Platonova tijela i konačne podgrupe specijalne ortogonalne grupe

Jakop, Zvonimir

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

VARAŽDIN

Zvonimir Jakop

PLATONOVA TIJELA I KONAČNE PODGRUPE SPECIJALNE ORTOGONALNE GRUPE

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Zvonimir Jakop

Matični broj: 0016151220

Studij: Primjena informacijske tehnologije u poslovanju

PLATONOVA TIJELA I KONAČNE PODGRUPE SPECIJALNE ORTOGONALNE GRUPE

ZAVRŠNI RAD

Mentor :

Prof. dr. sc. Zlatko Erjavec

Varaždin, rujan 2024.

Zvonimir Jakop

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor potvrdio prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

U ovom radu se istražuje veza između konačnih podgrupa specijalne ortogonalne grupe $SO(3)$ i Platonovih tijela, s ciljem razumijevanja kako se grupe simetrija ovih geometrijskih figura uklapaju unutar teorije grupa. Platonova tijela, koja uključuju tetraedar, kocku, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar, predstavljaju pravilne konveksne poliedre sa specifičnim simetrijama koje su od značaja u matematici i drugim znanstvenim područjima. Teorijsko-metodološka polazišta rada temelje se na analizi grupa simetrija ovih tijela i njihovom odnosu prema konačnim podgrupama grupe $SO(3)$. U radu se usredotočujemo na istraživanje kako grupe izometrija Platonovih tijela mogu biti predstavljene kao podgrupe grupe $SO(3)$, pri čemu se posebno razmatraju rotacije. Glavni dio rada uključuje identifikaciju grupa simetrija svih Platonovih tijela, te njihovu klasifikaciju pomoću konačnih podgrupa grupe $SO(3)$. U radu se također istražuje kako se ove simetrije manifestiraju kroz konkretne rotacijske matrice unutar $SO(3)$. Na temelju ove analize, u završnom radu pruža se uvid u dublje matematičke veze između geometrijskih i algebarskih struktura, te doprinosi razumijevanju kako se apstraktne grupe koriste za modeliranje stvarnih geometrijskih simetrija.

Ključne riječi: geometrija; grupa $SO(3)$; Platonova tijela

Sadržaj

1. Uvod

Platonova tijela su od davnina privlačili pažnju matematičara, filozofa i znanstvenika zbog svoje jedinstvene simetrije i estetske privlačnosti. Nazvana po grčkom filozofu Platonu, ova tijela su idealizirani oblici koji predstavljaju vrhunski primjer pravilnosti i harmonije u geometriji (Coxeter, 1973).

Platonova tijela uključuju pet poliedara: tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Svako od tih tijela ima specifičnu grupu simetrija koja čini konačnu podgrupu specijalne ortogonalne grupe $SO(3)$. (Humphreys, 1996)

Grupa $SO(3)$, koja predstavlja skup svih rotacija koje čuvaju udaljenosti u trodimenzionalnom prostoru, nudi bogat okvir za proučavanje simetrija Platonovih tijela. Ova grupa, poznata kao specijalna ortogonalna grupa, ključna je za razumijevanje rotacijskih simetrija i može se analizirati kroz konačne podgrupe koje odgovaraju specifičnim geometrijskim strukturama. Grupa $SO(3)$ igra značajnu ulogu u mnogim matematičkim teorijama i fizičkim modelima, posebno u kontekstu rotacija i izometrija (Stillwell, 2001).

2. Metode i tehnike rada

U ovom radu će se detaljno proučavati odnos između konačnih podgrupa specijalne ortogonalne grupe $SO(3)$ i Platonovih tijela. Analiza grupe simetrija, rad s rotacijskom matricom i korištenje matematičkog softvera za vizualizaciju i dokumentiranje rezultata neke su od metoda i pristupa koji će se koristiti za pisanje ovog rada.

Prva metoda uključuje teoretsku analizu grupa simetrija svakog od Platonovih tijela. Grupe simetrija tijela (A_4 za tetraedar, S_4 za kocku i oktaedar, A_5 za dodekaedar i ikosaedar) bit će detaljno pojašnjene, uvažavajući njihovu strukturu. Ova analiza uključuje:

- Istraživanje rotacijskih simetrija tijela.
- Razumijevanje odnosa između grupa simetrije i konačnih podgrupa $SO(3)$.
- Korištenje teorije grupa za klasifikaciju simetrija Platonovih tijela

Za dublje razumijevanje kako grupe simetrija Platonovih tijela odgovaraju konačnim podgrupama $SO(3)$, bit će korištene metode matrica rotacije.

Kako bi se podržala analiza i dokumentacija, koristit će se alat LaTeX. LaTeX je napredni sistem za pripremu dokumenata koji omogućava precizno upravljanje matematičkim formulama i strukturiranim tekstom. LaTeX je iznimno koristan za generiranje matematičkih izraza, tablica i figura u profesionalnom formatu, što će osigurati jasnu i urednu prezentaciju analize i rezultata rada.

Istraživačke aktivnosti uključivat će:

- Detaljno proučavanje relevantne literature za osnove teorije grupa i grupe simetrija Platonovih tijela
- Implementaciju matematičkih modela u odabranom softveru za provjeru grupa simetrija i matrice rotacija
- Dokumentiranje svih rezultata i analiza u LaTeX-u kako bi se osigurala dosljednost i preciznost u izvještavanju.

Kombinacijom teoretske analize i računalne simulacije, rad će pružiti sveobuhvatan pregled veze između konačnih podgrupa grupe $SO(3)$ i Platonovih tijela.

Rad je pisan u LaTeX-u, a za izradu Platonovih tijela korišten je program TikZ kao i matematički alat Geogebra.

3. Platonova tijela

3.1. Karakteristike i povijest Platonovih tijela

Platonova tijela su geometrijska tijela koji su poznati po svojoj izvanrednoj simetriji i estetskoj privlačnosti. Njihova povijest seže do drevne Grčke, gdje su ih proučavali filozofi i matematičari poput Platona, po kojem su i dobila ime. Platon je u svom dijalogu "Timaj" povezao ova tijela s elementima prirode: tetraedar s vatrom, kocku s zemljom, oktaedar s zrakom, dodekaedar s eterom, a ikosaedar s vodom (Coxeter, 1973). S druge strane, Euklid je u svom djelu "Elementi" dao prvi strogi matematički dokaz da postoji samo pet pravilnih konveksnih poliedara.

Prije navođenja Platonovih tijela pojasnit ćemo simetrije jednakostraničnog trokuta i kvadrata od kojih se sastoje pojedina Platonova tijela.

3.2. Simetrije jednakostraničnog trokuta i kvadrata

3.2.1. Simetrije jednakostraničnog trokuta

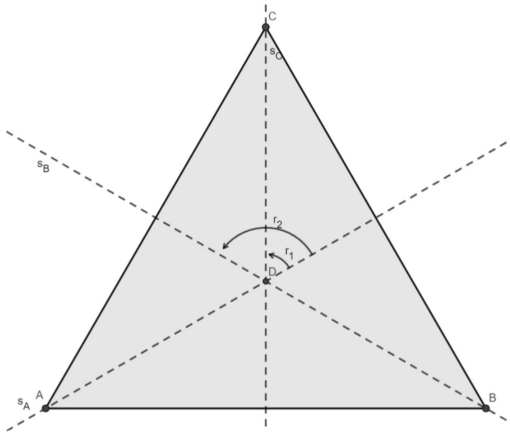
Razmotrimo sve izometrije jednakostraničnog trokuta $\triangle = ABC$, tj. sva preslikavanja koja čuvaju udaljenosti i preslikavaju ovaj trokut na samog sebe. Označimo slovima A, B, C vrhove trokuta u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Označimo sa s_A, s_B, s_C refleksije (zrcaljenja) u odnosu na simetrale kutova trokuta. Nadalje, označimo s r_0, r_1, r_2 rotacije u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko središta težišta za 0, 120 ili 240 stupnjava, redom. Tada r_1 preslikava vrh A u B, B u C i C u A. Ovih šest transformacija nazivamo simetrijama trokuta ABC i skup koji čine označavamo sa $Sym(\triangle)$. Dakle,

$$Sym(\triangle) = \{r_0, r_1, r_2, s_A, s_B, s_C\}.$$

Ne postoje druge izometrije trokuta $\triangle$. Naime, svaka izometrija preslikava vrhove u vrhove, a svaka bijekcija između vrhova u potpunosti određuje izometriju. Na primjer, preslikavanje $A \mapsto B$, $B \mapsto A$, $C \mapsto C$ određuje refleksiju s_C.

Međutim, postoji samo šest različitih načina da se slova A, B, C pridruže trima vrhovima, pa stoga ne može postojati više od šest izometrija trokuta Δ. Drugim riječima, $Sym(\Delta)$ na neki način odgovara svim permutacijama tročlanog skupa slova A, B, C, koje raspisujemo kao $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$.

Pojasnimo dodatno, npr. koristit ćemo simbol $\circ$ za označavanje kompozicije izometrija, posebno onih iz $Sym(\Delta)$, i razumjeti da izraz poput $r_1 \circ s_A$ znači da se prvo primjenjuje transformacija r_1, a zatim s_A. Očigledno, kompozicijom dvaju elemenata $Sym(\Delta)$, uvijek se dobije element iz $Sym(\Delta)$.



Slika 1: Simetrije jednakostraničnog trokuta (vlastita izrada)

Koji element daje kompozicija dvaju zadanih, može se lako vidjeti crtanjem slike trokuta ABC i promatranjem što se događa s njom kada se primjenjuju dane izometrije, no to se može učiniti i bez ikakvih slika: dovoljno je pratiti "putanju" vrhova A, B, C. Dakle, u primjeru $r_1 \circ s_A$, rotacija r_1 preslikava vrh A u B, a zatim B u A simetrijom s_A; slično, $B \mapsto C$, a zatim $C \mapsto B$ i $C \mapsto$A, a zatim $A \mapsto C$, tako da $r_1 \circ s_A$ = s_B.

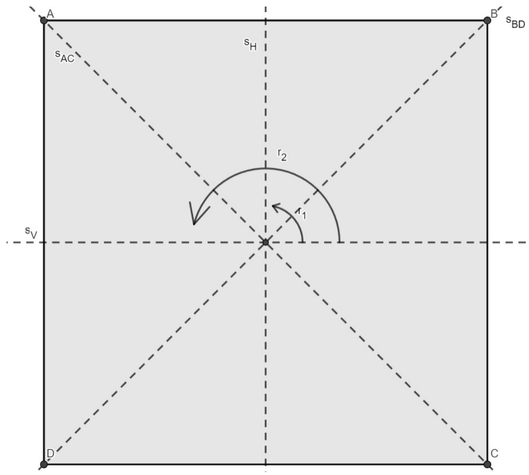
Rezultat kompozicije bilo koje dvije simetrije može se vidjeti u sljedećoj tablici:

$\circ$	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_0	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_1	r_1	r_2	r_0	s_B	s_C	s_A
r_2	s_2	s_0	s_1	s_C	s_A	s_B
s_A	s_A	s_C	s_B	r_0	r_1	r_2
s_B	s_B	s_A	s_C	r_2	r_0	r_1
s_C	s_C	s_B	s_A	r_1	r_2	r_0

Tablica 1: Kompozicije dviju simetrija jednakostraničnog trokuta (preuzeto iz [4]

3.2.2. Simetrije kvadrata

Razmotrimo sve izometrije kvadrata $\square = ABCD$, tj. sva preslikavanja koja čuvaju udaljenosti i preslikavaju kvadrat na samog sebe.



Slika 2: Simetrije kvadrata (vlastita izrada)

Označimo sa s_H, s_V, i s_{AC},s_{BD} refleksije kroz horizontalne i vertikalne središnje linije, te kroz dijagonale AC, BD, redom. Označimo sa r_0, r_1, r_2, r_3 rotacije oko središta za 0, 90, 180 i 270 stupnjeva, redom. Ovih osam transformacija nazivamo simetrijama kvadrata, a skup koji one čine možemo zapisati ovako:

$$Sym(\square) = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_H, s_V, s_{AC}, s_{BD}\}.$$

Rezultat kompozicija bilo koje dvije simetrije može se vidjeti u sljedećoj tablici:

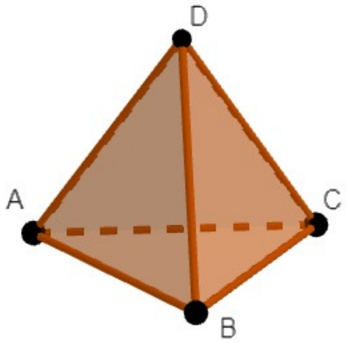
$*$	r_0	r_1	r_2	r_3	s_H	s_V	s_{ac}	s_{bd}
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_H	s_V	s_{ac}	s_{bd}
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_{ac}	s_{bd}	s_V	s_H
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_V	s_H	s_{bd}	s_{ac}
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_{bd}	s_{ac}	s_H	s_V
s_H	s_H	s_{bd}	s_V	s_{ac}	r_0	r_2	r_3	r_1
s_V	s_V	s_{ac}	s_H	s_{bd}	r_0	r_2	r_1	r_3
s_{ac}	s_{ac}	s_H	s_{bd}	s_V	r_1	r_3	r_0	r_2
s_{bd}	s_{bd}	s_V	s_{ac}	s_H	r_3	r_1	r_2	r_0

Tablica 2: Kompozicije dviju simetrija kvadrata (preuzeto iz [4]

3.3. Platonova tijela

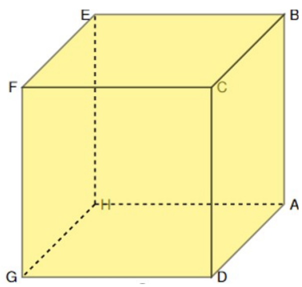
Platonova tijela su definirana kao konveksni poliedri čije su strane jednaki pravilni poligoni (mnogokuti), a vrhovi jednako udaljeni od središta. Postoji pet Platonovih tijela, a u nastavku ih prikazujemo na slikama i navodimo osnovne podatke.

- Tetraedar - Omeđen je sa 4 jednakostranična trokuta te ima, 4 vrha i 6 bridova



Slika 3: Tetraedar (vlastita izrada)

- Heksaedar(kocka) - Omeđen je sa 6 jednakih kvadrata te ima 8 vrhova i 12 bridova



Slika 4: Heksaedar (vlastita izrada)

- Oktaedar - Sastoji se od osam jednakostraničnih trokuta te ima 6 vrhova i 12 bridova,

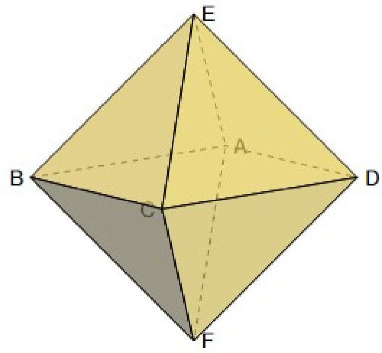
- Dodekaedar - Sastoji se od dvanaest pravilnih peterokuta i ima 20 vrhova i 30 bridova,

- Ikosaedar - Sastoji se od dvadeset jednakih trokuta sa 12 vrhova i 30 bridova

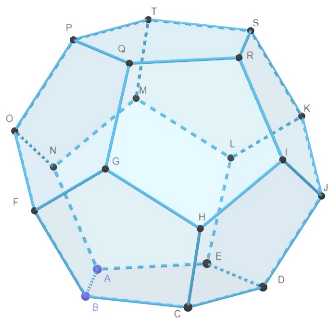
Za pravilne poliedre vrijedi Eulerova [1] formula za koju vrijedi :

$$V - B + S = 2$$

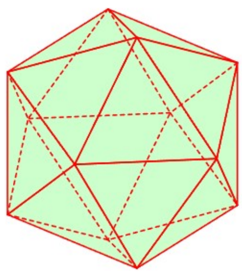
[1] Leonhard Euler (1707-1783), švicarski matematičar, fizičar i astronom



Slika 5: Oktaedar (vlastita izrada)



Slika 6: Dodekaedar (vlastita izrada)



Slika 7: Ikosaedar (vlastita izrada)

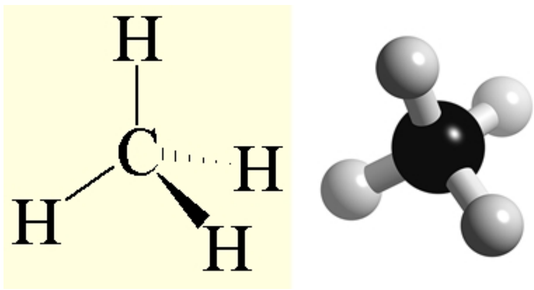
gdje V označava broj vrhova, B broj bridova, a S broj strana.

Platonova tijela su također igrala važnu ulogu u kasnijoj povijesti matematike i znanosti, uključujući Keplerovu teoriju planetarnih orbita i moderne teorije simetrije u fizici i kemiji (Stillwell, 2001).

3.4. Primjeri Platonovih tijela u prirodi i svakodnevnom životu

Tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar su figure koje se često pojavljuju u različitim kontekstima u svakodnevnom životu i prirodi. Evo nekoliko primjera za svaki od njih.

Oblik tetraedra ima tetrapak (višeslojna kartonska ambalaža) ili molekula metana u kemiji, gdje je jedan atom ugljika povezan s četiri atoma vodika.



Slika 8: Molekula metana(preuzeto iz [9]

Oblik kocke jako se često može vidjeti u našoj okolini npr. voda se zamrzava u kockastom kalupu tvoreći kockice leda, a kocke šećera se koriste za zaslađivanje napitaka.

Naravno, kristalne rešetke raznih minerala imaju oblike Platonovih tijela. Mineral silvin (silvit) ima kristalnu rešetku u obliku kocke.

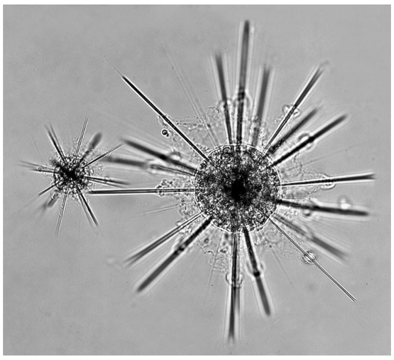
Slika 9: Prikaz kristalne rešetke minerala u obliku heksaedra (preuzeto iz [8]

Oblik oktaedra imaju mnoge igračke za djecu, a poznato je i da je oktaedar jedan od oblika u koji se bruse dijamanti. Također, kuprit formira kristale u obliku oktaedra.

Slika 10: Dijamant (preuzeto iz [10]

Početkom XX. stoljeća Ernst Haeckel opisao je niz organizama čiji kosturi imaju oblik raznih pravilnih poliedara. Kostur jednostaničnog organizma zrakaša (lat.Circogonia icosahedra) u obliku je ikosaedra. Većina ih živi duboko u vodi i plijen su koraljnim ribama i zato se pokušavaju obraniti pomoću dvanaest šupljih bodlji iz dvanaest vrhova kostura. Žalci na vrhovima bodlji čine ih još učinkovitijim u obrani

Također, većina virusa, poput virusa herpesa, imaju oblik pravilnog ikosaedra. Virusne strukture sastoje se od ponovljenih proteinskih subjedinica, a ikosaedar je najpogodniji oblik za reprodukciju takvih struktura.



Slika 11: Zrakaš u obliku ikosaedra (preuzeto iz [8]

Dobivanje sumporne kiseline, željeza, specijalnih vrsta cementa ne može se osigurati bez sumpornog pirita (FeS). Kristali tog kemijskog sastava imaju oblik dodekaedra. Kristali pirita imaju oblik dodekaedra.

4. Grupe, podgrupe i specijalna ortogonalna grupa SO(3)

4.1. Grupe i podgrupe

Kako bismo proučavali vezu Platonova tijela i određenih grupa simetrija, u nastavku ćemo ponoviti osnovne pojmove iz teorije grupa.

Teorija grupa transformacija, razvijana je u radovima nekoliko velikih matematičara: Lagrangea, Abela, Galoisa, Sophusa Liea, Felixa Kleina, Éliea Cartana, Hermanna Weyla. Početkom 20. stoljeća, algebraičari su odlučili generalizirati ovu teoriju u formalnu teoriju apstraktnih grupa. Cayleyev teorem kaže da su sve apstraktne grupe zapravo grupe transformacija. Također treba spomenuti i dvije važne klase grupa (slobodne grupe i grupe permutacija) koje imaju određena univerzalna svojstva.

Neka je X skup (konačan ili beskonačan) proizvoljnih elemenata nazvanih točke. Po definiciji, **grupa transformacija** G koja djeluje na skupu X je (neprazan) skup G bijekcija na X opremljen operacijom kompozicije $\circ$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) G je zatvoren na kompoziciju, tj. za bilo koje transformacije $g, g' \in G$, kompozicija $g \circ g'$ je element skupa G;

(ii) G je zatvoren na invertiranje, tj. za bilo koju transformaciju $g \in G$, njen inverz g^{-1} je lement skupa G.

Ovi uvjeti odmah impliciraju da G sadrži identitetu. Naime, uzmimo bilo koji $g \in G$; prema (ii), imamo $g^{-1} \in G$; prema (i), imamo $g^{-1} \circ g \in G$; ali $g^{-1} \circ g = id$ (po definiciji inverznog elementa), i stoga $id \in G$. Također, primijetite da je kompozicija u G asocijativna (jer je kompozicija asocijativno preslikavanje). Ako $x \in X$ i $g \in G$, tada oznakom xg označavamo sliku točke x pod transformacijom g. (Uobičajenija notacija je $g(x)$, ali nije prikladna: imamo $x(g \circ h) = (xg)h$, dok $(g \circ h)(x) = h(g(x))$, s g i h koji se pojavljuju u obrnutom redoslijedu na desnoj strani ove jednadžbe.)

Kao što smo spomenuli, iz strukture grupe transformacija, kroz povijest je razvijen pojam apstraktne grupe, tako da ćemo sada definirati i taj pojam.

Uređeni par $(G, \cdot)$, koji se sastoji iz nepraznog skupa G i binarne operacije $\cdot : G \times G \to G$ nazivamo **grupa**, ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(1) binarna operacija je asocijativna, tj. vrijedi $(ab)c = a(bc)$, za svaki $a, b, c \in G$;

(2) za binarnu operaciju postoji i jednoznačno je određen neutralni element, tj. $e \in G$ sa svojstvom $ea = ae = a$, za svaki $a \in G$;

(3) svaki je element invertibilan, tj. za svaki $a \in G$ postoji i jednoznačno je određen $a^{-1} \in G$ sa svojstvom $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Ako je ispunjen i dodatni zahtjev

(4) binarna operacija je komutativna, tj. vrijedi $ab = ba$, za svaki $a, b \in G$,

onda kažemo da je grupa $(G, \cdot)$ *komutativna* ili Abelova.

Nadalje, za grupu kažemo da je konačna ili beskonačna, već prema tome ima li skup G konačno ili beskonačno mnogo elemenata. Kardinalni broj skupa G nazivamo redom grupe.

Uvjeti (1) - (3) nazivaju se i aksiomi grupe. Ako je binarna operacija zapisana multiplikativno (množenje), govorimo o multiplikativnoj grupi, neutralni element zovemo jedinica, a inverz, kako smo već rekli, recipročnim elementom. Ako pak je binarna operacija označena aditivno (zbrajanje), govorimo o aditivnoj grupi i tada neutralni element zovemo nula grupe, a inverz suprotnim elementom.

Važniji primjeri grupa su standardne numeričke grupe, tj. skupovi brojeva uz operacije zbrajanja i množenja. Npr. grupu čini skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ u odnosu na zbrajanje, kao i skup racionalnih $\mathbb{Q}$, realnih $\mathbb{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ u odnosu na operaciju zbrajanja. Također, skupovi $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ čine grupu u odnosu na operaciju množenja. No, $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ nije grupa u odnosu na množenje (nema svaki element inverz!).

Podgrupa H grupe G je skup elemenata iz G koji također čini grupu s istom binarnom operacijom. Drugim riječima, podgrupa H mora zadovoljiti ista svojstva kao i grupa G (Humphreys, 1996).

Ako je grupa konačna (skup koji se promatra je konačan), onda je red grupe kardinalni broj (broj elemenata) promatranog skupa. Ako je grupa beskonačna (promatrani skup ima beskonačno mnogo elemenata), onda je red grupe beskonačan.

U nastavku navodimo neka nama važne grupe. Prva je grupe permutacija. Kao što smo spomenuli, permutacija je svako preslikavanje skupa na samog sebe koje je injektivno i surjektivno, tj. bijekcija. Npr. skup permutacija tročlanog skupa $A = \{a, b, c\}$ ima 6 elemenata. To su permutacije abc, acb, bac, bca, cab i cba. Vidimo da se u stvari radi o svim mogućim načinima na koje možemo rasporediti tri navedena elementa. Taj skup obično označavamo s S_3. Uz operaciju kompozicije, taj skup tvori grupu pri čemu je neutralni element identična permutacija abc. Analogno, skup svih permutacija četveročlanog skupa je dan sa

$$\begin{aligned} S_4 = \{&abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, \\ &bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, \\ &cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, \\ &dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba\} \end{aligned}$$

i očito je da ima 24 elementa.

Ako iz danog skupa izdvojimo samo parne permutacije (permutacije koje imaju paran broj inverzija) tada dobijemo alternirajuću grupu A_4. sa 12 elemenata.

$$
\begin{aligned}
A_4 = \{&abcd, acdb, adbc, badc, bcad, bdca,\\
&cabd, cbda, cdab, dacb, dbac, dcba\}
\end{aligned}
$$

Postoji i grupa $A5$ koja je dana skupom svih permutacija peteročlanog skupa pri čemu je:

$$
\begin{aligned}
A_5 = \{&abcde, abdec, abecd, acbed, acdbe, acedb,\\
&adbce, adceb, adebc, aebdc, aecbd, aedcb,\\
&baced, badce, baedc, bcade, bcdea, bcead,\\
&bdaec, bdcae, bdeca, beacd, becda, bedac,\\
&cabde, cadeb, caebd, cbaed, cbdae, cbeda,\\
&cdabe, cdbea, cdeab, ceadb, cebad, cedba,\\
&dabec, dacbe, daecb, dbace, dbcea, dbeac,\\
&dcaeb, dcbae, dceba, deabc, debca, decab,\\
&eabcd, eacdb, eadbc, ebadc, ebcad, ebdca,\\
&ecabd, ecbda, ecdab, edacb, edbac, edcba\}
\end{aligned}
$$

4.2. Specijalna ortogonalna grupa $SO(3)$

Kako bi mogli znati što je specijalna ortogonalna grupa $SO(3)$, potrebno je razumjeti ostale slične grupe matrica iz kojih se ona "razvila", a to su grupe $GL(2,\mathbb{R})$, $O(2)$, $SO(2)$ i $O(3)$.

Poznato je da skup svih matrica reda 2 čija je determinanta različita od nule tvori grupu uz operaciju množenja matrica. Ta se grupa naziva **grupa regularnih matrica** i označava s $GL(2,\mathbb{R})$. Npr. matrica

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

je regularna matrica jer je njezina determinata jednaka 6. Primijetimo da je inverzna matrica A^{-1} u ovom slučaju dana s

$$
A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}
$$

jer vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ pri čemu je identična matrica I dana s

$$
I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

$O(2)$ je tzv. **grupa ortogonalnih matrica reda 2**. Po definiciji, matrica A je ortogonalna ako vrijedi $A^TA = I$, gdje je A^T transponirana matrica, a I identiteta tj. jedinična matrica. Grupa ortogonalnih matrica $O(2)$ je reda 2 i podgrupa je grupe regularnih matrica.

$O(2)$ kao skup sadrži matrice oblika

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

a inverzne matrice navedenih matrica su sljedeće matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

redom.

Promatramo li u skupu ortogonalnih matrica $O(2)$ samo matrice čija je determinanta jednaka 1, dobit ćemo podskup matrica koji se označava $SO(2)$. Skup $SO(2)$ s operacijom množenja tvori grupu koju zovemo **specijalna ortogonalna grupa matrica reda 2**.

Matrice u toj grupi imaju oblik

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Navedenim matricama prezentiraju se sve rotacije oko ishodišta u dvodimenzionalnoj ravnini. Kada se elemnti grupe mogu izraziti samo jednim parametrom, grupu nazivamo jednoparametarskom. $SO(2)$ je jednoparametarska grupa u kojoj smo parametar označili s θ.

U nastavku ćemo dokazati da $SO(2)$ zadovoljava aksiome grupe.

- zatvorenost, pomnožimo li dvije matrice iz $SO(2)$ dobivena matrica je također iz $SO(2)$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

- neutralni element u $SO(2)$ je jedinična matrica (primijetimo da je jedinična matrica u našem prikazu matrica iz $SO(2)$ dana za $\theta = 0$,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- već smo ranije naveli da je inverz matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{matrica} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- iako množenje proizvoljnih matrica nije komutativno, $SO(2)$ je komutativna grupa jer

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \text{ i}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

dokazuje komutativitnost.

$O(3)$ je tzv. **grupa ortogonalnih matrica reda 3** tj. skup svih ortogonalnih matrica dimenzije 3×3 uz operaciju množenja matrica. $O(3)$ je podgrupa grupe regularnih matrica reda 3. Matrice u $O(3)$ mogu imati determinantu +1 (što odgovara rotacijama) ili -1 (što odgovara refleksijama). $O(3)$ je troparametarska grupa jer se rotacije u 3D mogu opisati s tri parametra (kutovi rotacije oko triju osi).

$O(3)$ kao skup sadrži npr. matrice oblika

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

s matricama

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & -\cos\beta \end{bmatrix}$$

i matricama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & -\cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Promatramo li u skupu ortogonalnih matrica $O(3)$ matrice čija je determinanta jednaka 1, dobit ćemo podskup matrica koji se označava $SO(3)$. Skup $SO(3)$ s operacijom množenja tvori grupu koju zovemo **specijalna ortogonalna grupa matrica reda 3**.

Specijalna ortogonalna grupa $SO(3)$ predstavlja skup svih 3×3 ortogonalnih matrica s determinantom jednakom 1. Elementi grupe $SO(3)$ mogu se shvatiti kao rotacije oko fiksne osi u trodimenzionalnom prostoru, a svaki element grupe može se predstaviti matricom rotacije (Sossinsky, 2010).

$SO(3)$ kao skup sadrži matrice koje se mogu prikazati kao produkt triju matrica navedenih u lijevom stupcu kod $O(3)$. Te matrice predstavljaju rotacije oko z-osi za kut α, oko y-osi za kut β i oko x-osi za kut γ redom.

U tom smislu, matrica iz $SO(3)$ općenito se dobije kao produkt

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix},$$

odnosno ima oblik

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Napomena. Primijetimo da ako promatramo samo one matrice iz grupe $O(3)$ čija je determinanta -1, tada taj skup s operacijom množenja ne čini grupu. Razlog tome je što, kada se dvije matrice A i B s determinantom -1 množe, dobiva se matrica za koju vrijedi $det(AB) = detA \cdot detB = -1 \cdot (-1) = 1$. Odnosno, ne vrijedi svojstvo zatvorenosti, ne dobiva se matrica čija je determinanta -1.

5. Grupe izometrija Platonovih tijela

Izometrija je transformacija koja čuva udaljenosti između točaka. Za Platonova tijela, izometrije su rotacije koje preslikavaju poliedar na samog sebe, tj. permutiraju njegove vrhove, bridove i strane na način da se zadrži oblik tijela. Svako Platonovo tijelo ima svoju specifičnu grupu izometrija koja čini konačnu podgrupu grupe $SO(3)$ (Sossinsky, 2010)

5.1. Klasifikacija Platonovih tijela pomoću konačnih podgrupa grupe SO(3)

Konačne podgrupe grupe $SO(3)$ koje odgovaraju Platonovim tijelima mogu se klasificirati prema njihovim grupama simetrije. Svaka od tih grupa odgovara specifičnom Platonovom tijelu, a njihova struktura može se analizirati kroz matrice rotacije koje predstavljaju izometrije tih tijela. Grupe simetrija Platonovih tijela često se mogu razumjeti i kroz pojam permutacija.

Kao što smo već spomenuli. permutacija je preslikavanje skupa na samog sebe koje preuređuje elemente tog skupa što znači da je formalno bijekcija. U kontekstu grupa simetrije Platonovih tijela, permutacije predstavljaju načine na koje se vrhovi, bridovi i strane tijela mogu međusobno zamijeniti zadržavajući geometrijski oblik, a mogu se razumjeti i kroz simetrične operacije poput simetrije i refleksije.

Kao što smo spomenuli već postoje grupe permutacija koje su povezane sa svakim od Platonovih tijela koje ćemo na njihovim primjerima detaljnije objasniti i primijeniti pomoću njihovih rotacija, simetrija odnosno zrcaljenja.

- A_4 - Alternirajuća grupa reda 12 - Ova grupa odgovara simetrijama tetraedra i sadrži 12 rotacija koje permutiraju vrhove tetraedra (Humphreys, 1996)
- S_4 - Simetrična grupa reda 24 - Ova grupa odgovara simetrijama kocke i oktaedra te sadrži 24 rotacije koje permutiraju vrhove kocke ili oktaedra (Humphreys, 1996).
- A_5 - Alternirajuća grupa reda 60 - Ova grupa odgovara simetrijama dodekaedra i ikosaedra te sadrži 60 rotacija koje permutiraju vrhove dodekaedra ili ikosaedra (Humphreys, 1996).

5.2. Grupe izometrija Platonovih tijela

5.2.1. Tetraedar

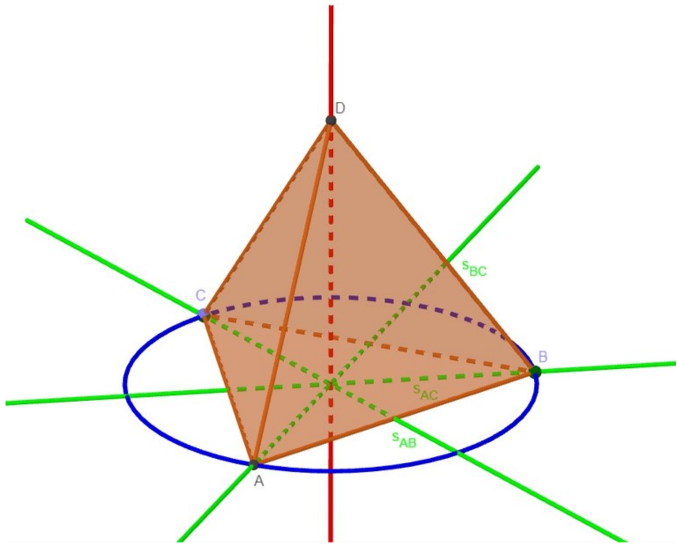
Tetraedar ima četiri vrha, a njegova grupa simetrije je izomorfna permutacijskoj grupi S_4. To znači da svaka permutacija četiri vrha predstavlja jednu simetriju tetraedra. Postoji ukupno 24 različitih permutacija, odnosno simetrija, uključujući rotacije i refleksije. (Kurepa, 1974.)

U nastavku ćemo pojasniti koje su to 24 izometrije.

Grupu simetrija tetraedra označit ćemo sa $Sym(\Delta^3)$, a njezinu podgrupu rotacija sa

$$Rot(\Delta^3) = Sym^+(\Delta^3) \subset Sym(\Delta^3).$$

$Sym(\Delta^3)$ sastoji se od 8 rotacija oko 4 osi (kroz po jedan vrh i središte suprotne stranice) za kutove od $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$, nadalje od 3 rotacije za π oko osi koje spajaju središta suprotnih stranica te na kraju identične rotacije (npr. prvi tip rotacije za 0 radijana).



Slika 12: Os simetrije tetraedra opisane kružnice (vlastita izrada)

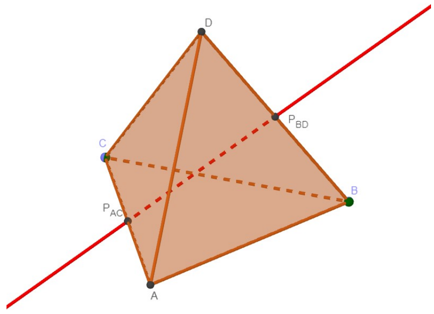
Na slici 12. prikazan je tetraedar $ABCD$ pa ćemo iskoristiti sliku kako bi još jednom detaljnije pojasnili simetrije tetraedra.

Jedna vrsta simetrije je rotacija oko pravca koji prolazi jednim vrhom i središtem nasuprotne strane. Takva rotacija može biti za 60 ili 120 stupnjeva, odnosno $\frac{\pi}{3}$ ili $\frac{2\pi}{3}$. Rotacija za 360 stupnjava je u stvari identiteta.

Istaknuta os simetrije koja prolazi vrhom D i središtem opisane kružnice njemu nasuprotne strane (plavom bojom je opisana kružnica, zelenom je samo naznačeno kako se dođe do opisane kružnice (pomoću sjecišta simetrala stranica trokuta). Prilikom rotacije za 60 stupnjeva odnosno $\frac{\pi}{3}$, tetraedar $ABCD$ se preslikava u tetraedar $CABD$, a prilikom rotacije za 120 stupnjeva, odnosno $\frac{2\pi}{3}$, tetraedar $ABCD$ se preslika u tetraedar $BACD$. Povežemo li to sa grupom permutacija, rekli bismo da zadnja navedena rotacija odgovara permutaciji $BACD$.

Druga vrsta simetrije je rotacija oko pravca koji prolazi središtem jednog brida i središtem njemu nasuprotnog brida (slika 14.). U tom slučaju moguća je samo rotacija za 180 stupnjeva odnosno π. Primijetimo da smo zasad otkrili $2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12$ simetrija tetraedra. Preostalih 12 simetrija odnose se na refleksije. Npr. napravimo li refleksiju tetraedra $ABCD$ po ravnini koja prolazi kroz vrhove A i D te polovište brida BC, tetraedra $ABCD$ preslikat će se u tetraedar $ACBD$. Obzirom da na taj način možemo oadabrati 12 parova vrhova, dobit ćemo 12 novih simetrija.

Ukupno gledajući 12 rotacija i 12 refleksija daje nam konačni iznos od 24 simetrije tetraedra.



Slika 13: Os simetrije tetraedra pomoću središta nasuprotnih bridova (vlastita izrada)

Rotacije tetraedra mogu se predstaviti matricama koje permutiraju vrhove, dok zadržavaju geometrijski oblik. (Coxeter, 1973.)

Kao primjer, navest ćemo da bi rotaciji koja tetraedar $ABCD$ preslikava u tetraedar $CABD$ bila uz pogodan odabir koordinatnog sustava (ishodište u težištu stranice ABC koja leži u xy-ravnini, vrh A na x-osi, a vrh D na z-osi) dana matricom

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2.2. Kocka i oktaedar

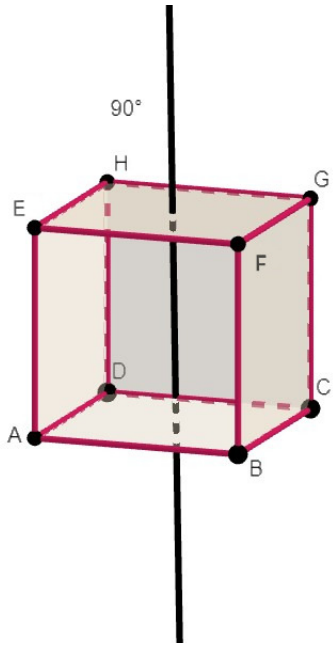
Grupa simetrije kocke ima 48 elemenata, a njezina rotacijska podgrupa sastoji se od 24 elementa:

$$Rot(\square^3) = Sym^+(\square^3) \subset Sym(\square^3).$$

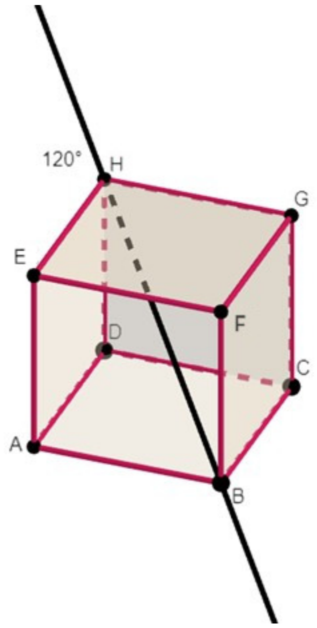
Na slici 14 prikazana je kocka i jedna njezina os simetrije, pravac koji ide kroz središta nasuprotnih strana kocke. Rotiramo li kocku za $\frac{\pi}{2}$ (90 stupnjeva), tada se kocka $ABCDEFGH$ preslika u kocku $DABCHEFG$. Naravno, na taj način kocku možemo rotirati i za 180 i 270 stupnjeva. Rotacija za 360 stupnjeva, daje nam identitetu. Obzirom da imamo mogućnost odabira tri osi (kroz tri para nasuprotnih strana), na taj način dobijemo 9 rotacija i identitetu kao desetu.

Sljedeća vrsta simetrije kocke prikazana je na slici 15. Os rotacije prolazi dvama nasuprotnim vrhovima. Za primjer uzmimo da pravac prolazi vrhovima A i G. U smjeru strelice moramo zavrtjeti kocku za kut od 120 stupnjeva ili za 240 stupnjava odnosno za $\frac{2\pi}{3}$ ili $\frac{4\pi}{3}$. Pri rotaciji za kut od 120 stupnjeva se kocka $ABCDEFGH$ preslika u kocku $AEFBDHGC$, a pri rotaciji za kut od 240 stupnjeva se $ABCDEFGH$ preslika u kocku $ADHEBCGF$.

Obzirom da imamo četiri para nasuprotnih vrhova, a oko svakog možemo rotirati za 120 ili 240 stupnjeva, dobijemo 8 novih simetrija kocke.

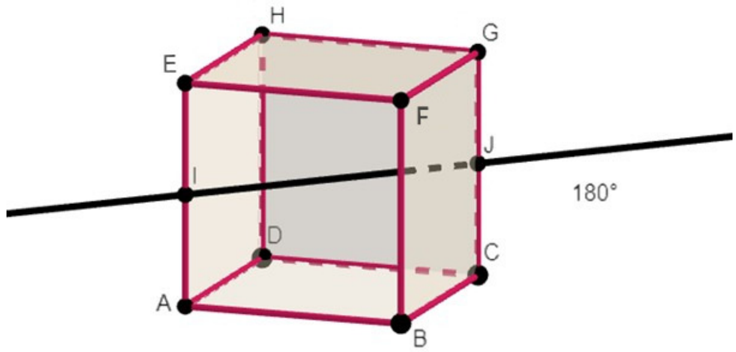


Slika 14: Os simetrije kocke kroz središta nasuprotnih strana kvadrata (vlastita izrada)



Slika 15: Os simetrije kocke kroz nasuprotne vrhove (vlastita izrada)

Sljedeća vrsta simetrije kocke je kad os simetrije (pravac) prolazi kroz polovišta nasuprotnih paralelnih bridova. Takva vrsta ima samo jednu simetriju, a to je rotacija za kut od 180. Na slici 16 je pravac (os simetrije) koji prolazi polovištima bridova AE i CG. Oko te osi se za kut od 180 odnosno $\frac{\pi}{2}$ kocka ABCDEFGH preslika u kocku EHGFDCBA. Ta vrsta simetrije može se napraviti na 6 različitih načina. Pravac može prolaziti kroz polovišta bridova AE i CG, kroz polovišta bridova BF i DH, kroz polovišta od AB i GH, kroz polovišta od CD i EF, kroz polovišta od BC i EH, kroz polovišta od AD i FG.



Slika 16: Os simetrije kocke kroz polovišta nasuprotnih bridova (vlastita izrada)

Dakle, ukupno za prvu vrstu ima 3 osi simetrije, svaka je za 3 kuta ($3 \times 3 = 9$). Za drugu vrstu postoje 4 osi simetrije, svaka je za 2 kuta ($4 \times 2 = 8$). Za treću vrstu ima 6 osi simetrije, svaka je za 1 kut ($6 \times 1 = 6$). Na kraju, postoji i identiteta, to je simetrija koja kocku ABCDEFGH preslika u ABCDEFGH, odnosno u samo sebe. Sveukupno, imamo (prva vrsta)+(druga vrsta)+(treca vrsta)+(identiteta)= =9+8+6+1= =24 simetrije kocke.

Naravno, kocka ima i jednaki broj (24) simetrija koje odgovaraju refleksijama kocke u odnosu na različite ravnine. Prvo takvo zrcaljenje je u odnosu na ravninu koja "reže" kocku napola (prolazi polovištem bridova AE, BF, CG i DH), pri čemu se kocka $ABCDEFGH$ preslika u kocku $EFGHABCD$. Takvih je zrcaljenja točno 3. Nadalje su refleksije u odnosu na ravnine koje prolaze paralelnim dijagonalama nasuprotnih stranica kojih ima 6. Uzmemo kao primjer koja prolazi dijagonale stranica $ABCD$ i $EFGH$ odnosno dijagonale AC i EG Pa se tako vrh A preslika u vrh C, B se preslika u D, E u G i F u H. Pa tako iz kocke $ABCDEFGH$ nastaje kocka $CDABGHEF$.Ova refleksija zamjenjuje dijagonalno suprotne vrhove na prednjoj i zadnjoj strani kocke. Zatim, postoje refleksije koje prolaze kroz dijagonale cijele kocke (vrhove).Takvih zrcaljenja ukupno ima također 6. Uzmimo za primjer ravnimu koja prolazi kroz suprotne vrhove A i G.Vrh A se preslika u vrh G, B u H, C u E i D u F pa se zaključuje po tome da se kocka $ABCDEFGH$ preslikava u kocku $GHEFCDBA$.Ova refleksija zamjenjuje dijagonalne vrhove cijele kocke.I zadnja vrsta refleksije je u odnosu na ravnine koje prolaze kroz suprotne stranice. Takvih refleksija ima sve skupa 9. Uzmimo za primjer efleksiju u odnosu na ravninu koja prolazi kroz središta suprotnih stranica $ABCD$ i $EFGH$ koje su s njima paralelne. Pa se tako vrh A preslika u vrh B, C u D, E u F i G u H pa se tako kocka $ABCDEFGH$ preslika u kocku $BADCFEHG$.Ova refleksija zamjenjuje suprotne vrhove unutar svake strane, ali ne zamjenjuje strane međusobno. Svaki tip refleksije zamjenjuje različite parove vrhova na kocki, ovisno o geometriji ravnine refleksije, a primjeri pokazuju kako se određeni vrhovi preslikavaju unutar kocke za svaku vrstu refleksije.

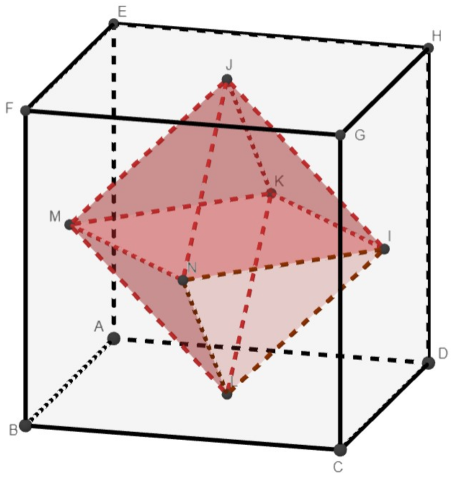
Sukladno navedenom, ukupan broj simetrija heksaedra je $24 + 24 = 48$.

Dualnost heksaedra i oktaedra

Obzirom da su heksaedar i oktaedar dualni obzirom na broj vrhova i strana, grupa izometrija oktaedra je također S_4.

Kocka i oktaedar imaju grupe simetrija koje su izomorfne permutacijskoj grupi S_4. Kocka ima 24 simetrije koje uključuju rotacije oko središta i dijagonala, dok oktaedar ima ekvivalentne simetrije s obzirom na svoje vrhove i plohe. (Šoštarić, 1995.)

Naime, ako spojimo središte svake od 6 stranica kocke sa središtima četiri susjedne stranice (slika 17), dobivamo kostur oktaedra dualnog kocki. Oktaedar ima 8 vrhova i 8 trokutastih stranica i njegova grupa izometrija se poklapa sa grupom izometrija kocke.



Slika 17: Dualnost kocke i oktaedra (vlastita izrada)

Rotacije kocke i oktaedra mogu se predstaviti matricama koje permutiraju dijagonale ili vrhove, respektivno.(Humphreys, 1996.)

Kao primjer, navest ćemo da je rotacija koja kocku $ABCDEFGH$ preslikava u kocku $CDABGHEF$, uz pogodan odabir koordinatnog sustava (ishodište u težištu stranice $ABCD$ koja leži u xy-ravnini, pri čemu je polovište brida AB na x-osi) dana matricom

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2.3. Dodekaedar i ikosaedar

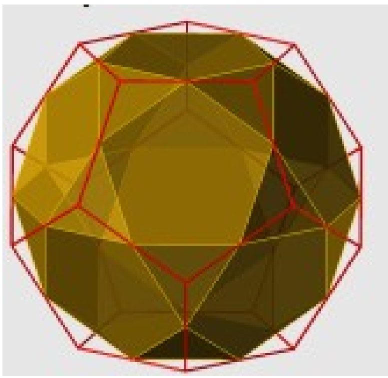
Rotacije dodekaedra i ikosaedra su složenije i uključuju permutacije koje odgovaraju alternirajućoj grupi $A5$. (Stilwell, 2001.)

Simetrijska grupa dodekaedra i ikosaedra je izomorfna alternirajućoj grupi A_5, koja ima 60 elemenata. Alternirajuća grupa A_5 je podskup permutacijske grupe S_5 i sadrži sve parne permutacije pet elemenata. (Takači, Takači, 1997.)

Grupa simetrija dodekaedra ima 120 elemenata, a rotacijska podgrupa 60 elemenata. Vrijedi:

$$Rot(Dod) = Sym^{+}(Dod) \subset Sym(Dod)$$

Spajanjem središta stranica dodekaedra s jednom zajedničkom stranicom dobivamo ikosaedar dualan dodekaedru; ima 20 stranica, 30 bridova i 12 vrhova. Njegova transformacijska grupa je ista kao i kod dodekaedra.



Slika 18: Dualnost dodekaedra i ikosaedra (preuzeto iz [11]

6. Zaključak

Platonova tijela i njihove simetrije pružaju fascinantan pogled na geometriju i teoriju grupa. Kroz proučavanje konačnih podgrupa specijalne ortogonalne grupe SO(3), možemo bolje razumjeti složene simetrije tih tijela i njihovu povezanost s apstraktnim strukturama u matematici. Ovo istraživanje ima značajne primjene ne samo u teoriji grupa, već i u područjima poput kristalografije, fizike i kemije, gdje simetrijske strukture igraju ključnu ulogu.

Popis literature

[1] Coxeter, H. S. M. (1973). Regular Polytopes. Dover Publications.

[2] Humphreys, J. F. (1996). A Course in Group Theory. Oxford University Press

[3] Kurepa, S. (1974). Uvod u teoriju grupa. Školska knjiga

[4] Sossinsky, A. B. (2010). Geometries. AMS Student Mathematical Library, vol. 64. American

[5] Stillwell, J. (2001). Mathematics and Its History. Springer

[6] Šoštarić, S. (1995). Kombinatorika s teorijom grafova. Element.

[7] Takači, A., Takači, Đ. (1997). Algebra i diskretna matematika. Tehnička knjiga.

[8] Nova akropola (bez dat.) Platonova tijela, [Na internetu], Dostupno: `https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/platonova-tijela/Novaakropola.html` [pristupano 30.8.2024.]

[9] https://instrukcije-kemija.blogspot.com/2010/11/instrukcije-iz-kemije-kovalentna-veza16.html [pristupano 1.9.2024.]

[10] https://poliedripravilni.weebly.com/u-svakodnevnom-381ivotu.html [pristupano 1.9.2024.]

[11] https://www.grad.hr/geomteh3d/posteri/polupravilniposter.pdf [pristupano 3.9.2024.]

Popis slika

Popis tablica