji odrediti najbolji (optimalni) smjer aktivnosti u problemu odlučivanja u okviru danih restrikcija i ograničenih kapaciteta“ (Barković, 2010).

Sami počeci operacijskih istraživanja koja poznajemo dan danas datiraju iz druge polovice tridesetih godina 20. stoljeća kada se prvi put spominje pojam *operational research.* Taj je pojam upotrijebljen u Velikoj Britaniji u istraživačkom odjelu ministarstva zrakoplovstva pri istraživanju primjene radara u zračnoj obrani. Operacijska istraživanja počinju dobivati sve veću važnost jer se uvidio njihov pozitivan učinak i velike mogućnosti primjene. Uvelike su pridonijela u vojnom području tako što su pomogla u poboljšanju rasporeda u akciji traženja podmornica, predviđanju ishoda vojnih operacija i analizi vojnih problema odlučivanja. S ekonomske strane, operacijska istraživanja pridonose optimalnom vođenju zaliha, optimalnoj alokaciji resursa, određivanju optimalnog proizvodnog plana i brojne druge prednosti.

Ocem linearnog programiranja smatra se ***Leonid Vitaljevič Kantorovič***, sovjetski matematičar i ekonomist, koji je došao do spoznaje da se svi proizvodni problemi temelje na istom matematičkom modelu, kao što su „raspodjela poslova na postrojenja, najbolja upotreba površina za sijanje, racionalno rezanje materijala, upotreba složenih resursa, distribucija tokova transporta“ (Lukač & Neralić, 2012). Kantorovič je smatrao da je potrebno pronaći metodu koja bi se primjenjivala kod takvih problema. Ta je metoda nazvana *metoda rješavajućih množitelja* o kojoj je 1939. godine objavljena Kantorovičeva knjiga *Matematičke metode planiranja i organizacije proizvodnje*. U toj se knjizi na jasan način iznose ideje teorije i algoritmi linearnog programiranja.

Uz Kantorovića, važnu ulogu u povijesti linearnog programiranja imao je i američki matematičar ***George Dantzig*** koji se smatra autorom simpleks metode, no ona će biti detaljnije objašnjena u poglavljima koja slijede.

Potrebno je spomenuti i ***Abrahama Charnesa***, američkog matematičara koji se istaknuo kako kod linearnog programiranja, tako i kod drugih disciplina operacijskih istraživanja. Charnes je bio prvi koji je riješio problem degeneracije u simpleks metodi te je jedan od utemeljitelja analize omeđivanja podataka.

U Hrvatskoj djeluje Hrvatsko društvo za operacijska istraživanja (HDOI), osnovano 1992. godine na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu. Najistaknutiji hrvat koji djeluje na području operacijskih istraživanja i linearnog programiranja svakako je ***Luka Neralić***, profesor na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu čija je knjiga *Operacijska istraživanja*, koju je napisao zajedno s Zrinkom Lukač, jedna od najčitanijih knjiga iz tog područja.

2.2. Osnovni teoremi linearnog programiranja

Razumijevanje linearnog programiranja zahtijeva poznavanje osnovnih teorema na kojima se ono temelji. Teoremi su matematičke tvrdnje koje su istinite i za koje mora postojati dokaz. Kod linearnog programiranja izdvajaju se tri teorema.

Prvi teorem govori da je „vrijednost funkcije cilja problema maksimuma uvijek manja ili jednaka vrijednosti funkcije cilja njegovog dualnog problema minimuma“ (Babić, 2010).
Drugi teorem, koji se još naziva kriterij optimalnosti, daje dovoljan uvjet optimalnosti. Njime se dokazuje da „ako za bilo koji par mogućih rješenja originala i duala ustanovimo da su im vrijednosti funkcija cilja jednake, možemo zaključiti da su to upravo optimalna rješenja“ (Babić, 2010).

Treći teorem ili fundamentalni teorem dualiteta ukazuje na to da „ako su neki problem linearnog programiranja i njegov dual mogući (imaju moguće rješenje), tada oba imaju optimalno rješenje i optimalne vrijednosti funkcija cilja su im jednake. Ako jedan od ta dva problema nije moguć, tada drugi nema optimalno rješenje" (Babić, 2010).

Prije dokaza svakog od teorema, potrebno je pobrojati određene matematičke definicije koje vrijede kod linearnog programiranja, a to su (Babić, 2010, str.70-73):

(1) $\boldsymbol{Max\ (Min)\{\ f\ (x_1, x_2, \dots, x_n) | X\ \in S\ \}}$

- općeniti slučaj problema matematičkog programiranja

(2) $\boldsymbol{Max\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$

(3) $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq\ b_i, i = 1, 2, \dots, m}$

(4) $\boldsymbol{x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n}$

- standardni problem maksimuma

(5) $\boldsymbol{S = \{X \in\ R^n\ / AX\ \leq B, X \geq 0\ \}}$

- skup svih mogućih rješenja (vektora) problema linearnog programiranja

(6) $\boldsymbol{C^T X^* =\ \max_{X \in S} C^T X}$

- Mogući vektor je optimalan ako maksimizira linearnu funkciju (2), tj. X* je optimalan (optimalno rješenje problema linearnog programiranja), ako vrijedi (6)

(7) $\boldsymbol{Min\ \sum_{i=1}^{m} y_i b_i}$

(8) $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq\ c_j, j = 1, 2, \dots, n}$

(9) $\boldsymbol{y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m}$

- standardni problem minimuma

<u>Dokaz prvog teorema:</u>

„Ako su X i Y mogući vektori (moguća rješenja) para dualnih problema (2) – (4) i (7) – (9), tada je $\boldsymbol{C^T X \leq Y^T B}$" (Babić, 2010).

Pomnože se sve nejednadžbe (8) sa x_j.

Dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j | \cdot x_j \, ; j = 1, 2, \ldots, n \; \rightarrow \; \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \geq c_j x_j \, ; j = 1, 2, \ldots, n$$

Sumiramo nejednadžbe po j:

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} . \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Znamo da je $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = Y^T A$, sumu s lijeve strane možemo zamijeniti s $Y^T AX$, a desnu stranu s $C^T X$, pa dobivamo:

(i) $\boldsymbol{Y^T AX \geq C^T X}$

Isto izračunamo i za nejednadžbe (3) i dobijemo $\sum_{i=1}^{m} . \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$, odnosno

(ii) $\boldsymbol{Y^T AX \leq Y^T B}$

Spoje se dobivene relacije (i) i (ii) i dobivamo $C^T X \leq Y^T AX \leq Y^T B$, čime smo dokazali da vrijedi $\boldsymbol{C^T X \leq Y^T B}$.

Dokaz drugog teorema:

„Ako su $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ moguća rješenja problema linearnog programiranja (2) – (4) i njegovog duala (7) – (9) takva da je

(10) $\boldsymbol{C^T \overline{X} = \overline{Y}^T B}$,

tada su $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ optimalna rješenja tog para dualnih problema“ (Babić, 2010).

Uzmemo da je X bilo koje rješenje problema maksimuma (2) – (4), tada po prvom teoremu vrijedi **(i)** $\boldsymbol{C^T X \leq \overline{Y}^T B}$. Drugi teorem nam daje pretpostavku **(ii)** $\boldsymbol{C^T \overline{X} = \overline{Y}^T B}$.

Kad (ii) uvrstimo u (i) dobivamo $\boldsymbol{C^T X \leq C^T \overline{X}}$ što nam govori da je vrijednost funkcije cilja maksimuma manja nego vrijednost funkcije cilja za rješenje $\overline{X}(C^T \overline{X})$. Drugim riječima, rješenje $\overline{X}$ je najbolje (optimalno) rješenje problema maksimuma (2) – (4).

Slično se dokazuje i za $\overline{Y}$, čime dobivamo da je $\overline{Y}$ najbolje (optimalno) rješenje problema minimuma.

Dokaz trećeg teorema zbog svoje kompleksnosti ovdje nije prikazan, detaljan izvod ovog teorema može se pronaći u knjizi Ljubomira Martića iz 1972. godine, *Matematičke metode za ekonomske analize II*.

2.3. Standardni problemi linearnog programiranja

Standardni problemi linearnog programiranja mogu se podijeliti u dvije grupe, a to su ***standardni problemi linearnog programiranja za maksimum*** i ***standardni problemi linearnog programiranja za minimum***. Glavna razlika između te dvije skupine problema jest u tome što se maksimizacija koristi kada se želi maksimizirati (povećati) profit, dok se minimizacija koristi za minimiziranje (smanjenje) troškova.

Kod standardnog problema linearnog programiranja za maksimum karakteristično je to što su sva ograničenja iskazana u obliku nejednadžbi, točnije u obliku nejednadžbi „manje ili jednako (≤)“, osim uvjeta nenegativnosti koji je uvijek u obliku „veće ili jednako (≥)“. Standardni problem linearnog programiranja za minimum pak karakterizira to što su ograničenja i uvjet nenegativnosti iskazani u obliku nejednadžbi „veće ili jednako (≥)“.

Perić u svojoj knjizi iz 2020. godine *Operacijska istraživanja* iznosi matematičke modele standardnog problema linearnog programiranja (Perić, 2020, str.92-98):

1. Za maksimum

$$\boldsymbol{max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

uz ograničenja (u.o.)

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\ , i \in \{1, \dots, m\}}$$

$$\boldsymbol{x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}}$$

2. Za minimum

$$\boldsymbol{min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

u.o.

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,,\, i \in \{1, \dots, m\}}$$

$$\boldsymbol{x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}}$$

Postupak rješavanja standardnog problema linearnog programiranja za maksimum:

Da bi se došlo do rješenja problema, najprije je potrebno originalni oblik prevesti u kanonski oblik tako da sva ograničenja koja su bila u obliku nejednadžbi postanu jednadžbe, dodajući im pritom dopunske varijable kako bi se sačuvala ekvivalentnost sustava. Funkcija cilja se zatim zapiše u implicitnom obliku tako da se sve nepoznanice prebace na lijevu stranu, dok na desnoj strani ostane samo nula. Kad je to sve napravljeno, može se krenuti s popunjavanjem simpleks tablice. Simpleks tablica se rješava korak po korak na način na koji je opisan u kasnijem tekstu, a postupak završava kad u posljednjem retku simpleks tablice (redak Z) više nema negativnih koeficijenata. Time se dolazi do rješenja koja se iščitaju direktno iz same tablice. (Babić, 2010)

Postupak rješavanja standardnog problema linearnog programiranja za minimum:

Uz već spomenute dopunske varijable kod problema za maksimum, ovdje se pojavljuju i artificijelne varijable koje se opet dodaju ograničenjima. Sav ostali, ranije spomenuti, postupak rješavanja ostaje isti, samo što se sada u simpleks tablicu dodaje dodatni redak (redak M). Prva faza rješavanja je gotova kad su u retku M sve nule ispod strukturnih i dopunskih varijabli, dok druga faza završava kada u retku Z više nema pozitivnih brojeva ispod strukturnih i dopunskih varijabli. Uvođenje M retka u rješavanje problema naziva se Charnesova dvofazna M procedura. Tom procedurom se u prvoj fazi rješavanja izbacuju sve artificijelne varijable. Kad više nema artificijelnih varijabli, nastavlja se simpleks postupak. (Babić, 2010)

2.4. Opći problemi linearnog programiranja

Isto kao i standardni problemi, tako se i ***opći problemi linearnog programiranja*** dijele na one ***za maksimum*** i na one ***za minimum***.

U odnosu na standardne probleme linearnog programiranja, ovdje se ograničenja mogu pojaviti i kao nejednadžbe i kao jednadžbe, osim već spomenutog uvjeta nenegativnosti koji je uvijek nejednadžba „veće ili jednako (≥)".

Matematički model općeg problema linearnog programiranja za maksimum i minimum (Perić, 2020, str.18):

$$\max(min)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

u.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \,, i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, i \in \{k+1, \dots, l\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, i \in \{l+1, \dots, m\}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Postupak rješavanja općeg problema linearnog programiranja za maksimum isti je kao i standardni problem linearnog programiranja za maksimum, te se uz dopunske varijable koriste i artificijelne varijable. Postupak rješavanja općeg problema linearnog programiranja za minimum identičan je postupku rješavanja standardnog problema linearnog programiranja za minimum.

2.5. Kanonski problem linearnog programiranja

Kanonski problem linearnog programiranja karakterizira to što su sva ograničenja iskazana u obliku jednadžbi, što nam uvelike olakšava rješavanje samog problema. Sve se spomenute nejednadžbe iz standardnih i općih problema prevode u njima ekvivalentan kanonski oblik preko kojeg se kreće u rješavanje problema iz stvarnih sustava. (Babić, 2010)

Matematički model kanonskog problema linearnog programiranja za maksimum i minimum (Perić, 2020, str.19):

$$\mathbf{max}(\boldsymbol{min})\, \boldsymbol{z} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c_j x_j}$$

u.o.

$$\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ij} x_j} = \boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{l+1}, \dots, \boldsymbol{m}\}$$

$$\boldsymbol{x_j} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{j} \in \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$$

3. Simpleks algoritam

Sljedeće poglavlje sadrži osnove simpleks algoritma i prikazuje načine rješavanja problema optimizacije koristeći navedene osnove. Na kraju poglavlja objašnjena je analiza osjetljivosti i nabrojene su neke od najčešćih analiza.

3.1. Osnove simpleks algoritma

Simpleks algoritam, odnosno simpleks metoda, najpoznatiji je algoritam kod rješavanja problema linearnog programiranja. Kao što je već ranije bilo spomenuto, autor tog algoritma je George Dantzig, američki matematičar. Njegove ideje za rješavanje simpleks algoritma datiraju iz 1947. godine, međutim objavljene su tek 1951. godine u knjizi *Activity analysis of production and allocation*.

Linearno programiranje daje nam optimalno rješenje, a da bi mogli doći do rješenja potrebna nam je funkcija cilja, ograničenja, varijable i parametri. Da bi riješili problem linearnog programiranja simpleks algoritmom, potrebno je standardni problem prevesti u njegov ekvivalentan kanonski problem.

3.2. Rješavanje problema optimizacije pomoću simpleks algoritma

Simpleks algoritam radi na principu rješavanja iz koraka u korak, sve dok se ne dođe do optimalnog rješenja. Zato se za simpleks metodu veli da je iterativna metoda, iz iteracije u iteraciju. Postoje četiri glavna koraka kod rješavanja simpleks metode (Babić, 2010):

1. „Konstruira se inicijalno (početno) moguće rješenje“
2. „Primjenjuje se test da se odredi je li to optimalno rješenje“
3. „Ako rješenje nije optimalno, metoda daje uputu kako ići do boljeg rješenja“
4. „Nakon konačnog broja koraka dolazi se do optimalnog rješenja ili se utvrđuje da ono ne postoji“.

Problem optimizacije pomoću simpleks algoritma se najjednostavnije rješava uz pomoć simpleks tablice u koju se unose vrijednosti varijabla i preko koje se dolazi do konačnog rješenja. Primjer najjednostavnije tablice slijedi u nastavku.

Tablica 1. Primjer simpleks tablice

Var	x1	x2	x3	Kol	R
x4					
x5					
x6					
Z					

Svaka iteracija simpleks algoritma uvijek se provodi u nekoliko koraka, a to su (Barković, 2010, str.37):

1. „Izbor pivot (vodećeg) stupca,
2. Izbor pivot reda,
3. Preračunavanje pivot elemenata,
4. Preračunavanje pivot reda,
5. Preračunavanje pivot stupca i ostalih elemenata tabele.“

3.3. Analiza osjetljivosti

Analiza osjetljivosti (sensitivity analysis, postoptimalna analiza) je postupak kojim se utvrđuje što će se dogoditi s vrijednostima rezultata nekog problema koji se rješava ako im se promijene određene varijable. U našem slučaju, analizom osjetljivosti želimo provjeriti što će biti s dobivenim optimalnim rješenjem. Promjenom ulaznih parametara možemo dobiti puno bolje optimalno rješenje koje će uvelike imati utjecaja na daljnje poslovanje poduzeća.

Perić u svojoj knjizi *Operacijska istraživanja* navodi 5 najčešćih analiza (Perić, 2020, str.92-98):

1. „Promjena koeficijenata funkcije cilja,
2. Promjene u vrijednosti desne strane ograničenja,
3. Uvođenje novoga proizvoda,
4. Promjena tehničkih koeficijenata,
5. Dodavanje novog ograničenja.“

Sve navedene analize mogu imati veliki utjecaj na konačno rješenje problema i mogu biti od velikog značaja ukoliko se znaju pravilno primijeniti. Ovim analizama moguće je promijeniti optimalno rješenje, promijeniti funkciju cilja, promijeniti ograničenja i promijeniti ***„cijene u sjeni“*** (cijene u sjeni naziv je za „optimalne vrijednosti dualnih varijabli jer one pokazuju koliko bi se maksimalno isplatilo platiti za dodatnu jedinicu nekog resursa i to samo za one resurse koji su iskorišteni u potpunosti“ (Babić, 2010).

4. Prikaz rješavanja problema optimizacije uz pomoć simpleks algoritma na praktičnom primjeru poduzeća Muraplast d.o.o.

Većina podataka iznesenih u ovom radu vezanih uz poduzeće Muraplast preuzeta je s njihove službene web stranice www.muraplast.com, dok su određene informacije dobivene na temelju provedenih intervjua s djelatnicima.

Podaci vezani uz funkciju cilja nisu stvarni, već su dobiveni procjenom stručnjaka iz područja proizvodnje.

4.1. O poduzeću

Muraplast d.o.o. poduzeće je koje je osnovano u Kotoribi, ruralnom naselju na samome rubu Međimurske županije. Poduzeće uspješno posluje od 1994. godine kad su vlasnici iz zanatske radnje prešli u društvo s ograničenom odgovornošću. Trenutno je Muraplast u Republici Hrvatskoj i bližim okolnim zemljama vodeći proizvođač papirnatih vrećica i polietilenskih filmova. Uz to, posjeduju i najmoderniju opremu koja im osigurava prevlast na tržištu. Godišnje se u Muraplastu proizvede 20.000 tona plastike i 12.000 tona papira. Posao se odvija u 5 velikih hala ukupne površine preko 20.000 m^2 i u njima radi preko 350 zaposlenika, što ga svrstava u velika poduzeća. Prema NKD klasifikaciji Muraplast spada u kategoriju proizvodnje ploča, listova, cijevi i profila od plastike (22.21).

4.2. Proizvodi

Proizvodi koje poduzeće Muraplast proizvodi mogu se podijeliti u 4 kategorije, a to su polietilenski filmovi, papirnata ambalaža, vreće i vrećice i fleksibilna ambalaža. U nastavku slijedi ponešto o svakoj od navedenih kategorija.

4.2.1. Polietilenski filmovi

Polietilenski filmovi (u daljnjem tekstu PE filmovi) ubrajaju se u najproizvođeniju grupu plastike. Polietilen je tvar koja ne zagađuje ni vodu ni zrak. Polietilen se lako može reciklirati i kao takav ponovno upotrijebiti. PE filmovi su zapravo prozirne folije koje služe za industrijsko pakiranje robe i pomažu kod zaštite samog proizvoda prilikom njegovog skladištenja i transporta.

U PE filmove ubrajaju se termoskupljajući filmovi, industrijski PE filmovi, filmovi za pokrivanje paleta i građevinska folija.

4.2.2. Papirnata ambalaža

U papirnatu ambalažu ubrajaju se proizvodnja papira u roli i papirnate vrećice. Papirnate vrećice mogu biti s ravnom ili pletenom drškom i vrećice bez drške. Papir koji se većinom koristi za izradu papirnatih vrećica je smeđi ili bijeli kraft papir, no moguće je koristiti i druge vrste papira.

4.2.3. Vreće i vrećice

Polietilenske vreće i vrećice važan su dio kod proizvodnje plastične ambalaže. Takve vrećice poznate su po tome da zagađuju okoliš što svakako nije dobro, no one ga zagađuju samo vizualno. Plastične vrećice nisu opasne za vodu, zemlju ni zrak jer ih sunčeva svjetlost razgrađuje na ugljik i vodik, osnovne kemijske sastojke od kojih se tvori polietilen.

Muraplast proizvodi industrijske vreće, vrećice i haube, kurirske vrećice, vreće u roli, vrećice s ojačanom drškom i vrećice s fleksibilnom drškom.

4.2.4. Fleksibilna ambalaža

Fleksibilna ili savitljiva ambalaža predstavlja jednoslojnu ili višeslojnu ambalažu koja se koristi kod pakiranja proizvoda u raznim industrijama, kao što su prehrambena i kozmetička.

U fleksibilnu ambalažu ubrajaju se etikete i višeslojni kaširani proizvodi.

4.3. Primjena simpleks algoritma na praktičnom primjeru proizvodnje papirnate i plastične ambalaže

U prvom dijelu ovog poglavlja prikazana je primjena simpleks algoritma u proizvodnji papirnate ambalaže uključujući i analizu osjetljivosti, dok se u drugom dijelu poglavlja isti simpleks algoritam primjenjuje na proizvodnji plastične ambalaže.

4.3.1. Primjena simpleks algoritma u proizvodnji papirnate ambalaže

Poduzeće Muraplast d.o.o. proizvodi dvije vrste papirnatih vrećica, one s ručkama i one bez ručki. Papirnate vrećice mogu biti raznih dimenzija, ovisno o potrebama kupaca. U daljnjem primjeru bit će prikazana proizvodnja dvije vrste papirnatih vrećica, jedne s ravnim ručkama i jedne bez ručki.

Slika 1. Papirnata vrećica s ravnom ručkom (izvor: muraplast.com, bez dat.)

Slika 2. Papirnata vrećica bez ručke (izvor: duga-global.hr, bez dat.)

U proizvodnom pogonu poduzeća proizvode se navedene vrećice, a u nastavku slijedi njihov put proizvodnje.

Da bi se dobila papirnata vrećica s ravnom ručkom (proizvod 1, P1) najprije je potrebno jednu veliku balu papira staviti u „rezalicu“ (stroj 1, S1) koja će ju narezati na manje komade, a ti će komadi kasnije služiti kao ručke za vrećicu. Isto tako, još jedna velika bala papira odlazi u „rezalicu“ (stroj 2, S2), gdje se režu ojačanja koja pridonose jačini i čvrstoći ručke. Kad su narezane bale spremne, odlaze u stroj za proizvodnju vrećice (stroj 3, S3) zajedno s glavnom balom koja je potrebna da bi se dobila sama vrećica. Papirnate vrećice bez ručki (proizvod 2, P2) prolaze samo kroz stroj 3 jer one za proizvodnju ne trebaju ni ručke ni ojačanja.

Brojčane vrijednosti koje su prikazane u nastavku su podaci koji prikazuju potrošnju potrebnih resursa kako bi se izradilo 1000 vrećica iz razloga što bi za 1 vrećicu bile jako male vrijednosti što bi otežalo računanje.

Dakle, da bi se dobilo 1000 vrećica s ravnom ručkom stroju 1 je potrebno 20 sekundi (1/3 minute) da nareže balu za ručke, stroju 2 je potrebno 10 sekundi (1/6 minute) da nareže balu za ojačanja, te stroju 3 11 minuta da glavnu balu, zajedno s balom za ručke i balom za ojačanja pretvori u 1000 papirnatih vrećica s ravnom ručkom.

Za 1000 papirnatih vrećica bez ručke potrebno je samo 10 minuta rada na stroju 3 jer nema lijepljenja ručki i ojačanja.

Za 1000 papirnatih vrećica s ravnom ručkom potrebno je 2 kg ljepila, a za 1000 papirnatih vrećica bez ručke 1 kg ljepila.

Količina papira koji je potreban da bi se izradilo 1000 papirnatih vrećica s ravnom ručkom iznosi 48 kg, dok za one bez ručke 42 kg.

Od prodaje 1000 papirnatih vrećica s ravnom ručkom poduzeće planira zaraditi 170,00 €, dok od prodaje 1000 papirnatih vrećica bez ručke 140,00 €.

Tablica 2. Prikaz podataka o proizvodnji papirnatih proizvoda P1 i P2

	P1	**P2**	**OGRANIČENJA**
S1	1/3	0	72
S2	1/6	0	144
S3	11	10	720
LJEPILO	2	1	100
PAPIR	48	42	2600

Kad imamo sve gore navedene podatke, možemo krenuti s izračunom pomoću simpleks metode.

Prvo postavljamo originalni oblik problema, odnosno zapisujemo funkciju cilja.

$$Z = 170\ x_1 + 140\ x_2 \rightarrow max$$

$$\frac{1}{3}x_1 \leq 72$$

$$\frac{1}{6}x_1 \leq 144$$

$$11x_1 + 10x_2 \leq 720$$

$$2x_1 + \ x_2 \ \leq 100$$

$$48x_1 + 42x_2 \leq 2600$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \ - \ \ uvjet\ nenegativnosti$$

Originalni oblik zatim prevodimo u kanonski oblik gdje se sve nejednadžbe zapisuju u obliku jednadžbi, dodavajući im pritom dopunske varijable (u).

$$Z = 170x_1 + 140x_2 + 0 * (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \rightarrow max$$

$$\frac{1}{3}x_1 + u_1 = 72$$

$$\frac{1}{6}x_1 + u_2 = 144$$

$$11x_1 + 10x_2 + u_3 = 720$$

$$2x_1 + x_2 + u_4 = 100$$

$$48x_1 + 42x_2 + u_5 = 2600$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0 - \ uvjet\ nenegativnosti$$

Funkciju cilja još zapišemo u implicitnom obliku i spremni smo za popunjavanje simpleks tablice.

$$F - 170x_1 - 140x_2 - 0 * (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = 0$$

Tablica 3. Početna simpleks tablica

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1	1/3	0	1	0	0	0	0	72
u_2	1/6	0	0	1	0	0	0	144
u_3	11	10	0	0	1	0	0	720
u_4	2	1	0	0	0	1	0	100
u_5	48	42	0	0	0	0	1	2600
Z	-170	-140	0	0	0	0	0	

Kad se početna simpleks tablica popuni, potrebno je odrediti vodeći stupac i vodeći redak. Vodeći stupac je onaj stupac u kojem je vrijednost u Z retku najnegativnija. Potrebno je još odrediti vodeći redak. Vodeći redak dobijemo tako da vrijednosti u količinskom (kol) stupcu podijelimo s vrijednostima u vodećem stupcu te za vodeći redak odabiremo onaj redak gdje je ta vrijednost najmanja.

Tablica 4. Vodeći stupac i vodeći redak početne simpleks tablice

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1	1/3	0	1	0	0	0	0	72
u_2	1/6	0	0	1	0	0	0	144
u_3	11	10	0	0	1	0	0	720
u_4	2	1	0	0	0	1	0	100
u_5	48	42	0	0	0	0	1	2600
Z	-170	-140	0	0	0	0	0	

Vrijednost koja se nalazi na križanju vodećeg stupca i vodećeg retka naziva se stožerni element, u ovom slučaju to je vrijednost 2. Stožerni element mora imati vrijednost 1, tako da cijeli taj redak dijelimo s brojem 2, dok ostale vrijednosti za sad ostavljamo takve kakve jesu i dobivamo slijedeće rezultate:

Tablica 5. Vodeći redak podijeljen s 2

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1			1	0	0		0	
u_2			0	1	0		0	
u_3			0	0	1		0	
u_4	1	1/2	0	0	0	1/2	0	50
u_5			0	0	0		1	
Z			0	0	0		0	

Stožerni element treba iznositi 1, dok vrijednosti iznad i ispod moraju iznositi 0 što se dobiva tako da se vrijednosti iznad i ispod stožernog elementa množe s negativnom vrijednošću tog broja i dodavaju se cijelom tom retku te se tako na potrebnom mjestu dobiva 0, dok se na ostalim mjestima dobivaju nove vrijednosti. U konkretnom primjeru, u_4 redak množi se s -11 te se zbraja s u_3 retkom, u_4 redak množi se s $-\frac{1}{6}$ i zbraja se s u_2 retkom i tako svaki redak cijele tablice.

Novo dobivene vrijednosti prikazane su u sljedećoj tablici.

Tablica 6. Prva iteracija simpleks postupka

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	**kol**
u_1	0	-1/6	1	0	0	-1/6	0	166/3
u_2	0	-1/12	0	1	0	-1/12	0	407/3
u_3	0	9/2	0	0	1	-11/2	0	170
x_1	1	1/2	0	0	0	1/2	0	50
u_5	0	18	0	0	0	-24	1	200
Z	0	-55	0	0	0	85	0	8500

Time smo došli do kraja prve iteracije simpleksa. Postupak se ponavlja sve dok u Z retku nema više negativnih vrijednosti.

Sljedeća iteracija prikazana je u nastavku.

Tablica 7. Druga iteracija simpleks postupka

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	**kol**
u_1	0	0	1	0	0	-7/18	1/108	1544/27
u_2	0	0	0	1	0	-7/36	1/216	3688/27
u_3	0	0	0	0	1	1/2	-1/4	120
x_1	1	0	0	0	0	7/6	-1/36	400/9
x_2	0	1	0	0	0	-4/3	1/18	100/9
Z	0	0	0	0	0	35/3	55/18	82000/9

Drugom iteracijom došli smo do kraja simpleks postupka jer u Z retku više nema negativnih vrijednosti, a sami rezultati izračuna iščitaju se direktno iz tablice.

Dobili smo sljedeće:

$$x_1 = \frac{400}{9}, x_2 = \frac{100}{9}, u_1 = \frac{1544}{27}, u_2 = \frac{3688}{27}, u_3 = 120, Z = \frac{82000}{9}$$

Rezultat izračuna moguće je provjeriti uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u početnu funkciju cilja ili cijeli postavljeni matematički model uvrstiti u jedan od besplatnih online simpleks kalkulatora i vidjeti dobiveno rješenje.

Trenutnim načinom rada dobivamo da poduzeće u toku jednog radnog dana ukupno zaradi $\frac{82000}{9}$ €, odnosno 9.111,11 €. Da bi proizvodnja bila optimalna, poduzeće bi u danu moralo proizvoditi $\frac{400}{9}$ (x_1) ciklusa proizvodnje papirnatih vrećica s ravnom ručkom i $\frac{100}{9}$ (x_2) ciklusa proizvodnje papirnatih vrećica bez ručke. Za provjeru izračuna dobivene vrijednosti uvrste se u definiranu funkciju cilja. Dakle, $Z = 170 * \frac{400}{9} + 140 * \frac{100}{9} = \frac{82000}{9}$.

4.3.2. Analiza osjetljivosti u proizvodnji papirnate ambalaže

U razgovoru s jednim od djelatnika poduzeća Muraplast dobivena je informacija da bi se sama proizvodnja mogla, ukoliko bi se određeni parametri promijenili, malo ubrzati. Točnije, proizvodnja papirnatih vrećica s ravnom ručkom bi se mogla na stroju 1 s dosadašnjih 20 sekundi ubrzati na 18 sekundi, na stroju 2 s dosadašnjih 10 sekundi na 9 sekundi, te na stroju 3 s dosadašnjih 11 minuta na 10 minuta, odnosno s 10 minuta na 9 minuta za papirnate vrećice bez ručke. Proizvodnja vrećica bi također tekla brže ukoliko bi se smanjila debljina korištenog papira, čime bi se na 1000 proizvedenih vrećica uštedjelo po 2 kg papira.

Tablica 8. Nove vrijednosti kod analize osjetljivosti

	P1	**P2**	**OGRANIČENJA**
S1	3/10	0	72
S2	3/20	0	144
S3	10	9	720
LJEPILO	2	1	100
PAPIR	46	40	2600

Dalje cijeli postupak računanja simpleksa ostaje isti, samo se uvrštavaju nove vrijednosti.

Originalni oblik problema:

$$Z = 170\,x_1 + 140\,x_2 \rightarrow max$$

$$\frac{3}{10}x_1 \leq 72$$

$$\frac{3}{20}x_2 \leq 144$$

$$10x_1 + 9x_2 \leq 720$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$46x_1 + 40x_2 \leq 2600$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \; - \; uvjet\ nenegativnosti$$

Kanonski oblik problema:

$$Z = 170x_1 + 140x_2 + 0 * (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \; \rightarrow max$$

$$\frac{3}{10}x_1 + u_1 = 72$$

$$\frac{3}{20}x_1 + u_2 = 144$$

$$10x_1 + 9x_2 + u_3 = 720$$

$$2x_1 + x_2 + u_4 = 100$$

$$46x_1 + 40x_2 + u_5 = 2600$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0 \; - \; uvjet\ nenegativnosti$$

Funkcija cilja u implicitnom obliku:

$$F - 170x_1 - 140x_2 - 0 * (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = 0$$

Svaka iteracija simpleks postupka bit će prikazana u sljedećim tablicama.

Tablica 9. Početna simpleks tablica analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1	3/10	0	1	0	0	0	0	72
u_2	3/20	0	0	1	0	0	0	144
u_3	10	9	0	0	1	0	0	720
u_4	2	1	0	0	0	1	0	100
u_5	46	40	0	0	0	0	1	2600
Z	-170	-140	0	0	0	0	0	

Tablica 10. Prva iteracija analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1	0	-3/20	1	0	0	-3/20	0	57
u_2	0	-3/40	0	1	0	-3/40	0	273/2
u_3	0	4	0	0	1	-5	0	220
x_1	1	1/2	0	0	0	1/2	0	50
u_5	0	17	0	0	0	-23	1	300
Z	0	-55	0	0	0	85	0	8500

Tablica 11. Druga iteracija analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	kol
u_1	0	0	1	0	0	-6/17	3/340	1014/17
u_2	0	0	0	1	0	-3/17	3/680	2343/17
u_3	0	0	0	0	1	7/17	-4/17	2540/17
x_1	1	0	0	0	0	20/17	-1/34	700/17
x_2	0	1	0	0	0	-23/17	1/17	300/17
Z	0	0	0	0	0	180/17	55/18	161000/17

Drugom iteracijom došli smo do kraja simpleks postupka, te možemo iščitati rezultate.

$$x_1 = \frac{700}{17}, x_2 = \frac{300}{17}, u_1 = \frac{1014}{17}, u_2 = \frac{2343}{17}, u_3 = \frac{2540}{17}, Z = \frac{161000}{17}$$

$$Z = 170 * \frac{700}{17} + 140 * \frac{300}{17} = \frac{161000}{17}$$

Analizom osjetljivosti dobiveno je da bi poduzeće u toku jednog radnog dana moglo zarađivati za oko 350,00 € više ukoliko bi počeli primjenjivati vremena proizvodnje koja su bila spomenuta u ovom poglavlju. Točnije, zarada bi se povećala s dosadašnjih 9.111,11 € na 9.470,59 € tako da bi se ciklusi proizvodnje s trenutnih $\frac{400}{9}$ (x_1) i $\frac{100}{9}(x_2)$ promijenili na $\frac{700}{17}(x_1)$ i $\frac{300}{17}(x_2)$.

4.3.3. Primjena simpleks algoritma u proizvodnji plastične ambalaže

U sektoru proizvodnje plastike, poduzeće Muraplast proizvodi PE filmove, od kojih su najznačajniji građevinska folija i termoskupljajući filmovi. Termoskupljajući filmovi služe za pakiranje robe, točnije za pakiranje boca pića, časopisa, novina te za skupno pakiranje paketa na paleti.

Slika 3. Termoskupljajuća folija (izvor: muraplast.com, bez dat.)

Slika 4. Građevinska folija (izvor: muraplast.com, bez dat.)

Da bi se dobio PE film, potreban je stroj koji se zove ekstrudor. Ekstrudor radi na visokim temperaturama i tako tali granule plastike koje preko usisavača dolaze u njegove spremnike. Zatim preko otaljene plastike razvlači balon koji se diže u zrak te se on kasnije hladi i pritom se PE filmovi formiraju na određene dimenzije, ovisno o vrsti proizvoda.

Slika 5. Ekstrudor (izvor: muraplast.com, bez dat.)

Ekstrudor je stroj koji u jednom satu preradi 300 kg plastike. Jedna bala građevinske folije teška je 50 kg, dok je bala termoskupljajuće folije teška 90 kg. Preračunavši to u minute rada, dobijemo da je ekstrudoru (stroj 2, S2) potrebno 10 minuta rada za građevinsku foliju (proizvod 1, P1) i 18 minuta rada za termoskupljajuću foliju (proizvod 2, P2). Granulama plastike koje preko vakuumskih usisavača (stroj 1, S1) dolaze do ekstrudora potrebno je 6 minuta za P1 te 7 minuta za P2.

Za proizvodnju 50 kg građevinske folije potrebno je 50 kg plastike, a za proizvodnju 90 kg termoskupljajuće folije 90 kg plastike. Poduzeće Muraplast d.o.o. od prodaje građevinske folije planira zaraditi 70,00 €, dok od prodaje termoskupljajuće folije 100,00 €.

Tablica 12. Prikaz podataka o proizvodnji plastičnih proizvoda P1 i P2

	P1	**P2**	**OGRANIČENJA**
S1	6	7	250
S2	10	18	600
PLASTIKA	50	90	2500

Slijedi simpleks metoda, postupak računanja ostaje identičan prijašnjim rješavanjima.

Originalni oblik problema:

$$Z = 70\,x_1 + 100\,x_2 \;\rightarrow max$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 250$$

$$10x_1 + 18x_2 \leq 600$$

$$50x_1 + 90x_2 \leq 2500$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \;-\; uvjet\ nenegativnosti$$

Kanonski oblik problema:

$$Z = 70x_1 + 100x_2 + 0 * (u_1 + u_2) \rightarrow max$$

$$6x_1 + 7x_2 + u_1 = 250$$

$$10x_1 + 18x_2 + u_2 = 600$$

$$50x_1 + 90x_2 + u_3 = 2500$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \geq 0 - \ uvjet\ nenegativnosti$$

Funkcija cilja u implicitnom obliku:

$$Z - 70x_1 - 100x_2 - 0 * (u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

Tablica 13. Početna simpleks tablica

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
u_1	6	7	1	0	0	250
u_2	10	18	0	1	0	600
u_3	50	90	0	0	1	2500
Z	-70	-100	0	0	0	

Tablica 14. Prva iteracija simpleks postupka

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
u_1	19/9	0	1	0	-7/90	500/9
u_2	0	0	0	1	-1/5	100
x_2	5/9	1	0	0	1/90	250/9
Z	-130/9	0	0	0	10/9	25000/9

Tablica 15. Druga iteracija simpleks postupka

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
x_1	1	0	9/19	0	-7/190	500/19
u_2	0	0	0	1	-1/5	100
x_2	0	1	-5/19	0	3/95	250/19
Z	0	0	130/19	0	11/19	60000/19

Drugom iteracijom došli smo do kraja simpleks postupka jer u Z retku više nema negativnih vrijednosti, a sami rezultati izračuna iščitaju se direktno iz tablice.

Dobili smo sljedeće:

$$x_1 = \frac{500}{19}, x_2 = \frac{250}{19}, u_2 = 100, Z = \frac{60000}{19}$$

Provjera izračuna:

$$Z = 70 * \frac{500}{19} + 100 * \frac{250}{19} = \frac{60000}{19}$$

Takvim načinom rada dobivamo da poduzeće u jednom radnom danu ukupno zaradi $\frac{60000}{19}$ €, odnosno 3.157,89 €. Proizvodnja im je optimalna tako što izvode $\frac{500}{19}(x_1)$ ciklusa proizvodnje građevinske folije i $\frac{250}{19}(x_2)$ ciklusa proizvodnje termoskupljajuće folije.

4.3.4. Analiza osjetljivosti u proizvodnji plastične ambalaže

U razgovoru s nadležnom osobom iz poduzeća Muraplast d.o.o. dobivena je informacija da bi se sama proizvodnja plastike mogla ubrzati. Ekstrudor se s trenutnih 300 kilograma po satu prerađene plastike može ubrzati čak na 350 kilograma po satu, no to bi bila sama gornja granica izdržljivosti stroja kojom bi se najvjerojatnije izgubilo na kvaliteti samih proizvoda. U sljedećem primjeru bit će korišteni podaci koji su dobiveni kada bi ekstrudor prerađivao 320 kilograma plastike u jednom satu.

To znači da 1 kg plastike ekstrudor preradi za $\frac{3}{16}$ min, odnosno jednu balu građevinske folije od 50 kg preradi za $\frac{75}{8}$ min, a balu termoskupljajuće folije od 90 kg za $\frac{135}{8}$ min.

Usisavače koji usisuju plastiku moguće je ubrzati za 30 sekundi, čime umjesto 6 min, odnosno 7 min, dobivamo vrijednosti $\frac{11}{2}$ min i $\frac{13}{2}$ min.

Tablica 16. Nove vrijednosti kod analize osjetljivosti

	P1	**P2**	**OGRANIČENJA**
S1	11/2	13/2	250
S2	75/8	135/8	600
PLASTIKA	50	90	2500

Nove vrijednosti uvrštavaju se u daljnje računanje pa dobivamo slijedeće.

Originalni oblik problema:

$$Z = 70\, x_1 + 100\, x_2 \ \rightarrow max$$

$$\frac{11}{2} x_1 + \frac{13}{2} x_2 \leq 250$$

$$\frac{75}{8} x_1 + \frac{135}{8} x_2 \leq 600$$

$$50x_1 + 90x_2 \leq 2500$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \ - \ \ uvjet\ nenegativnosti$$

Kanonski oblik problema:

$$Z = 70x_1 + 100x_2 + 0 * (u_1 + u_2 + u_3) \rightarrow max$$

$$\frac{11}{2}x_1 + \frac{13}{2}x_2 + u_1 = 250$$

$$\frac{75}{8}x_1 + \frac{135}{8}x_2 + u_2 = 600$$

$$50x_1 + 90x_2 + u_3 = 2500$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \geq 0 \; - \; uvjet\ nenegativnosti$$

Funkcija cilja u implicitnom obliku:

$$Z - 70x_1 - 100x_2 - 0 * (u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

Tablica 17. Početna simpleks tablica analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
u_1	11/2	13/2	1	0	0	250
u_2	75/8	135/8	0	1	0	600
u_3	50	90	0	0	1	2500
Z	-70	-100	0	0	0	

Tablica 18. Prva iteracija analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
u_1	17/9	0	1	0	-13/180	625/9
u_2	0	0	0	1	-3/16	525/4
x_2	5/9	1	0	0	1/90	250/9
Z	-130/9	0	0	0	10/9	25000/9

Tablica 19. Druga iteracija analize osjetljivosti

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	kol
x_1	1	0	9/17	0	-13/340	625/17
u_2	0	0	0	1	-3/16	525/4
x_2	0	1	-5/17	0	11/340	125/17
Z	0	0	130/17	0	19/34	56250/17

Drugom iteracijom dolazimo do kraja simpleks postupka jer u Z retku više nema negativnih vrijednosti. Rezultati se iščitaju iz tablice. Dobili smo:

$$x_1 = \frac{625}{17}, x_2 = \frac{125}{17}, u_2 = \frac{525}{4}\ Z = \frac{56250}{17}$$

Provjera rezultata:

$$Z = 70 * \frac{625}{17} + 100 * \frac{125}{17} = \frac{56250}{17}$$

Dobit poduzeća ukoliko bi proizvodnja u ekstrudoru bila 320 kg/h iznosila bi $\frac{56250}{17}$ €, odnosno 3.308,82 €, što je više u odnosu na dosadašnji model proizvodnje za oko 150,00 €. Ciklusi proizvodnje bi se s dosadašnjih $\frac{500}{19}(x_1)$ i $\frac{250}{19}(x_2)$ morali promijeniti na $\frac{625}{17}(x_1)$ i $\frac{125}{17}(x_2)$.

5. Zaključak

Linearno se programiranje dosad pokazalo kao najznačajnija grana matematičkog optimiranja, te je ono najkorištenije i najobrađivanije područje. Leonid Vitaljevič Kantorovič naziva se ocem linearnog programiranja jer je prvi došao do spoznaje da se svi proizvodni problemi temelje na istom matematičkom modelu. Osmislio je metodu za rješavanje tih problema koja je i objavljena u njegovoj knjizi u kojoj se iznose ideje teorije i algoritama linearnog programiranja. George Dantzig ima značajnu ulogu kao i Kantorovič jer je on autor simpleks algoritma, koji se uvelike koristi za rješavanje problema linearnog programiranja.

Kod linearnog programiranja razlikujemo, standardni problemi linearnog programiranja, opći problemi linearnog programiranja i kanonski problem linearnog programiranja. U ovom radu prikazan je i korišten standardni problem linearnog programiranja, točnije standardni problem linearnog programiranja za maksimum koji se u ekonomskom smislu koristi da bi se maksimizirali prihodi, dok se standardni problem linearnog programiranja za minimum koristi kako bi se minimizirali troškovi.

Praktični dio rada podijeljen je u dva dijela, proizvodnja papirnate ambalaže i proizvodnja plastične ambalaže.

Kod proizvodnje papirnate ambalaže za primjer je uzeta proizvodnja 1000 papirnatih vrećica s ravnom ručkom i 1000 papirnatih vrećica bez ručke. Poduzeće Muraplast d.o.o. prema sadašnjem modelu proizvodnje preko tih vrećica zarađuje 9.111,11 € u toku jednog radnog dana. Nakon što se provela analizom osjetljivosti dobilo se da bi poduzeće moglo zarađivati otprilike 350,00 € više ukoliko bi proizvodnju na stroju 1 ubrzali za 2 sekunde, na stroju 2 za 1 sekundu, na stroju 3 za 1 minutu te za malo smanjili debljinu papira.

Kod proizvodnje plastične ambalaže praćena je proizvodnja građevinske folije i termoskupljajuće folije. Obje folije nastaju na stroju koji se zove ekstrudor koji prerađuje 300 kilograma plastike u jednom satu, te prema dosadašnjem načinu rada poduzeće u jednom radnom danu ostvaruje prihode od 3.157,89 €, dok je analizom osjetljivosti dobiveno da ukoliko se proizvodnja na ekstrudoru poveća na 320 kg/h poduzeće će zarađivati oko 150,00 € više.

Poduzeće Muraplast d.o.o. jedno je od najvećih poduzeća koje se bavi proizvodnjom plastičnih i papirnatih proizvoda u ovom dijelu Europe, a samim time imaju i vrlo dobro osmišljene proizvodne procese. Međutim, oni bi se mogli još dodatno optimizirati te bi na taj način poduzeće ostvarivalo još veće prihode što je i prikazano u ovome radu.

Zaključeno je također da analiza osjetljivosti opisana u ovom radu i prikazana kroz praktični primjer za mnoga poduzeća može biti vrlo korisna jer se njenom primjenom može utvrditi što će se dogoditi s vrijednostima funkcije cilja nekog slučaja u poduzeću ako se promijene vrijednosti određenih ključnih varijabli te implementacijom novo dobivenih rješanja može imati veliki utjecaj na daljnje poslovanje i uspjeh poduzeća.

6. Popis literature

Analiza osjetljivosti—Zašto nam je toliko korisna i kako je napraviti. (2019, veljača 13). *serdarusic.com*. https://serdarusic.com/analiza-osjetljivosti-gdje-se-koristi-i-kako-je-mozete-napraviti/

Babić, Z. (2010). *Linearno programiranje* (2.). Ekonomski fakultet Split.

Barković, D. (2010). *Operacijska istraživanja* (2.). Ekonomski fakultet Osijek.

Brlić, K. (2021). *OSNOVE TEORIJE LINEARNOG PROGRAMIRANJA*.

Daniela Petkovicek—Linearno programiranje.pdf. (bez dat.). Preuzeto 09. svibanj 2023., od http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20-%20Linearno%20programiranje.pdf

Kantorovič, Leonid Vitaljevič | Hrvatska enciklopedija. (2021). https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=30255

Lukač, Z., & Neralić, L. (2012). *Operacijska istraživanja* (1.). Element d.o.o., Zagreb.

Marceli, I. (bez dat.). *PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROIZVODNOM PROCESU*.

Mihaljević, A. (bez dat.). *METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA U EKONOMIJI*.

Mihaljević—METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA TE NJIHOVA PRIMJENA.pdf. (bez dat.). Preuzeto 27. ožujak 2023., od https://repozitorij.efos.hr/islandora/object/efos%3A4761/datastream/PDF/view

MURAPLAST d.o.o.- prihod, dobit, zaposleni, analiza, kontakt podaci. (bez dat.). Preuzeto 22. veljača 2023., od https://www.poslovna.hr/lite/muraplast/109657/subjekti.aspx?AspxAutoDetectCookieSupport=1

Online Calculator: Simplex Method. (bez dat.). Preuzeto 14. kolovoz 2023., od https://linprog.com/

Perić, T. (2020). *Operacijska istraživanja* (1.). Ekonomski fakultet Zagreb.

Polyethylene. (2023). U *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Polyethylene&oldid=1135109022

Teorem | *Hrvatska enciklopedija*. (bez dat.). Preuzeto 03. veljača 2023., od https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=60871

7. Popis slika

8. Popis tablica

9. Prilozi

muraplast

Sajmišna 16
HR - 40329 KOTORIBA
HRVATSKA
OIB: 16893266699

Tel. ++385 (0) 40/683 200
Fax. ++385 (0) 40/683 201
e-mail. info@muraplast.com
web. www.muraplast.com

IZJAVA

Ovom izjavom odobravamo Ivančić Filipu, studentu na Fakultetu organizacije i informatike Varaždin, da koristi podatke poduzeća Muraplast d.o.o. Kotoriba u korist izrade završnog rada na temu „Problem optimizacije proizvodnje papirnate i plastične ambalaže – studija slučaja".

Kotoriba, 29.08.2023.

Za Muraplast d.o.o.
Marko Kedmenec

muraplast MURAPLAST d.o.o.
Sajmišna 16
40329 Kotoriba 8