Proces grananja

Seljan, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

VARAŽDIN

Matija Seljan

PROCES GRANANJA

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Matija Seljan

Matični broj: 0016142950

Studij: Informacijski i poslovni sustavi

PROCES GRANANJA

ZAVRŠNI RAD

Mentorica :

Doc. dr. sc. Petra Žugec

Varaždin, rujan 2024.

Matija Seljan

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor potvrdio prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

U ovom radu su proučavani procesi grananja u diskretnom vremenu. Započinje se uvođenjem jednostavnih procesa grananja te se na nekoliko primjera pokaže kada može nastupiti izumiranje procesa. Zatim se formalno definiraju funkcije izvodnice vjerojatnosti i prezentira se njihova korist prilikom rada s procesima izumiranja (na primjer, jednostavno se može izračunati vjerojatnost izumiranja za pojedini proces). Na kraju su objašnjeni uvjeti izumiranja, koji pomažu odgovoriti na pitanje hoće li proces uopće izumrijeti i ako da, koje su šanse za to.

Ključne riječi: jednostavan proces grananja, funkcija izvodnica vjerojatnosti, markovljevi lanci, vjerojatnost izumiranja, uvjeti izumiranja

Sadržaj

1. Uvod

U devetnaestom stoljeću se prvi puta pojavio problem izumiranja prezimena. U viktorijanskoj Engleskoj su se plemićke obitelji "zabrinule" koliko će generacija njihovo prezime još preživjeti. Na taj je poticaj Francis Galton postavio matematičko pitanje o distribuciji prezimena u idealiziranoj populaciji, na koje mu je velečasni Henry William Watson odgovorio jednim rješenjem, te su zajedno napisali rad na tu temu.

U ovom radu će biti objašnjeno kako se ponašaju procesi grananja u diskretnom vremenu. Procesi grananja pripadaju slučajnim procesima kojima je glavna karakteristika njihova nasumičnost i beskonačnost. Također je važno napomenuti da su procesi grananja dio Markovljevih lanaca kod kojih je glavno obilježje da svako sljedeće stanje nekog procesa ne ovisi niti o jednom prošlom stanju istog, već o trenutnom stanju u kojem se taj proces nalazi.

U nastavku će biti navedeno nekoliko primjera koji će nam pokazati kako i neke od svakodnevnih životnih pojava možemo modelirati procesom grananja.

Primjer 1.1. Dijeljenje sadržaja na društvenim mrežama

Pretpostavimo da se na Instagramu pojavi nova zanimljiva objava koja se iz nekog razloga dojmi korisnicima i oni je krenu dijeliti svojim prijateljima. Dok tu objavu šaljemo samo najbližima, uzmimo u obzir da svatko pošalje objavu nekolicini prijatelja. Svaka osoba koja je primila poruku pošalje istu poruku dalje nasumičnom broju drugih prijatelja i tako dalje, što možemo predočiti procesom grananja.

Primjer 1.2. Širenje kompjutorskog virusa

Sve počinje od jednog kompjutora koji pošalje neželjeni email nasumičnom broju računala. Ako postoji bilo kakva interakcija sa tim emailom na zaraženom računalu, on se šalje dalje nasumičnom broju drugih računala i tako dalje. To se isto može modelirati procesom grananja.

Primjer 1.3. Širenje glasina

Dok neki ljudi glasine ni ne doživljavaju, drugi pak jedva čekaju da čuju nešto "sočno". Ti ljudi jednako uživaju i u širenju istih. Uzmimo za primjer da jedna osoba započne glasinu i sa jednakom vjerojatnošću ju proširi prema 0, 1, 2 ili 3 čovjeka, koji tu glasinu još nisu čuli. Svaki od tih pojedinaca po istom principu proširuje tu glasinu dalje. Na taj se način stvara jedan proces grananja. Preuzeto sa [1].

Primjer 1.4. Širenje šumskog požara

Znamo da do šumskog požara može doći sponatanim putem (na primjer od topline sunca), ali i namjerno (od ljudske ruke). Opće je poznato da je jako važno suzbiti požar čim prije. Uzmimo na primjer da se zapali jedno drvo u šumi. Ono ima različite vjerojatnosti da zapali dodatnih 0, 1, 2 ili 3 drva koja ga okružuju, ovisno o raznim čimbenicima(vjetar, nagib šumskog terena i sl.). Te vjerojatnosti su iste za svako novozapaljeno drvo i na taj način možemo dobiti jedan "neželjeni" proces grananja koji dolazi iz prirode. Preuzeto sa [2].

Primjer 1.5. Dioba stanica

Iz biologije je poznato da se stanice umnožavaju diobom. To znači da jedna stanica može proizvesti još jednu novu stanicu. Nije moguće da prilikom jedne diobe stanice nastanu više od dvije nove. Dakle, tu dolazi do jedne pojave, gdje je uvjet da se stanica umnoži na dvije ili izumre prije toga, koja se također može modelirati procesom grananja. Preuzeto sa [3].

2. Metode i tehnike rada

Kod izrade ovog rada najviše je bila korištena matematička stručna i popularna literatura. Kako se radi o matematičkoj temi iz područja vjerojatnosti, alat koji je bio korišten za dokazivanje pojedinih pretpostavki su bile funkcije izvodnice vjerojatnosti. Radi boljeg vizualnog prikaza teorijskog dijela, korišten je RStudio za izradu interaktivne aplikacije koja simulira jednostavan proces grananja kod kojeg možemo utjecati na duljinu trajanja procesa te broj simulacija koje će se izvršiti.

3. Razrada teme

3.1. Jednostavan proces grananja

Kako mu samo ime govori, radi se o procesu koji modelira grananje određene populacije. U svrhu primjera uzet ćemo razmnožavanje gljiva. Znamo da gljive otpuštaju spore kako bi se razmnožile. U tom procesu, od svake pojedine gljive, može nastati jedan ili više potomaka koji su iste vrste kao i roditelj. Također je moguće da gljiva odumre bez novonastalog potomka. Taj proces se ponavlja za svakog potomka dok sve jedinke ne odumru bez razmnožavanja. Tada kažemo da su jedinke izumrle.

U matematičkom smislu to možemo prikazati na sljedeći način. Uzmimo da nam X_k predstavlja broj živih jedinki u generaciji k. Uvijek ćemo definirati da je X_0 = 1, što će nam značiti da svaka populacija koju analiziramo počinje od jedne jedinke. Također ćemo u svakom primjeru imati zasebnu distribuciju potomaka koju ćemo označavati na sljedeći način:

$\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$.

U ovom slučaju, p_i predstavlja vjerojatnost da roditelj ima točno i djece. Zbroj svih vjerojatnosti mora biti 1, što možemo prikazati ovim izrazom:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Svaka nova jedinka nastala na ovaj način ima istu distribuciju potomaka kao i njezin roditelj. Ujedno ne postoji poveznica između jedinki kod razmnožavanja, što znači da se svaka gljiva razmnožava neovisno o drugima.
Kao što smo već ranije spomenuli, taj proces se ponavlja dok sve jedinke ne odumru, to jest dok ne dođe do izumiranja. To prikazujemo sa p_e koji nam govori koja je vjerojatnost da proces ikada izumre.
U uvodu smo spomenuli da su procesi grananja dio Markovljevih lanaca. To znači da kada želimo saznati točan broj potomaka X_t u nekom vremenu t, nije nam bitno, niti nam koristi ništa osim broja potomaka X_{t-1} u vremenu $t-1$.

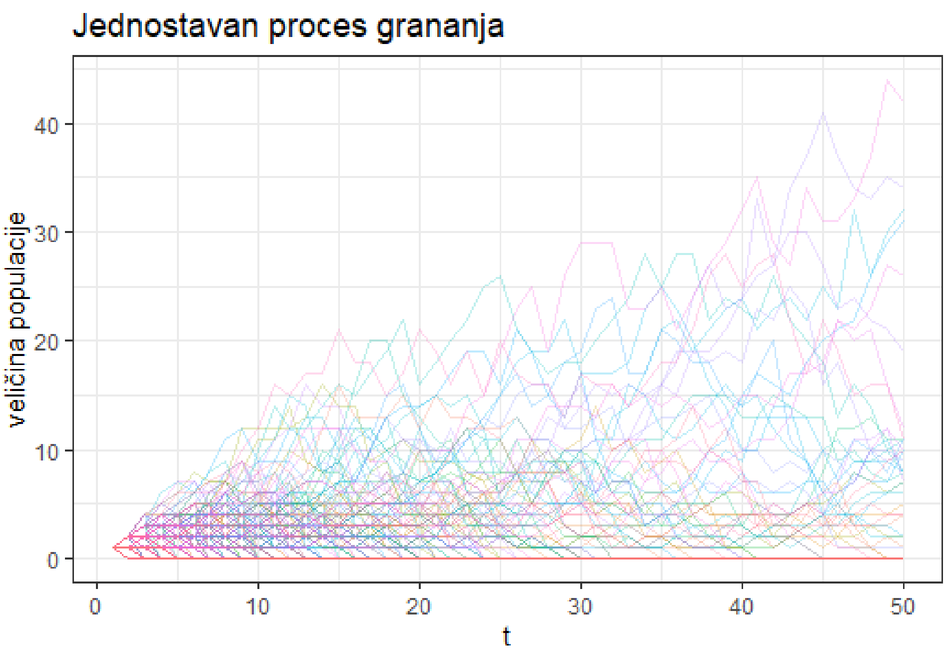
3.1.1. Primjeri

1. Započet ćemo jednim jednostavnim primjerom. Recimo da imamo $p_0 = 1$ (uz uvjet da $p_i = 0$ za $i \geq 1$). U ovom slučaju imamo jednu jedinku na početku, a vjerojatnost da ona stvori točno 0 novih jedinki je jednaka 1 (to jest 100%), tako da već u prvom koraku jedina jedinka odumire i dolazi do izumiranja.

2. Slijedi jedan malo složeniji primjer da vidimo što se dogodi kada proces uspije preživjeti dalje od prvog koraka. Sada ćemo pretpostaviti da su $p_0 = 1/100$ i $p_1 = 99/100$ (uz uvjet $p_i = 0$ za $i \geq 2$). Drugim riječima, dogoditi će se jedan od dva slučaja. U prvom slučaju, jedinka proizvodi samo jednog potomka sa vjerojatnošću 0.99, dok u drugom

slučaju ta ista jedinka odumire sa vjerojatnošću 0.01 bez ostavljanja potomaka. Uz ovakve uvjete, proces može preživjeti neko vrijeme, ipak je vjerojatnost da proces preživi do n-te generacije jednaka $(\frac{99}{100})^n$, pošto bi se proces trebao nastavljati uspješno sa vjerojatnošću $\frac{99}{100}$ kroz n generacija. Kako se n povećava, tako se i vjerojatnost preživljavanja smanjuje, stoga je vjerojatnost izumiranja i ovog procesa jednaka 1.

3. Još ćemo pokazati jedan malo složeniji primjer. Ovdje imamo da su $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$ i $p_2 = \frac{1}{4}$ uz uvjet $p_i = 0$ za $i \geq 3$. Ovo je najsloženiji primjer do sada jer imamo 3 različita moguća ishoda. Proces može odumrijeti sa vjerojatnošću $1/4$, može imati jednog potomka sa vjerojatnošću $1/2$, ali može imati i dva potomka sa vjerojatnošću $1/4$. Tu nam je već teže predvidjeti kako će se proces ponašati na duge staze, no zato možemo simulirati ponašanje 500 pojedinačnih procesa, uz trajanje od 50 vremenskih perioda. Iako je većina procesa izumrla, možemo primjetiti da su mnogi opstali i nakon 50 vremenskih perioda, te pojedini imaju čak i više od 40 članova populacije, kao što je vidljivo na slici 1.



Slika 1: Graf simuliranih procesa grananja

U nastavku će biti predstavljen okvir za računanje vjerojatnosti izumiranja ovakvih procesa. Kako bi to bilo moguće, potrebno je najprije uvesti funkcije izvodnice.

3.2. Funkcije izvodnice

Funkcije izvodnice nam služe kao alat kada pričamo o procesima grananja, jer omogućuju analizu i proučavanje različitih svojstava tih procesa. One nam između ostalog mogu pomoći u opisivanju distribucije broja potomaka pojedinog čvora. Pomoću njih možemo izračunati očekivani broj potomaka te analizirati vjerojatnost izumiranja procesa. Mi nikada nećemo moći sa sto postotnom sigurnošću odrediti kada će pojedini proces izumrijeti, stoga možemo još reći da su funkcije izvodnice vjerojatnosti zapravo jedan statistički alat koji nam pomaže da lakše izračunamo vjerojatnosti izumiranja procesa.

Prema [4] definicija funkcije izvodnice vjerojatnosti (u oznaci Π) je:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k.$$

Odnosno, ako raspišemo sumu:

$$\Pi_X(s) = P(X = 0)s^0 + P(X = 1)s^1 + P(X = 2)s^2 + P(X = 3)s^3 + ...$$

Ovakav zapis možemo iskoristiti za daljnje istraživanje. Ako u dobiveni izraz umjesto s uvrstimo 0, lako možemo dobiti vjerojatnost da X poprimi vrijednost 0, to jest da početna jedinka nema potomaka.

$$\begin{aligned}
\Pi_X(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)0^k \\
&= P(X = 0)0^0 + P(X = 1)0^1 + P(X = 2)0^2 + P(X = 3)0^3 + \dots \\
&= P(X = 0)
\end{aligned}$$

Kako znamo da nula na svaku potenciju iznosi 0, osim kada je u pitanju potenciranje sa nulom, tada iznosi 1. Zato nije potrebno niti raspisivati cijelu sumu jer je samo prvi član različiti od 0, stoga dobivamo da je vjerojatnost da X poprimi vrijednost 0 jednaka $\Pi_X(0)$. Ovaj princip nam također može poslužiti za provjeravanje da li neka funkcija može biti funkcija izvodnica vjerojatnosti (jednostavno izračunamo vrijednost funkcije u 0 i moramo dobiti $P(X = 0)$).

Sada ćemo ponovo uzeti izraz od maloprije

$$\Pi_X(s) = P(X = 0)s^0 + P(X = 1)s^1 + P(X = 2)s^2 + P(X = 3)s^3 + ...$$

i ovaj put ćemo vidjeti kako dobiti vjerojatnost da X poprimi vrijednost 1, koristeći spomenuti izraz od malo prije. Deriviramo cijeli izraz i dobijemo:

$$\Pi'_X(s) = P(X = 1) + 2s \cdot P(X = 2) + 3s^2 \cdot P(X = 3) + ...$$

Ako sada u ovaj izraz umjesto s uvrstimo 0, dobit ćemo rezultat koji nam govori koja je vjerojatnost da X poprimi vrijednost 1.

$$\Pi'_X(s) = P(X = 1).$$

Sada već počinjemo primjećivati na koji se način funkcije izvodnice vjerojatnosti ponašaju, tako da ih možemo upotrijebiti kao koristan alat. No, da budemo skroz sigurni, napraviti ćemo još jednu derivaciju zadnjeg izraza.

$$\Pi''_X(s) = 2P(X = 2) + 6s \cdot P(X = 3) + ...$$

Zatim u taj novi izraz uvrstimo 0 tako da dobijemo

$$\Pi''_X(0) = 2P(X = 2).$$

Dijeljenjem s 2 imamo konačan izraz koji računa vjerojatnost da X poprimi vrijednost 2

$$P(X = 2) = \frac{\Pi''_X(0)}{2}. \tag{3.1}$$

Nakon prve i druge derivacije naše početne funkcije, možemo primjetiti kako se funkcija mijenja, te pretpostaviti kako će ona izgledati za svaku sljedeću derivaciju. Pošto broj potomaka za koji tražimo vjerojatnost može biti u rasponu od 0 do ∞, nebi imalo smisla beskonačno puta derivirati funkciju jer bi to moglo potrajati. Stoga na temelju dosadašnjih derivacija dolazimo do izraza za univerzalnu formulu koja će nam poslužiti da dobijemo vjerojatnost za bilo koji X koji je u skupu prirodnih brojeva, uključujući i 0. Ona se može i jednostavno dokazati. Krenimo od izraza:

$$\Pi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k.$$

k-ta derivacija gornjeg izraza izgleda ovako:

$$\Pi_X^{(k)}(s) = \sum_{k=k}^{\infty} P(X = k)k(k-1)(k-2)...(1) = k!P(X = k).$$

Sada umjesto s uvrstimo 0 da dobijemo:

$$\Pi_X^{(k)}(0) = k!P(X = k).$$

I iz tog izraza dobijemo finalnu formulu:

$$P(X = k) = \frac{\Pi_X(0)^{(k)}}{k!}. \tag{3.2}$$

Potrebno je napomenuti da (k) (koji može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa prirodnih brojeva) u brojniku predstavlja k-tu derivaciju.

Sada kada smo dobili univerzalnu formulu, možemo s lakoćom izračunati vjerojatnost za bilo koji X. Već smo pokazali što se dogodi kada uvrstimo 0 u formulu, ali jedan isto tako zanimljiv i bitan slučaj je uvrštavanje broja 1 u istu tu formulu.

$$
\begin{aligned}
\Pi_X(1) &= P(X=0)1^0 + P(X=1)1^1 + P(X=2)1^2 + P(X=3)1^3 + \dots \\
&= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Kako znamo da će 1 na bilo koju potenciju uvijek ostati 1 i da zbroj vjerojatnosti svih mogućih ishoda mora dati 1, vrijedi $\Pi_X(1) = 1$. Uz rezultat koji smo već imali $(\Pi_X(0) = P(X = 0))$, ovim rezultatom možemo također provjeriti da li neka funkcija može biti funkcija izvodnica. Uvrstimo broj 1 u bilo koju funkciju za koju sumnjamo da bi mogla biti funkcija izvodnica vjerojatnosti i ako kao rezultat ne dobijemo 1, odbacujemo pretpostavku da se radi o funkciji izvodnici, vidi [5].

3.2.1. Primjeri izračuna funkcija izvodnica

- Sada kada smo ustanovili bitne značajke, možemo ih primijeniti na konkretnom primjeru. Za početak ćemo iskoristiti Bernoulijevu distribuciju, zato što je ona temeljna i jednostavna distribucija koja igra ključnu ulogu u Teoriji vjerojatnosti. Njena karakteristika je da se bavi binarnim eksperimentima, te kao rezultat možemo očekivati samo 0 ili 1 (npr. uspjeh/neuspjeh). Dakle za X ćemo uzeti Bernoulijevu slučajnu varijablu. Pripadnu funkciju izvodnicu dobivamo uvrštavanjem u formulu iz definicije:

$$
\begin{aligned}
\Pi_X(s) &= P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1 \\
&= (1-p) + p \cdot s.
\end{aligned}
$$

Kao što smo malo prije spomenuli, karakteristika Bernoulijeve slučajne varijable je ta da su njezini ishodi zapravo vjerojatnosti da X poprimi vrijednost 1 ili 0. Kada smo to zapisali u matematičkom smislu, lako smo dobili funkciju izvodnicu za Bernoulijevu slučajnu varijablu koja glasi $(1-p) + p \cdot s$. Nadalje, ako želimo napraviti provjeru uvrštavanjem 0 i 1, rezultat bi nam trebao odgovoriti na pitanje može li dobivena funkcija biti funkcija izvodnica.

$$
\begin{aligned}
\Pi_X(0) &= (1-p) + p \cdot 0 \\
&= (1-p) \\
&= P(X=0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_X(1) &= (1-p) + p \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Kako su nam rezultati uvrštavanja isti kao i u primjeru s početka, to jest kada uvrstimo 0 umjesto s dobijemo koja će biti vjerojatnost da X poprimi vrijednost 0. Uz to kada uvrstimo broj 1 umjesto s, kao rezultat dobijemo upravo broj 1. Oba dva uvjeta su ispunjena, stoga sa sigurnošću možemo reći da dobivena funkcija može biti funkcija izvodnica.

- Sada kada smo na jednostavnijim primjerima pokazali osnovne karakteristike i ponašanja funkcija izvodnica, vrijeme je da pokušamo napraviti isto sa nekim malo složenijim primjerima. Do sada smo uzimali po jednu funkciju i računali njezinu funkciju izvodnicu, a sada ćemo po prvi puta to isto pokušati napraviti za dvije nezavisne funkcije. U ovom ćemo primjeru uzeti da su dvije nezavisne varijable koje koristimo Y i Z. W će predstavljati zbroj tih dviju varijabli W = $Y + Z$. Sljedeći korak nam je odrediti funkciju izvodnicu vjerojatnosti od W. Zatim ćemo u nju uvrstiti $Z + Y$, te ćemo dobiti izraz koji izgleda ovako:

$$\Pi_w(s) = E(s^W) = E(s^{Y+Z}) = E(s^Y s^Z).$$

No, kao što smo malo prije spomenuli, slučajne varijable Y i Z su nezavisne, tako da prethodni izraz još možemo zapisati i ovako:

$$E(s^Y s^Z) = E(s^Y)E(s^Z).$$

Kako bi lakše razumjeli na koji način smo dobili izraz sa desne strane jednakosti, proširiti ćemo $E(s^Y s^Z)$.

$$E(s^Y sZ) = \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty} s^y s^z f(y,z).$$

Izraz koji smo dobili sada možemo lakše objasniti dio po dio. Funkcija f(y, z) je zajednička funkcija gustoće od Y i Z. Kako znamo da su Y i Z nezavisne slučajne varijable, dovoljno je pomnožiti funkcije gustoće tih dviju varijabli kako bi dobili zajedničku funkciju: f(y, z) = f(y)f(z). Kada to uvrstimo u gornji izraz, te ga sredimo, možemo jasno vidjeti kako smo došli do jednadžbe $E(s^Y s^Z) = E(s^Y)E(s^Z)$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty} s^y s^z f(y)f(z) \\
&= \left(\sum_{y=0}^{\infty} s^y f(y)\right) \cdot \left(\sum_{z=0}^{\infty} s^z f(z)\right) \\
&= E(s^Y)E(s^Z)
\end{aligned}$$

Slijedeći ove korake smo se opet vratili na početni izraz $E(s^Y s^Z) = E(s^Y)E(s^Z)$ i s time smo zaključili da možemo lako dobiti funkciju izvodnicu vjerojatnosti sume nekih slučajnih varijabli, tako da pomnožimo zasebne funkcije izvodnice tih istih varijabli. Time smo dobili nešto što možemo primijeniti na binomnoj distribuciji $X \sim$ Binom(n,p) koja je zapravo suma Bernoulijevih distribucija, a pošto smo za nju već došli do funkcije izvodnice, možemo lako zaključiti sljedeće:

$$\Pi_X(s) = (1 - p + p \cdot s)^n.$$

Na brzinu ćemo provjeriti ispravnost ove funkcije izvodnice uvrštavanjem 0 i 1.

$$\begin{aligned}\Pi_X(0) &= (1 - p + p \cdot 0)^n \\ &= (1 - p)^n \\ &= P(X = 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_X(1) &= (1 - p + p \cdot 1)^n \\ &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Pokazali smo da je i ovo funkcija izvodnica vjerojatnosti jer ispunjava dva nužna uvjeta.

- Kao što je navedeno u [5], funkcijama izvodnicama vjerojatnosti nije jedino svojstvo da nam olakšavaju računanje vjerojatnosti. Pogledati ćemo za što nam funkcije izvodnice još mogu poslužiti, ako ponovo uzmemo u obzir njihove derivacije. Prva derivacija naše funkcije izgleda ovako:

  $$\Pi_X(s)' = E(X \cdot s^{x-1}).$$

  Ako uvrstimo 1, dobivamo sljedeće:

  $$\Pi_X(1)' = E(X).$$

  Kao što vidimo u ovom slučaju nismo dobili vjerojatnost kao rezultat, nego matematičko očekivanje.

  Derivirajmo još jednom dobiveni izraz za prvu derivaciju i pogledajmo što ćemo dobiti:

  $$\Pi_X(s)'' = E(X(X - 1) \cdot s^{x-2}).$$

  Ponovo izračunajmo vrijednost funkcije u 1 kao i malo prije. Dobivamo ovakav izraz:

  $$\Pi_X(1)'' = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X).$$

  Što znači razlika drugog i prvog momenta. Kada spojimo ova dva dobivena rezultata, dolazimo do sljedećeg izraza:

  $$E(X^2) = \Pi_X(1)' + \Pi_X(1)''.$$

  S druge strane, znamo da se varijanca računa po formuli:

  $$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Uvrstimo rezultata vezan uz prvu i drugu derivaciju te na taj način dobivamo još jedan način izračuna varijance slučajne varijable pomoću funkcija izvodnica, kao što je prikazano u nastavku:

$$Var(X) = \Pi_X(1)'' + \Pi_X(1)' - (\Pi_X(1)')^2.$$

3.3. Vjerojatnosti izumiranja

Sada kada smo vidjeli kako koristiti funkcije izvodnice vjerojatnosti, to znanje možemo iskoristiti za ono najbitnije u cijeloj ovoj priči, a to je računanje vjerojatnosti izumiranja nekog procesa grananja. Za početak ćemo odrediti funkciju izvodnicu vjerojatnosti za jednu slučajnu sumu slučajnih varijabli. Možda je ime malo zbunjujuće, ali će sve biti jasnije uskoro. Ovo će nam biti korisno za procese grananja, gdje je sveukupan broj potomaka jedne generacije zapravo "slučajna suma slučajnih varijabli"(koristimo izraz "slučajna suma" zato jer ovisi o broju članova te generacije). Uzmimo na primjer da je $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_N$, gdje Y predstavlja generičku slučajnu varijablu, a $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots$ su nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable kao i Y. Y može poprimiti bilo koju vrijendost iz skupa $0, 1, 2, \ldots$. Slučajna varijabla $\mathbf{N}$ predstavlja slučajni broj pribrojnika u sumi i nezavisna je od svih ranije spomenutih varijabli.

Sada ćemo odrediti funkciju izvodnicu vjerojatnosti za X. Prisjetimo se definicije:

$$\Pi_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k.$$

Primijetimo da se pojavila nova komponenta koja je slučajna, a vrlo je bitna. To je $\mathbf{N}$ i potrebna nam je kako bi znali koliko Y-a sadrži naš X čiju funkciju izvodnicu (ali i distribuciju) bi htjeli dobiti. Uvjetovanjem na N i korištenjem svojstva uvjetne vjerojatnosti dobivamo:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k|N = n)P(N = n)s^k.$$

Kako je $P(N = n)$ nezavisan od X, gornju sumu možemo zapisati kao:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k|N = n)s^k.$$

Možemo uočiti kako je izraz $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k|N = n)s^k$ zapravo funkcija izvodnica vjerojatnosti od X uvjetovana sa $N = n$. Problem slučajne sume smo sveli na X koji je sada zapravo suma n slučajnih varijabli Y, pošto je $(N = n)$ fiksan uvjet. Dakle, sada zapravo tražimo funkciju izvodnicu vjerojatnosti varijable X koja predstavlja zbroj svih nezavisnih slučajnih varijabli Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_n. Kako smo vidjeli ranije, funkcija izvodnica vjerojatnosti X je produkt funkcija izvodnica vjerojatnosti Y varijabli (jer su sve međusobno nezavisne i jednako distribuirane pa njihove funkcije izvodnice vjerojatnosti imaju isti oblik). Možemo pisati:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)(\Pi_Y(s))^n.$$

Ako ovu funkciju usporedimo sa funkcijom izvodnicom vjerojatnosti varijable N, vidjet ćemo da se na mjestu s-a zapravo nalazi izraz $(\Pi_Y(s))$. Iz toga možemo zaključiti da funkcija izvodnica vjerojatnosti od X izgleda ovako:

$$\Pi_N(\Pi_Y(s)).$$

Drugim riječima, dobili smo da je funkcija izvodnica vjerojatnosti od X zapravo kompozicija funkcije izvodnice vjerojatnosti od Y i funkcije izvodnice vjerojatnosti od $\mathbf{N}$, što je prikazano u [5]. Uzevši u obzir da je $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_N$, pri čemu su Y_i, $i = 1, \dots, n$ jednako distribuirane kao Y i N je slučajna varijabla koja može poprimiti vrijednosti iz skupa prirodnih brojeva, imamo:

$$\Pi_X(s) = \Pi_N(\Pi_Y(s)).$$

Sada ćemo vidjeti na koji način nam ovaj rezultat može biti od koristi kod vjerojatnosti izumiranja u procesima grananja. Naš proces grananja možemo zapisati na sljedeći način:

$$X_t = Y_{1,t-1} + Y_{2,t-1} + Y_{3,t-1} + ... + Y_{X_{t-1},t-1}.$$

U ovom slučaju, X_t nam predstavlja veličinu populacije u vremenu t, a $Y_{i,t-1}$ nam daje broj potomaka koji su potekli od i-tog člana populacije u vremenu $t-1$ (ukupan zbroj ovih potomaka čini populaciju u trenutku t). Sveukupno imamo X_{t-1} tih Y uvjeta, zato što u vremenu $t-1$ postoji X_{t-1} članova poulacije.

Pošto imamo da je X_t zapravo suma slučajnog broja X_{t-1} slučajnih varijabli, te kada uvažimo rezultat koji smo već spomenuli, dobijemo da je funkcija izvodnica vjerojatnosti od X_t jednaka:

$$\Pi_{X_t}(s) = \Pi_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s)).$$

Tu smo upotrijebili izraz $\Pi_{X_0}(s)$, koji je ujedno i funkcija izvodnica prve jedinke u populaciji, zato jer je to funkcija izvodnica svih naših Y-a. Svaki Y, neovisno i istom distribucijom kao i početna jedinka, generira svoje potomke.

Sada možemo iskoristiti formulu od maloprije da dođemo do funkcije izvodnice vjerojatnosti za X_{t-1} kako smo radili i do sada.

$$\Pi_{X_{t-1}}(s) = \Pi_{X_{t-2}}(\Pi_{X_0}(s))$$

I sada ako to uvrstimo u izraz za $\Pi_{X_t}(s)$ kako smo gore naveli, dobijemo:

$$\Pi_{X_t}(s) = \Pi_{X_{t-2}}(\Pi_{X_0}(\Pi_{X_0}(s))).$$

Te ako nastavimo na taj način, dobijemo ovakav izraz

$$\Pi_{X_t}(s) = \Pi_{X_0}(\Pi_{X_0}(...\Pi_{X_0}(s)...)).$$

u kojem nam t govori koliko puta se izraz Π_{X_0} pojavljuje na desnoj strani.

Sada kada smo ustanovili funkciju izvodnicu vjerojatnosti od procesa grananja X_t, možemo iskoristiti sakupljene informacije da dobijemo p_e, to jest vjerojatnost da populacija izumre koja se definira kao:

$$p_e = \lim_{n \to \infty} \Pi_{X_n}(0).$$

Za to će nam trebati dvije ključne stavke:

1. Prisjetimo se da $\Pi_{X_n}(0) = P(X_n = 0)$ (ako u funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X, koju smo prethodno naveli, uvrstimo 0, dobiti ćemo $P(X = 0)$).

2. Uz to nam treba izraz do kojega smo malo prije došli

$$\Pi_{X_t}(s) = \Pi_{X_0}(\Pi_{X_0}(...\Pi_{X_0}(s)...)),$$

a on nam zapravo implicitno govori da je

$$\Pi_{X_{n+1}}(0) = \Pi_{X_0}(\Pi_{X_n}(0)).$$

Zapravo smo tu samo dodali još jednom ovaj dio Π_{X_0} da bi od $\Pi_{X_n}(0)$ dobili $\Pi_{X_{n+1}}(0)$.

Sada kada smo ustanovili te dvije stavke koje su nam trebale za nastavak, možemo započeti "lanac jednakosti" kojim dolazimo do našeg rješenja:

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \Pi_{X_n}(0).$$

Za ovo nam je potrebna stavka 1.

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_n}(0) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{X_{n+1}}(0)$$

Pošto u ovom slučaju $n \to \infty$, svejedno je da li je indeks n ili $n + 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_{n+1}}(0) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{X_0}(\Pi_{X_n}(0)).$$

Sada nam je potrebna stavka 2.

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_0}(\Pi_{X_n}(0)) = \Pi_{X_0}\left(\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_n}(0)\right).$$

Ovo smijemo napraviti jer je Π_{X_0}, u procesima s kojim radimo, kontinuirana funkcija. To znači da nema prekida na cijeloj svojoj domeni. Ako sada uvrstimo rezultate iz $1.$, dobivamo:

$$\Pi_{X_0}\left(\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_n}(0)\right) = \Pi_{X_0}(p_e).$$

I kada uzmemo rezultate s dva kraja lanca jednakosti, imamo:

$$p_e = \Pi_{X_0}(p_e).$$

Ovaj izraz nam zapravo govori da je vjerojatnost izumiranja p_e jednaka funkciji izvodnici vjerojatnosti distribucije potomaka, Π_{X_0}, koristeći p_e kao ulaznu varijablu. Drugim riječima, pronašli smo laki način za izračun vjerojatnosti izumiranja korištenjem funkcije izvodnice vjerojatnosti.

Nakon što smo došli do ovog zaključka, vrijeme je da ga potkrijepimo s nekoliko primjera koji će nam pomoći da ga lakše shvatimo. Prije toga ćemo prezentirati još neke korisne pomoćne rezultate. Možemo reći da je p_e, koji predstavlja vjerojatnost i stoga može poprimiti samo vrijednosti između 0 i 1, zapravo najmanje rješenje jednadžbe (kako je navedeno u [5]):

$$w = \Pi_{X_0}(w).$$

Dakle, ne može postojati niti jedna druga vjerojatnost koja bi bila ispravno rješenje za gornji izraz, a uz to da je i manja od p_e. Ovo se može i dokazati. Recimo da je k neka druga varijabla različita od w, kojoj je pridružena vrijednost između 0 i 1, također rješenje za našu jednadžbu. Imamo:

$$k = \Pi_{X_0}(k).$$

Iz prijašnje definicije znamo da je Π_{X_0}, rastuća funkcija, stoga moramo imati

$$\Pi_{X_0}(0) \leq \Pi_{X_0}(k) = k.$$

Znamo ovaj prvi dio $\Pi_{X_{0(0)}} \leq \Pi_{X_{0(k)}}$ zbog toga što je po definiciji $0 \leq k$ i nejednakost ostaje ista djelovanjem rastuće funkcije. Također znamo da je $\Pi_{X_0}(k) = k$ po pretpostavci. Možemo nastaviti u ovom smjeru, dodajući Π_{X_0} na obje strane nejednakosti, pri čemu se k ne mijenja, ali dobijemo:

$$\Pi_{X_0}(\Pi_{X_0}(\ldots \Pi_{X_0}(0)\ldots)) \leq k.$$

Ako iskoristimo znanje o $\Pi_{X_n}(0) = \Pi_{X_0}(\Pi_{X_0}(\ldots \Pi_{X_0}(0)\ldots))$ od prije, dobijemo:

$$\Pi_{X_n}(0) \leq k.$$

Uzimanjem limesa kada $n \to \infty$, dobijemo:

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_{n(0)}} \leq k.$$

Kada se jos uz sve to prisjetimo $1.$ odozgo koji glasi $\lim_{n\to\infty} \Pi_{X_{n(0)}} = p_e$, gornju nejednakost možemo jednostavnije zapisati:

$$p_e \leq k.$$

Čime smo pokazali da je p_e stvarno najmanje rješenje za:

$$w = \Pi_{X_0}(w).$$

Ovaj podatak će nam biti jako koristan kada dobijemo više od jednog rješenja, jer nam govori da trebamo uzmeti samo najmanje rješenje kao točnu vjerojatnost izumiranja.

Sada kada smo to ustanovili, vrijeme je da isto pokažemo na konkretnim primjerima. Kako smo na početku imali jedan dobar primjer (Primjer $3.$), iskoristiti ćemo ga ponovo.

3. $p_0 = \frac{1}{4}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{4}$ (and $p_i = 0$ for $i \geq 3$).

Računajući funkciju izvodnicu vjerojatnosti za taj proces, dobivamo sljedeće:

$$E(s_0^X) = \Pi_{X_0}(s) = \sum_{x=0}^{x=2} P(X_0 = x)s^x$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}.$$

Sada ćemo iskoristiti rezultat od prije kako bi dobili rezultat za p_e:

$$p_e = \Pi_{X_0}(p_e) = \frac{1}{4} + \frac{p_e}{2} + \frac{{p_e}^2}{4}.$$

Te kada tom izrazu oduzmemo p_e s obje strane, dobivamo:

$$\frac{{p_e}^2}{4} - \frac{p_e}{2} + \frac{1}{4} = 0.$$

Ovdje će nam poslužiti programski jezik R kako bi dobili nultočke gornje jednadžbe:

```
> kvad_jednadzba <- function(a, b, c) {
+   poz_korijen <- (-b + sqrt((b ^ 2) - 4 * a * c)) / (2 * a)
+   neg_korijen <- (-b - sqrt((b ^ 2) - 4 * a * c)) / (2 * a)
+   print(poz_korijen); print(neg_korijen)
+ }
> kvad_jednadzba(1 / 4, -1 / 2, 1 / 4)
[1] 1
[1] 1
```

Slika 2: Rezultati kvadratne jednadžbe u R-u

Kako smo došli do zaključka da kada imamo više od jednog rezultata, uvijek je točan onaj najmanji, a to je u ovom slučaju $p_e = 1$. To znači da će ovaj proces definitivno izumrijeti. U nastavku ćemo analizirati proces grananja s malo općenitijom strukturom.

4. Mogli smo primijetiti da je distribucija potomaka procesa iz prošlog primjera jednaka Bin(2, $\frac{1}{2}$). Sada ćemo vidjeti možemo li pronaći općenito rješenje za proces sa distribucijom potomaka koja glasi Bin(2, p). To jest mijenja li se i kako vjerojatnost izumiranja ako mijenjamo p(vjerojatnost uspjeha).

Prisjetimo se da smo već izračunali funkciju izvodnicu vjerojatnosti za slučajnu varijablu Bin(n, p), stoga ćemo taj rezultat sada iskoristiti.

$$\Pi_{X_0}(s) = (1 - p + p \cdot s)^2$$

Uzimajući u obzir rezultat od prije koji smo dobili za računanje p_e, te da je $q = 1 - p$, možemo zapisati:

$$\Pi_{X_0}(p_e) = (q + p \cdot p_e)^2 = p_e.$$

Ako tu jednadžbu idemo riješiti, dobiti ćemo:

$$\begin{aligned} q^2 + p^2p_e^2 + 2qpp_e &= p_e \\ p^2p_e^2 + (2qp-1)p_e + q^2 &= 0. \end{aligned}$$

Umetanjem u kvadratnu jednadžbu to izgleda ovako:

$$\frac{1-2qp \pm \sqrt{(1-2qp)^2 - 4q^2p^2}}{2p^2}.$$

Te ako proširimo izraz $\sqrt{(1-2qp)^2 - 4q^2p^2}$ dobiti ćemo

$$\sqrt{4q^2p^2 + 1 - 4qp - 4q^2p^2} = \sqrt{1-4qp}.$$

Tako da možemo izraz odozgo zapisati i kraće:

$$\frac{1-2qp \pm \sqrt{1-4qp}}{2p^2}.$$

Te ako ovom novom izrazu umjesto q uvrstimo $(1-p)$, to će izgledati ovako:

$$\begin{gathered} \frac{1-2(1-p)p \pm \sqrt{1-4(1-p)p}}{2p^2} \\ \frac{1-2p+2p^2 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2p^2}. \end{gathered}$$

Izraz $1-4p+4p^2$ možemo faktorizirati kako bi dobili $(2p-1)^2$ što znači da je $\sqrt{1-4p+4p^2} = (2p-1)$. Umetanjem faktoriziranog izraza u prijašnju jednadžbu, imamo:

$$\frac{1-2p+2p^2 \pm (2p-1)}{2p^2}.$$

Sljedeći korak je razdvojiti taj izraz na dva, prvo ćemo zapisati izraz gdje imamo +:

$$\begin{aligned} &\frac{1-2p+2p^2 + (2p-1)}{2p^2} \\ &= \frac{2p^2}{2p^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

A zatim izraz gdje imamo -:

$$\begin{aligned} &\frac{1-2p-2p^2 - (2p-1)}{2p^2} \\ &= \frac{2p^2-4p+2}{2p^2}. \end{aligned}$$

I kada cijeli izraz podijelimo sa 2, dobijemo:

$$\frac{p^2 - 2p + 1}{p^2}.$$

Zatim je poželjno faktorirati da iz $p^2 - 2p + 1$ dobijemo $(p - 1)^2$ pa taj izraz izgleda ovako:

$$\frac{(p - 1)^2}{p^2}.$$

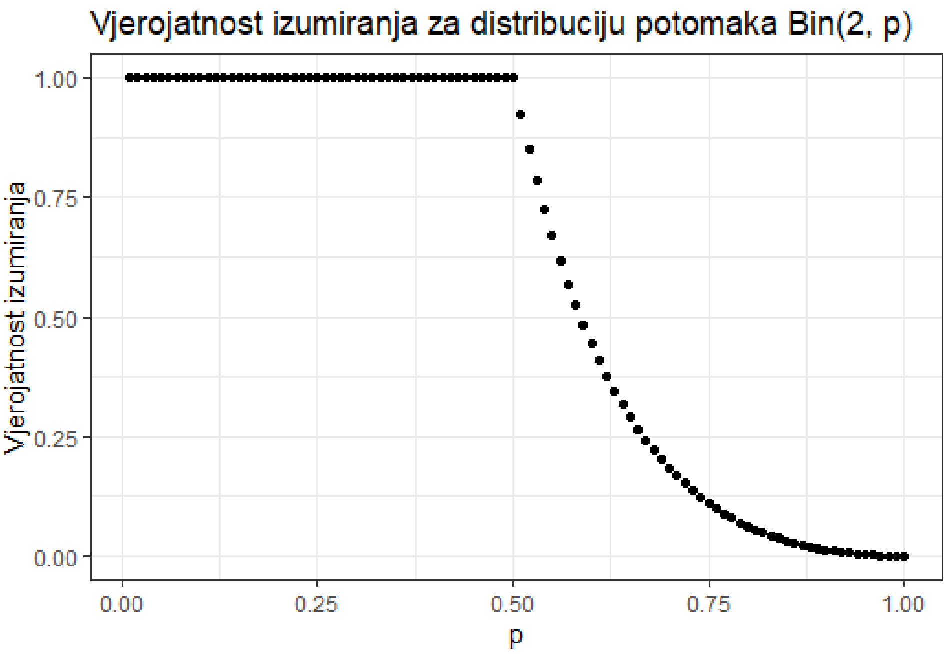
Te na kraju još znamo da je $p - 1$ = -q, stoga nam ispada da je

$$\frac{-q^2}{p^2} = \frac{q^2}{p^2}.$$

I s time zaključujemo da su naša dva rješenja 1 i $\frac{q^2}{p^2}$ A kako smo rekli da je p_e zapravo najmanje od svih mogućih rješenja, imamo:

$$p_e = min(1, \frac{q^2}{p^2}).$$

Imajući ovo u vidu, idemo vidjeti što možemo zaključiti. Ako je p jako velik, tada $\frac{q^2}{p^2}$ postaje jako mali, što znači da i p_e postaje jako mali. To zvuči u redu zato što je p vjerojatnost nastajanja potomaka, te što je on veći, vjerojatnost izumiranja p_e se smanjuje. Isto tako vrijedi i za q, čim je on veći, to je i p_e veća. Naravno, najveća vrijednost koju p_e može poprimiti je 1, jer kad govorimo o vjerojatnostima, 1 predstavlja 100%. Taj rezultat možemo prikazati i u R-u. Kako smo i pretpostavili, što je p veći, to je vjerojatnost izumiranja manja. Zanimljivo je da kada p padne na ili ispod 0.5, to rezultira da p_e postaje 1, znači da će populacija izumrijeti.



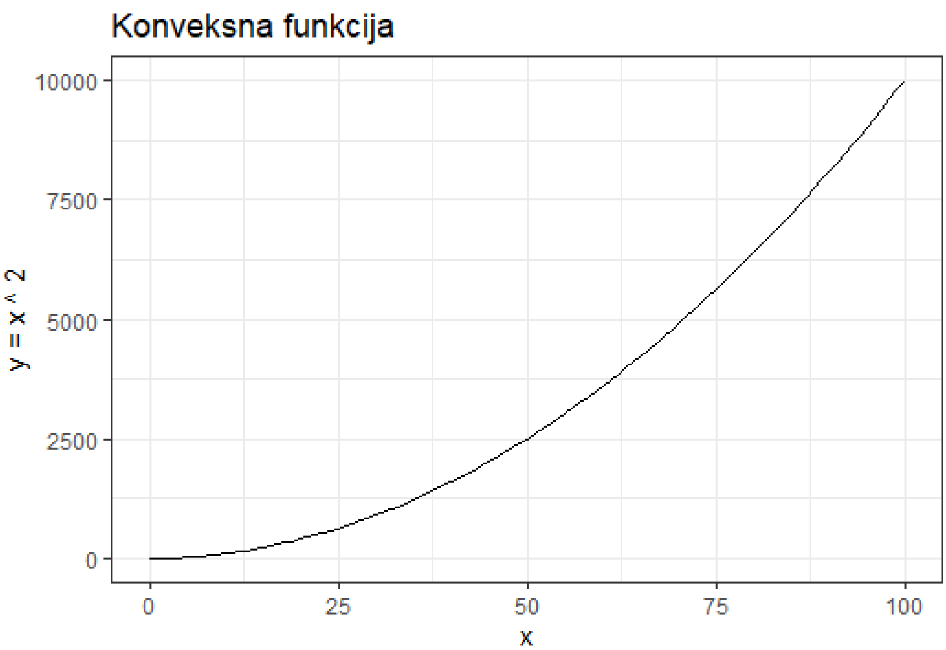
Slika 3: Vjerojatnost izumiranja za Bin(2, p) distribuciju potomaka

3.4. Uvjeti izumiranja

Kao što možemo vidjeti na grafu (slika 3) na kraju prethodnog poglavlja, imamo jednu zanimljivu pojavu. Kada p poprimi vrijednost koja je jednaka ili manja od 0.5, vjerojatnost izumiranja automatski poprima vrijednost 1 (drugim riječima, populacija definitvno izumire). U nastavku ćemo proučiti jedan koristan način na koji možemo ustanoviti hoće li proces grananja sigurno izumrijeti ili možda (ako da, koje su šanse da se to dogodi).

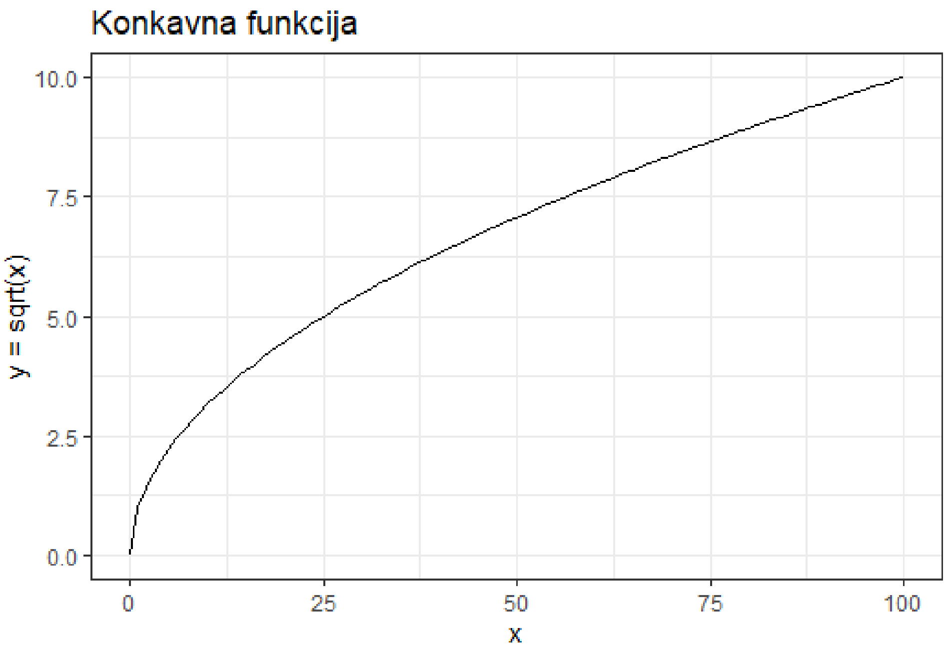
I dalje $\Pi_{X_0}(s)$ označava funkciju izvodnicu vjerojatnosti za distribuciju broja potomaka. Prisjetimo se da svaki proces počinje sa jednom jedinkom u vremenu $t = 0$, i ta se jedinka razmnožava u skladu sa unaprijed definiranom distribucijom, koju ćemo u ovom slučaju zvati X_0 (prema tome dobivamo da je $E(X_0)$ očekivana vrijednost distribucije broja potomaka). Svaki novi potomak se razmnožava prema istoj toj distribuciji, neovisno o ostalim jedinkama tog procesa. Također smo u prošlom poglavlju naučili da je najmanje rješenje $w = \Pi_{X_0}(w)$ zapravo p_e, to jest vjerojatnost izumiranja procesa.

Sada ćemo malo skrenuti našu pozornost na konveksne funkcije. Poznato je da je njihova druga derivacija pozitivna, na primjer, druga derivacija od x^2 je $2 > 0$.



Slika 4: Graf konveksne funkcije

S druge strane, konkavnoj funkciji je pak druga derivacija negativna. Na primjer, druga derivacija od $\sqrt{x}$ je $\frac{-x^{\frac{-3}{2}}}{4}$.



Slika 5: Graf konkavne funkcije

Sada ćemo ispitati da li je naša funkcija izvodnica vjerojatnosti $(\Pi_{X_0}(s))$ konveksna ili konkavna na intervalu $0 \leq s \leq 1$ (samo nam je ovaj interval zanimljiv jer tražimo vjerojatnost izumiranja p_e koja je rješenje jednadžbe $p_e = \Pi_{X_0}(p_e)$, a p_e mora biti na intervalu $[0, 1]$ jer nam predstavlja vjerojatnost). Zapisat ćemo funkciju izvodnicu vjerojatnosti još jednom:

$$\begin{aligned}\Pi_{X_0}(s) = E(s^{X_0}) &= \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X = x) \\ &= P(X = 0) + sP(X = 1) + s^2 P(X = 2) + \dots.\end{aligned}$$

Derivacija te funkcije glasi:

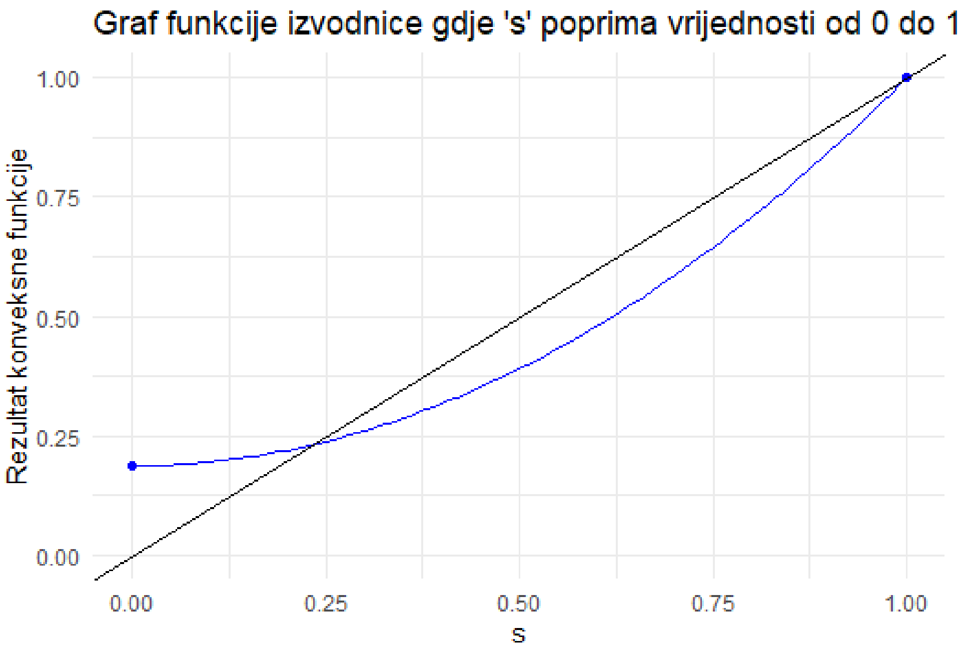
$$\Pi'_{X_0}(s) = P(X = 1) + 2sP(X = 2) + \dots$$

U obzir uzimamo samo procese grananja sa ispunjenim uvjetom $P(X > 1) > 0$, to jest one u kojima distribucija broja potomaka može poprimiti vrijednost 2 ili veću. U suprotnom nam procesi nisu zanimljivi (vidjeli smo primjer u kojem jedinka može imati maksimalno jednog potomka i koja će sigurno izumrijeti).

No, ako je $P(X > 1) > 0$, onda $\Pi_{X_0}(s)$ i $\Pi'_{X_0}(s)$ također moraju biti strogo rastuće funkcije u varijabli s zato jer su svi uvjeti nenegativni (prisjetimo se da s mora poprimiti vrijednost između 0 i 1). Također, barem jedan član koji se mijenja sa s nije 0 (ako samo pogledamo jednadžbe, vidimo da se njihov rezultat povećava sa s).

Kako je prva derivacija strogo rastuća, možemo reći da je funkcija izvodnica vjerojatnosti **konveksna**.

To možemo prikazati i na grafu:

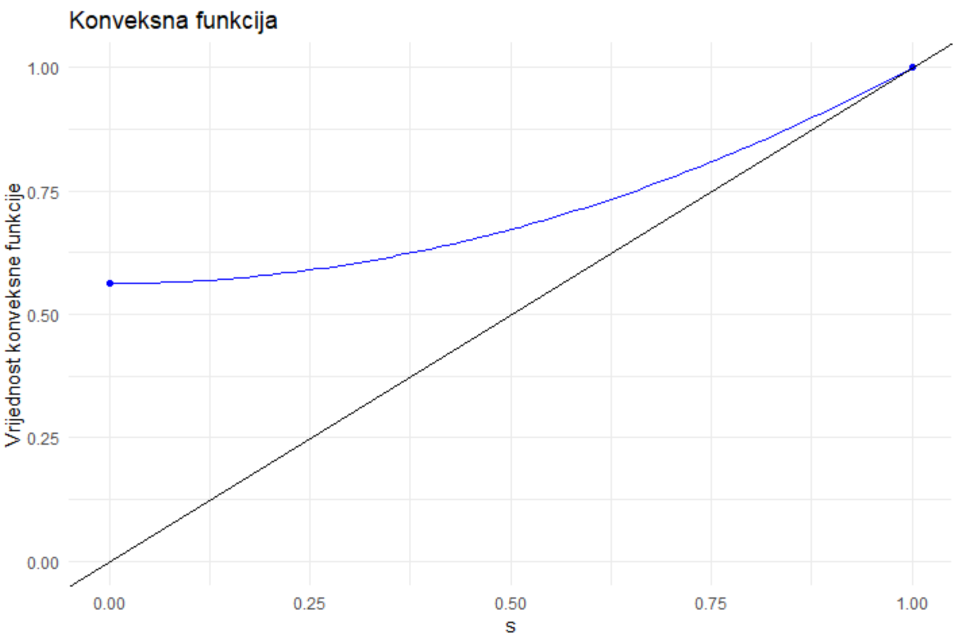


Slika 6: Graf funkcije izvodnice vjerojatnosti za $s \in [0, 1]$

Na ovom grafu imamo prikazane pojave koje možda na prvu nisu odmah uočljive. Sada ćemo ih nabrojati:

- plava linija je graf funkcije izvodnice vjerojatnosti $\Pi_{X_0}(s)$. Možemo vidjeti kako se promjenom s (na horizontalnoj osi) mijenja i vrijednost funkcije $\Pi_{X_0}(s)$ (na vertikalnoj osi). Ovdje možemo vidjeti da je linija konveksna, kao što smo i prije rekli za funkciju.
- crna linija je jednostavno graf funkcije $y = s$
- mjesto na kojem se sjeku plava linija i y os je zapravo točka $P(X_0 = 0)$, koja nam predstavlja vjerojatnost 0 potomaka. Ovime potvrđujemo naučeno jer smo kao jedno od prvih svojstava funkcije izvodnice vjerojatnosti naveli upravo $\Pi_{X_0}(0) = P(X_0 = 0)$.
- točka u kojoj plava linija sječe crnu je p_e, to jest vjerojatnost izumiranja. To je zato što je p_e zapravo najmanje rješenje funkcije $w = \Pi_{X_0}(w)$, a mjesto gdje se presjecaju plava linija (koja predstavlja funkciju izvodnicu vjerojatnosti) i crna linija (kojoj je karakteristika $t = s$) nam daje točno tu vrijednost. Napominjemo da je to najmanje rješenje jer kao što vidimo, plava i crna linija se sijeku i u točci $s = 1$. Ovo je ključna stavka kod funkcija izvodnica vjerojatnosti $\Pi_{X_0}(1) = 1$, kao što smo već i spomenuli.
- na kraju se možemo još prisjetiti da $\Pi'_{X_0}(1) = E(X_0)$. Prema tome znamo da nagib grafa funkcije u $s = 1$ iznosi $E(X_0)$, odnosno očekivana vrijednost distribucije broja potomaka.

Malo prije smo komentirali da očekivanje $E(X_0)$ prepoznajemo na grafu kao nagib grafa u $s = 1$. Kada bi uzeli za primjer da je $E(X_0) < 1$, graf bi izgledao ovako:



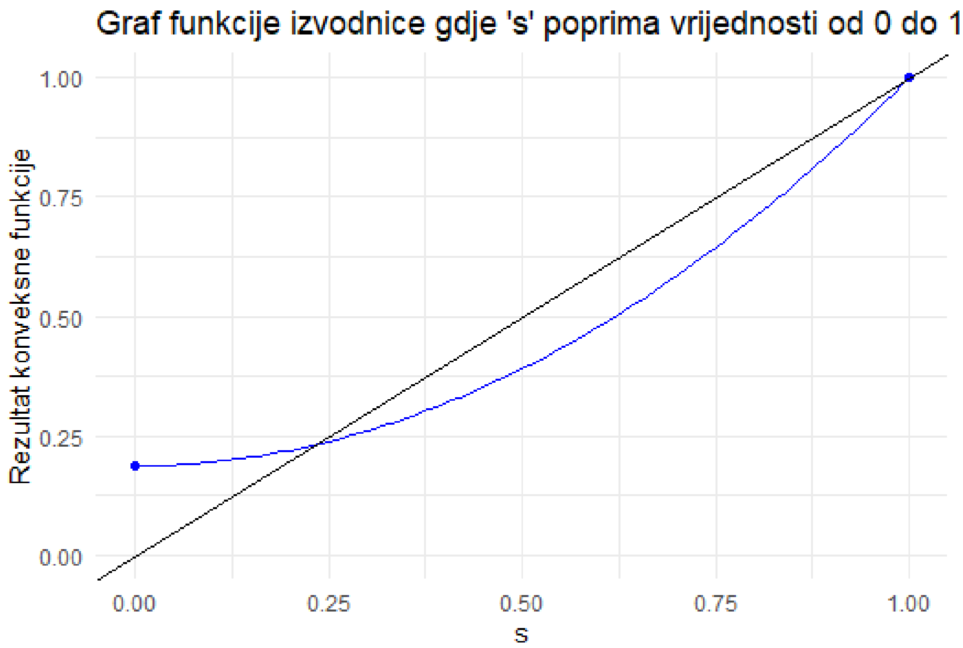
Slika 7: Graf funkcije izvodnice vjerojatnosti za $s \in [0, 1]$

Znamo da je $E(X_0) < 1$ upravo zato što je plava linija cijelo vrijeme iznad crne sve dok s ne poprimi vrijednost 1. To je očito sa grafa odozgo, ali i u svim slučajevima kada je $E(X_0) < 1$. Razlog tomu je što je nagib jednak 1, pa kako se pomičemo unazad od $s = 1$, plava linija neće padati jednakom strminom kao i crna, stoga će crna linija biti uvijek ispod plave. Što smo bliže $s = 0$, to će strmina nagiba biti blaža (jer je funkcija izvodnica vjerojatnosti konveksna funkcija na intervalu gdje s poprima vrijednost od 0 do 1, pa se nagib povećava kako se povećava i s) tako da plava linija neće dohvatitit crnu sve dok s ne poprimi vrijednost 1.

Iz ovoga možemo zaključiti da, pošto je p_e (vjerojatnost izumiranja) mjesto na grafu gdje se sijeku plava i crna linija, a jedno jedino sjecište je u $s = 1$, možemo reći da je $p_e = 1$, što znači da će populacija sigurno izumrijeti kada je očekivani broj potomaka manji od 1 ($E(X_0) < 1$).

Zapravo, isto vrijedi i za situaciju kada je očekivani broj potomaka jednak 1 $(E(X_0) = 1)$, pošto će nagib plave linije iznositi 1 kada je $s = 1$, ali strogo manja za slučaj gdje je $s < 1$, stoga ni tu neće presječi crnu liniju (jedina iznimka je kada je $P_{X_0} = 1$, to jest distribucija potomaka je 1 bez iznimke, u tom slučaju će se linija funkcije izvodnice vjerojatnosti poklapati sa crnom linijom, gdje ne dolazi do nikakve zanimljivosti jer ta populacija neće nikada izumrijeti). Sada kada znamo i to, možemo preformulirati naš zaključak od malo prije: populacija će sigurno izumrijeti kada je očekivani broj potomaka manji ili jednak 1 ($E(X_0) < 1$).

Vratimo se sad još jednom na prvi primjer gdje smo grafički prikazali $E(X_0) > 1$.



Slika 8: Graf funkcije izvodnice vjerojatnosti za $s \in [0, 1]$

U ovom slučaju je nagib plave linije, (koja predstavlja funkciju izvodnicu vjerojatnosti) za $s = 1$, veći od 1, što iz sličnih razloga onima koje smo naveli ranije (nagib plave linije je veći od onog crne linije, stoga će padati brže i nalaziti se ispod crne linije), osigurava da će plava linija sigurno presječi crnu u nekoj točci na intervalu od $s = 0$ do $s = 1$ i s time ćemo dobiti rješenje za p_e koje je manje od 1. Čak i krajnji slučajevi ovdje zadovoljavaju: ako imamo $P(X_0 = 0) = 0$, u tom slučaju, plava linija presjeca crnu u točci $s = 0$, a to znači da je $p_e = 0$ ili da populacija sigurno nikada neće izumrijeti. Ovo ima smisla zato jer nam izraz $P(X_0 = 0) = 0$ zapravo govori "vjerojatnost da jedinka proizvede 0 potomaka je također 0", što znači da će se jedinke zauvijek razmnožavati. Stoga možemo reći da nije sigurno hoće li populacija izumrijeti (mogućnost da izumre postoji, ali nije 100% sigurna), ako je očekivana vrijednost distribucije potomaka veća od 1 ($E(X_0) > 1$), kao što je objašnjeno u [6].

Ovi rezultati su od velike važnosti jer nam omogućavaju da odredimo hoće li promatrani proces definitvno izumrijeti, promatrajući samo distribuciju potomaka. Ako samo razmislimo o tome, također ima smisla jer ako jedinka prosječno proizvede manje od jednog potomka, populacija neće dugo preživjeti.

3.5. Dugoročni pokazatelji populacije

Možemo reći da je najgore iza nas, pa se sada možemo posvetiti nekim ključnim mjerenjima procesa grananja populacije koji vrijede za duže vremenske periode. Razmislimo koja bi bila srednja vrijednost nekog procesa grananja X_t, to jest kako bi glasila $E(X_t)$ (očekivana veličina populacije u vremenu t). Kao oznaku ćemo koristiti μ_t, gdje nam μ predstavlja srednju vrijednost distribucije potomaka (drugim riječima, prosječan broj potomaka koji nastane od roditelja).

Lako možemo izračunati μ_t ako se prisjetimo ključnih stavki o funkcijama izvodnicama vjerojatnosti, kao na primjer:

$$\Pi'_{X_t}(1) = \mu_t.$$

To znači da uvrštavanjem 1 u prvu derivaciju funkcije izvodnice vjerojatnosti od X_t dobijemo srednju vrijednost od X_t. Započet ćemo dakle sa funkcijom izvodnicom vjerojatnosti od X_t. Prisjetimo se što smo naučili od prije:

$$\Pi_{X_t}(s) = \Pi_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s)).$$

Te kada obje strane deriviramo, dobijemo ovo:

$$\Pi'_{X_t}(s) = \Pi'_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s))\Pi'_{X_0}(s).$$

Zatim ćemo uvrstiti 1 u tu jednadžbu i dobiti:

$$\Pi'_{X_t}(1) = \Pi'_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(1))\Pi'_{X_0}(1).$$

Sada ako iskoristimo znanje od prije o tome da je $\Pi'_{X_t}(1) = \mu_t$ i da je $\Pi_{X_0}(1) = 1$, gornji izraz možemo zapisati i na ovaj način:

$$\begin{aligned} &= \Pi'_{X_{t-1}}(1)\Pi'_{X_0}(1) \\ &= \Pi'_{X_{t-1}}(1)\mu. \end{aligned}$$

A pošto znamo da je μ srednja vrijednost distribucije potomaka, dobivamo:

$$\Pi'_{X_t}(1) = \mu_t = \Pi'_{X_{t-1}}(1)\mu.$$

Što još možemo skratiti:

$$\Pi'_{X_{t-2}}(1)\mu^2.$$

Dok ne dobijemo:

$$\mu_t = \mu^t.$$

Ovaj rezultat nam govori da je prosječna veličina populacije u vremenu t, zapravo srednja vrijednost distribucije potomaka potencirana sa t (znamo da ovo vrijedi zbog toga što se svaka jedinka iste populacije razmnožava prema istom pravilu distribucije potomaka i stoga imamo umnožavajući efekt).

Također možemo primjetiti da se ovo uklapa sa našim uvjetima vjerojatnosti izumiranja od ranije. Naime, ako je $\mu < 1$, što kako smo i vidjeli je uvjet da će populacija izumrijeti sa vjerojatnošću 1, isto tako vrijedi da μ^t teži 0 kako t ide u ∞ (znači da populacija isto tako izumire). S druge strane kada je $\mu = 1$, isto vrijedi da je $\mu^t = 1$ za svaki t (i u ovom slučaju populacija definitivno izumire osim za izniman slučaj kada je $P(X_0 = 1) = 1$, drugim riječima, kada distribucija potomaka može poprimiti samo vrijednost 1).

Ako je $\mu > 1$, onda je očito da μ^t teži ∞ kako i t teži ∞. Ovo se također podudara sa rezultatom od prije: populacija gdje je $\mu > 1$ neće sigurno izumrijeti (dok će postojati neka mala vjerojatnost izumiranja).

Možemo iskoristiti rezultat odozgo $E(X_t) = \mu^t$ da pronađemo očekivanu vrijednost sveukupnog broja jedinki od samog početka populacije do vremena t (točnije, sve jednike koje su nekada živjele do trenutka t). To ćemo definirati kao M_t, te definicija glasi:

$$M_t = X_0 + X_1 + X_2 + ... + X_t.$$

Drugim riječima, veličina svih generacija sve do vremena t. Uzimajući u obzir očekivanja s obje strane (uz korištenje linearnosti očekivanja i stavku da je X_0 = 1):

$$\begin{aligned}
E(M_t) &= E(X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_t) \\
E(M_t) &= E(X_0) + E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_t) \\
E(M_t) &= 1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^t.
\end{aligned}$$

Ovo je relativno lako za izračunati i daje nam uvid u dugoročne veličine populacije (koja uključuje sve jedinke koje su nekad bile dio te populacije) za bilo koju populaciju. Ako ponovo uzmemo da je $\mu > 1$, onda naravno i jednadžba $1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^t$ ide u ∞ kako i t ide u beskonačnost (očekivana ukupna veličina populacije se povećava kako se povećava i vrijeme). Ako uzmemo da je $\mu = 1$, onda vrijedi da je $E(M_t) = t$, što ima smisla, jer ako očekujemo da nastaje po jedna nova jedinka, onda ćemo nakon t vremena imati t sveukupnih jedinki. Na kraju, ako je $\mu < 1$, imamo da $E(M_t)$ konvergira u izraz:

$$= \frac{1}{1 - \mu}.$$

Prema ovome će, kako se povećava μ, se i očekivana ukupna veličina populacije povećavati. Na primjer ako je $\mu = 0.99$ onda je $E(M_t)) = 100$, a ako je $\mu = 0.1$ onda je $E(M_t)$ nešto veći od 1. Ovo ima smisla, iz razloga ako distribucija potomaka ima veću srednju vrijednost, onda očekujemo da i sveukupna veličina populacije bude veća (ako promotrimo slučaj gdje je $\mu = 0.01$ imamo da je očekivana sveukupna veličina populacije malo veća od 1, jer postoji dobra šansa da već prva jedinka odumre bez ostavljanja potomka).

Sada kada smo pronašli $E(M_t)$, vrijeme je da se posvetimo pronalasku varijance od X_t. Ovo ćemo zapisivati kao ${\sigma_t}^2$. Prisjetimo se derivacije koja nam je pomogla kod rješavanja zadnjeg problema:

$$\Pi'_{X_t}(s) = \Pi'_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s))\Pi'_{X_0}(s).$$

Ovaj izraz ćemo ponovo derivirati da dobijemo:

$$\Pi''_{X_t}(s) = \Pi''_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s))\left(\Pi'_{X_0}(s)\right)^2 + \Pi'_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(s))\Pi''_{X_0}(s).$$

Upamtimo odozgo da je $\Pi''_{X_0}(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2$, a ako znamo svojstvo funkcije izvodnice vjerojatnosti $\Pi''_X(1) = E(X^2) - E(X)$, onda možemo zapisati $E(X^2)$ kao Var$(X) + E(X)^2$, tako da nam ostane $\Pi''_X(1) =$ Var$(X) + E(X)^2 - E(X)$ i stoga imamo:

$$\begin{aligned}\Pi''_{X_t}(1) &= \sigma_t^2 - \mu^t + \mu^{2t}\\ \Pi''_{X_{t-1}}(1) &= \sigma_{t-1}^2 - \mu t - 1 + \mu^{2t-2}.\end{aligned}$$

Pošto znamo da je $E(X_t) = \mu^t$ i da je $E(X_{t-1}) = \mu^{t-1}$. Ako upotrijebimo ovo i stavke koje smo malo prije koristili ($\Pi_{X_0}(1) = 1i\Pi'_{X_0}$), možemo uvrstiti 1 umjesto s u drugu derivaciju odozgo

$$\Pi''_{X_t}(1) = \Pi''_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(1))\left(\Pi'_{X_0}(1)\right)^2 \quad + \Pi'_{X_{t-1}}(\Pi_{X_0}(1))\Pi''_{X_0}(1).$$

Te kada to uvrstimo i na lijevu i desnu stranu jednadžbe, dobit ćemo:

$$\sigma_t^2 - \mu^t + \mu^{2t} = (\sigma_{t-1}^2 - \mu^{t-1} + \mu^{2t-2}) \cdot \mu^2 + \mu^{t-1} \cdot (\sigma^2 - \mu + \mu^2).$$

I sada to možemo riješiti za σ_t^2

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \mu^t - \mu^{2t} + \sigma_{t-1}^2 \cdot \mu^2 - \mu^{t-1} \cdot \mu^2 + \mu^{2t-2} \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1} - \mu \cdot \mu^{t-1} + \mu^2 \cdot \mu^{t-1}\\ \sigma_t^2 &= \mu^t - \mu^{2t} + \sigma_{t-1}^2 \cdot \mu^2 - \mu t + 1 + \mu^{2t} + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1} - \mu^t \cdot \mu^{t+1}\\ \sigma_t^2 &= \sigma_{t-1}^2 \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1}.\end{aligned}$$

Prema tome znamo dobiti i σ_{t-1}^2 (samo ako pogledamo jednadžbu odozgo):

$$\sigma_{t-1}^2 = \sigma_{t-2}^2 \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-2}.$$

Stoga možemo ovo umetnuti u našu jednadžbu za σ_{t-2}^2 da dobijemo:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \mu^2(\sigma_{t-2}^2 \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-2}) + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1}\\ \sigma_t^2 &= \sigma_{t-2}^2\mu^4 + \sigma^2 \cdot \mu^t + \sigma^2\mu^{t-1}.\end{aligned}$$

Te ako sada uvrstimo za σ_{t-2}^2, što prema istom obrascu ispada ovako:

$$\begin{aligned}\sigma_{t-1}^2 &= \sigma_{t-3}^2 \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-3}\\ \sigma_t^2 &= \mu^4\left(\sigma_{t-3}^2 \cdot \mu^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t-3}\right) + \sigma^2 \cdot \mu^t + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1}\\ \sigma_t^2 &= \mu^6\sigma_{t-3}^2 + \sigma^2 \cdot \mu^{t+1} + \sigma^2 \cdot \mu^t + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1}.\end{aligned}$$

Možemo primjetiti da su σ^2 uvjeti rastući, također vidimo da se kod izraza $\mu^6\sigma_{t-3}^2$ dodaje 2 u eksponent svaki puta kada se σ umanji za 1. S vremenom ćemo dobiti $t = 1$ gdje imamo da je $\sigma_1 = \sigma$ pošto je ovo samo varijanca distribucije potomaka (kada je $t = 1$, imamo samo potomka od prve postojeće jedinke iz $t = 0$). Prema tome, ako se pomičemo $t - 1$ koracima prema dolje dok ne dođemo do $t = 1$, imamo:

$$\sigma_t^2 = \mu^{2t-2}\sigma + \sigma^2 + \mu^{2t-3} + ... + \sigma^2 \cdot \mu^{t+1} + \sigma^2 \cdot \mu^t + \sigma^2 \cdot \mu^{t-1}.$$

Te ako izlučimo μ^{t-1} dobijemo:

$$\sigma_t^2 = \mu^{t-1}\sigma^2(1 + \mu + \mu^2 + ... + \mu^{t-1}).$$

Ovdje možemo zaključiti da, ako je $\mu = 1$, preostaje nam samo

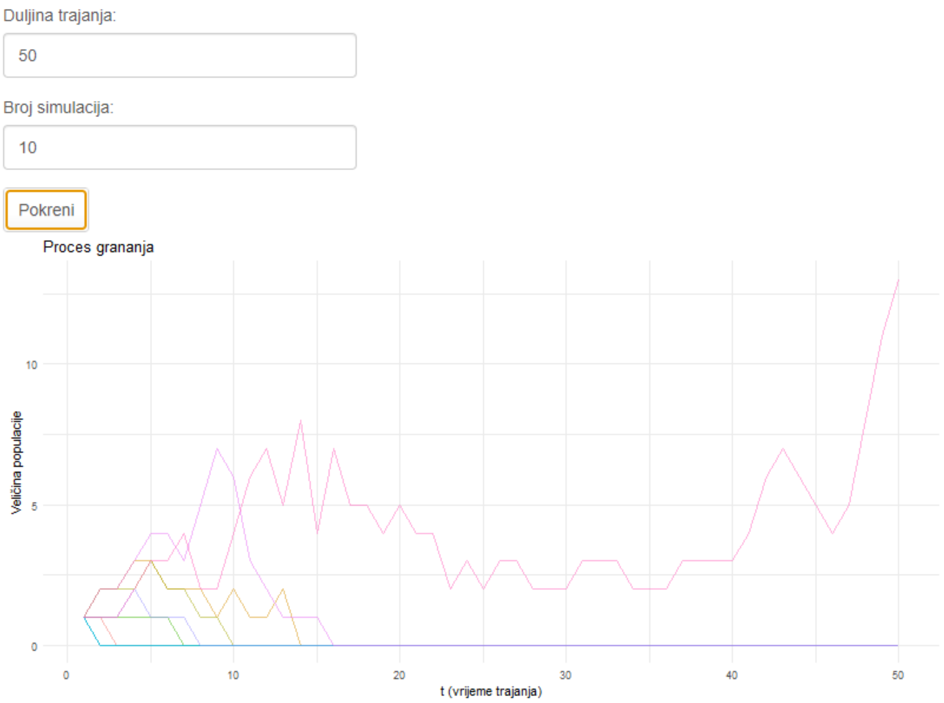
$$\sigma_t^2 = t \cdot \sigma^2.$$

Ovo ima smisla (varijanca se povećava kako se povećava i vrijeme t). Još možemo vidjeti da ako je $\mu > 1$, ova suma ide do ∞ kako i n ide do ∞, a ako je $\mu < 1$, naš izraz će konvergirati u:

$$\frac{\mu^{t-1}\sigma^2}{1 - \mu}.$$

4. Interaktivna aplikacija za generiranje procesa grananja

Kako bi vizualno prikazali tijek procesa grananja, izrađena je interaktivna aplikacija u sklopu RStudija. Aplikacija omogućava korisniku da unese željenu duljinu trajanja simulacije kao i broj simulacija. Nakon toga, korisnik potvrđuje svoj unos klikom na gumb, te aplikacija prikazuje simulaciju sa zadanim parametrima u obliku grafa. Možemo primjetiti kako sa istim postavkama parametara svaki puta dobijemo različite rezultate, što nam pokazuje nepredvidivost kao glavnu značajku procesa grananja.



Slika 9: Simulacija procesa grananja

Pokreni aplikaciju

5. Zaključak

Proces grananja kao matematička teorija se počeo razvijati od postavljanja pitanja o opstanku plemićkih prezimena. Najbitniji ishod te teorije je saznati hoće li proces kojeg promatramo ikada izumrijeti ili ne. U svrhu tog ishoda, računamo vjerojatnost izumiranja samog procesa grananja. U današnje vrijeme se primjena procesa grananja znatno proširila od njegove početne svrhe. Njezinu primjenu možemo pronaći u fizici, biologiji, ekonomiji i slično, od kojih su neki i navedeni u ovom radu. Uz pomoć interaktivne aplikacije je pokazano kako duljina trajanja te broj simulacija utječe na ishod procesa grananja.

Popis literature

[1] Y. Wu, C. Hu i X. Li, „A Branching Process Model of Rumor Spread," *Royal Society Open Science*, sv. 2, br. 9, 2015., Accessed: 2024-05-14. DOI: 10.1098/rsos.150240. adresa: https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rsos.150240.

[2] R. C. Rothermel, „A Mathematical Model for Predicting Fire Spread in Wildland Fuels," United States Department of Agriculture, teh. izv., 1972., Accessed: 2024-05-14. adresa: https://www.fs.usda.gov/rm/pubs_int/int_rp115.pdf.

[3] M. Kimmel, „Branching Processes in Biology," Department of Statistics, Rice University, teh. izv., 2004., Accessed: 2024-05-14. adresa: https://www.stat.rice.edu/~jrojo/PASI/PASI2011/Dr.RojoPasi2011/prgacad/23.pdf.

[4] P. Penava, *Funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti*, Accessed: 2024-07-11, 2022. adresa: https://repozitorij.mathos.hr/en/islandora/object/mathos%3A617.

[5] V. Authors, *Branching Processes*, Accessed: 2024-08-19, 2024. adresa: %5Curl%7Bhttps://bookdown.org/probability/bookdown-demo/branching-processes.html#probability-generating-functions%7D.

[6] R. Fewster, *Chapter 7: Branching Processes*, Accessed: 2024-08-03, 2014. adresa: https://www.stat.auckland.ac.nz/~fewster/325/notes/ch7blank.pdf.

Popis slika